Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Емеличев, Ю. В. Степанишина, О квазиустойчивости векторной траекторной задачи мажоритарной оптимизации, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 1, 38–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm402>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:58:03

УДК 519.10

О КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ МАЖОРИТАРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В. А. Емеличев, Ю. В. Степанишина

Рассматривается многокритериальная комбинаторная задача с мажоритарным принципом оптимальности, частные критерии которой имеют вид MINSUM, MINMAX и MINMIN. Получена нижняя достижимая оценка радиуса квазиустойчивости такой задачи в случае чебышевской нормы в пространстве возмущающих параметров векторного критерия. Указаны достаточные, а в случае линейных частных критериев и необходимые условия квазиустойчивости задачи.

Библиография: 25 названий.

Под *квазиустойчивостью векторной задачи* дискретной оптимизации, как обычно [1]–[6], будем понимать дискретный аналог свойства полунепрерывности снизу в смысле Хаусдорфа точечно-множественного отображения, которое каждому набору параметров задачи ставит в соответствие искомое множество альтернатив. Поэтому *радиусом квазиустойчивости* такой задачи (по аналогии с радиусом устойчивости скалярной линейной траекторной задачи, впервые введенным в [7]) называется предел таких независимых возмущений параметров задачи, при которых допускается возможность появления новых эффективных (оптимальных в том или ином смысле) альтернатив при сохранении всех старых.

Отметим, что в [1] выведена формула радиуса квазиустойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования, состоящей в поиске множества Парето. Для векторной траекторной задачи с наиболее распространенными в дискретной оптимизации частными критериями MINSUM, MINMAX и MINMIN в [2] указана нижняя достижимая оценка этого радиуса. Аналогичные результаты для векторных траекторных и целочисленных задач лексикографической (последовательной) оптимизации были получены в [3]–[6].

В настоящей заметке рассматривается многокритериальная траекторная задача мажоритарной оптимизации. Приводится нижняя достижимая оценка радиуса квазиустойчивости. Получены достаточные, а в случае линейных критериев и необходимые условия квазиустойчивости задачи. Отметим, что устойчивости мажоритарно эффективного решения векторной линейной траекторной задачи посвящена статья [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, грант №Ф97-266.

1. Основные определения и свойства. Пусть на множестве $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $m > 1$, задана векторная функция $a: E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Эту функцию удобно представлять в виде матрицы $A = [a_{ij}]_{n \times m} \in \mathbb{R}^{nm}$, где $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) = a(e_j)$, $j \in N_m := \{1, 2, \dots, m\}$. Пусть далее на множестве элементов $T \subseteq 2^E \setminus \{\emptyset\}$, $|T| > 1$, называемых *траекториями*, задан векторный критерий

$$f(t, A) = (f_1(t, A), f_2(t, A), \dots, f_n(t, A)) \rightarrow \min_{t \in T},$$

частными критериями которого являются функции трех видов:

$$f_i(t, A) = \sum_{j \in N(t)} a_{ij}, \quad (1)$$

$$f_i(t, A) = \max_{j \in N(t)} a_{ij}, \quad (2)$$

$$f_i(t, A) = \min_{j \in N(t)} a_{ij}, \quad (3)$$

где $N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}$. Отметим, что эти критерии наиболее часто встречаются в задачах дискретной оптимизации. Первый из них называется линейным (MINSUM), второй – критерием “узкого места” (MINMAX), а третий – MINMIN. Обозначим через $I_{\text{SUM}}, I_{\text{MAX}}, I_{\text{MIN}}$ множества тех чисел из N_n , которыми занумерованы соответственно критерии вида MINSUM, MINMAX и MINMIN.

Под *векторной траекторной задачей* $Z^n(A)$, $n \geq 1$, будем понимать задачу нахождения множества *мажоритарно эффективных траекторий* [9]–[12]

$$M^n(A) = \{t \in T : \mu(t) = \emptyset\},$$

где

$$\mu(t) = \left\{ t' \in T : \sum_{i=1}^n \text{sign } \tau_i(t, t', A) > 0 \right\}, \quad \tau_i(t, t', A) = f_i(t, A) - f_i(t', A).$$

Ясно, что в частном случае, когда число критериев $n = 1$, множество мажоритарно эффективных траекторий превращается в множество оптимальных решений $M^1(A)$, где $A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m})$, а наша задача – в скалярную (однокритериальную) траекторную задачу, радиусы различных типов устойчивости которой подробно исследованы В.К. Леонтьевым и Э.Н. Гордеевым (см., например, работы [7], [13], [14] и библиографию в последней).

Легко видеть, что в схему скалярной траекторной задачи вкладываются задачи так называемой комбинаторной оптимизации, в частности, оптимизационные задачи на графах, задачи булева программирования и некоторые задачи теории расписаний (см., например, [13]–[18]).

Нетрудно понять, что всякая мажоритарно эффективная траектория является эффективной, т.е. элементом множества Парето [19]

$$P^n(A) = \{t \in T : \pi(t) = \emptyset\},$$

где

$$\begin{aligned}\pi(t) &= \{t' \in T : \tau(t, t', A) \geq (0)_n, \quad \tau(t, t', A) \neq (0)_n\}, \\ \tau(t, t', A) &= (\tau_1(t, t', A), \tau_2(t, t', A), \dots, \tau_n(t, t', A)), \\ (0)_n &= (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Действительно, если бы мажоритарно эффективная траектория t не принадлежала множеству Парето, то существовала бы траектория $t' \in T$ такая, что

$$\tau(t, t', A) \geq (0)_n, \quad \tau(t, t', A) \neq (0)_n,$$

т.е. $\mu(t) \neq \emptyset$, что противоречит определению мажоритарно эффективной траектории.

Очевидно, что в случае двух критериев ($n = 2$) справедливо равенство

$$M^2(A) = P^2(A).$$

Итак, множества $M^1(A)$ и $M^2(A)$ всегда непусты.

В задачах с числом критериев $n \geq 3$ множество $M^n(A)$ может быть пустым. Отсутствие в некоторых случаях мажоритарно эффективных траекторий можно объяснить тем, что бинарное отношение

$$t \prec t' \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \text{sign } \tau_i(t, t', A) < 0,$$

задающее множество $M^n(A)$, при $n \geq 3$ не всегда транзитивно. С этим обстоятельством связан известный парадокс голосования Борда–Кондорсе [20], [21], относящийся к XVIII веку. Предложенный в 1952 году К. Эрроу (см. [22]) анализ коллективного выбора и индивидуальных оценок стал основанием нового аксиоматического подхода к пониманию и исследованию проблем голосования и механизма принятия общественных решений. Отметим, что история развития теории голосования как науки достаточно подробно изложена в [23].

Легко видеть, что введенное нами бинарное отношение можно трактовать как отношение группового выбора, при котором траектория t “предпочтительней” траектории t' , если t превосходит t' по большему числу критериев, чем t' превосходит t .

В дальнейшем, говоря о задаче $Z^n(A)$, будем считать, что $M^n(A) \neq \emptyset$.

Будем исследовать квазиустойчивость задачи $Z^n(A)$ в случае, когда независимым возмущениям, как обычно [1]–[8], [13], [24], подвергаются все параметры векторного критерия путем прибавления к матрице A возмущающей матрицы.

В пространстве $\mathbb{R}^{nm}$ зададим чебышевскую норму (l_∞), т.е. под нормой матрицы $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ будем понимать число $\|B\| = \max\{|b_{ij}| : (i, j) \in N_n \times N_m\}$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ определим множество *возмущающих матриц*

$$\mathcal{B}(\varepsilon) = \{B \in \mathbb{R}^{nm} : \|B\| < \varepsilon\}.$$

Задачу $Z^n(A + B)$, полученную из исходной задачи $Z^n(A)$ при сложении матриц A и $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, будем называть *возмущенной*.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\gamma_i(t, t', A) &= -\frac{\tau_i(t, t', A)}{\Delta(t, t')}, \quad i \in N_n, \\ \Delta(t, t') &= \begin{cases} |(t \setminus t') \cup (t' \setminus t)|, & \text{если } i \in I_{\text{SUM}}; \\ 2, & \text{если } i \in I_{\text{MAX}} \cup I_{\text{MIN}}. \end{cases}\end{aligned}\tag{4}$$

Очевидно, что $\Delta(t, t') > 0$ при $t \neq t'$.

ЛЕММА. Для любого из частных критериев (1)–(3) справедливо утверждение: если $\gamma_i(t, t', A) > 0$, то для всякого числа φ такого, что $0 < \varphi \leq \gamma_i(t, t', A)$, выполняются неравенства

$$\forall B \in \mathcal{B}(\varphi) \quad (\tau_i(t, t', A + B) < 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \in \mathcal{B}(\varphi)$. Тогда $\|B\| < \gamma := \gamma_i(t, t', A)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $i \in I_{\text{SUM}}$. Тогда

$$\begin{aligned} \tau_i(t, t', B) &= \sum_{j \in N(t \setminus t')} b_{ij} - \sum_{j \in N(t' \setminus t)} b_{ij} \leq \sum_{j \in N((t \setminus t') \cup (t' \setminus t))} |b_{ij}| \\ &\leq \|B\| \Delta(t, t') < \gamma \Delta(t, t'). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом линейности функции $\tau_i(t, t', A)$ и равенства $\tau_i(t, t', A) = -\gamma \Delta(t, t')$ получаем

$$\tau_i(t, t', A + B) = \tau_i(t, t', A) + \tau_i(t, t', B) < 0.$$

Случай 2: $i \in I_{\text{MAX}} \cup I_{\text{MIN}}$. Тогда очевидны неравенства

$$f_i(t, A + B) \leq f_i(t, A) + \|B\|, \quad f_i(t', A + B) \geq f_i(t', A) - \|B\|.$$

Отсюда, учитывая равенство $\tau_i(t, t', A) = -2\gamma$, получаем

$$\tau_i(t, t', A + B) \leq \tau_i(t, t', A) + 2\|B\| < \tau_i(t, t', A) + 2\gamma = 0.$$

Лемма доказана.

По аналогии с [1]–[6] радиусом квазиустойчивости задачи $Z^n(A)$ назовем число

$$\rho^n(A) = \begin{cases} \sup \Omega^n(A), & \text{если } \Omega^n(A) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\Omega^n(A) = \{\varepsilon > 0 : \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon) \ (M^n(A) \subseteq M^n(A + B))\}$.

Если $\Omega^n(A) = \{\varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0\}$, то естественно считать, что радиус $\rho^n(A) = \infty$. Нетрудно понять, что такая ситуация может возникнуть (при любом $n \geq 1$), например, в том случае, когда $T = \{t, t'\}$, $t \subset t'$, $t \neq t'$, все частные критерии имеют вид MINMAX и $M^n(A) = \{t\}$.

Пусть $t \in M^n(A)$, $t' \neq t$. Все числа $\gamma_i(t, t', A)$, $i \in N_n$, упорядочим следующим образом:

$$\gamma_{s_1}(t, t', A) \geq \gamma_{s_2}(t, t', A) \geq \dots \geq \gamma_{s_n}(t, t', A). \quad (5)$$

Далее положим

$$\varphi^n(A) = \min_{t \in M^n(A)} \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \gamma_{s_k}(t, t', A),$$

где $k = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ – целая часть числа $(n+1)/2$. Ясно, что при нашем предположении $n \geq 1$ число $k \geq 1$; кроме того, очевидны неравенства

$$n \leq 2k \leq n+1. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 1. Для радиуса квазиустойчивости задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, с любой комбинацией критериев (1)–(3) справедлива оценка

$$\rho^n(A) \geq \varphi^n(A). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что $\varphi := \varphi^n(A) \geq 0$. Предположим, напротив, что $\varphi < 0$. Тогда найдутся такие траектории $t \in M^n(A)$ и $t' \in T \setminus \{t\}$, что для всякого индекса $i \in \{k, k+1, \dots, n\}$ справедливо неравенство $\gamma_{s_i}(t, t', A) < 0$, т.е. неравенство $\tau_{s_i}(t, t', A) > 0$ (ввиду $\Delta(t, t') > 0$). Отсюда, учитывая неравенства (6) и

$$\sum_{i=1}^{k-1} \text{sign } \tau_i(t, t', A) \geq 1 - k,$$

получаем

$$\sum_{i=1}^n \text{sign } \tau_i(t, t', A) = \sum_{i=1}^{k-1} \text{sign } \tau_{s_i}(t, t', A) + \sum_{i=k}^n \text{sign } \tau_{s_i}(t, t', A) \geq n - 2k + 2 > 0,$$

что противоречит условию $t \in M^n(A)$.

Переходя к доказательству неравенства (7), будем предполагать, что $\varphi > 0$ (в случае, когда $\varphi = 0$, утверждение теоремы очевидно). Тогда для любых двух траекторий $t \in M^n(A)$, $t' \in T \setminus \{t\}$ выполняется неравенство $\gamma_{s_k}(t, t', A) \geq \varphi$. Отсюда для любого индекса $i \in N_k$ следует

$$\gamma_{s_i}(t, t', A) \geq \varphi > 0.$$

Поэтому согласно лемме для всякой матрицы $B \in \mathcal{B}(\varphi)$ справедливы неравенства

$$\forall i \in N_k \quad (\tau_{s_i}(t, t', A + B) < 0).$$

Откуда с учетом неравенств (6) и

$$\sum_{i=k+1}^n \text{sign } \tau_i(t, t', A + B) \leq n - k$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \text{sign } \tau_i(t, t', A + B) &= \sum_{i=1}^k \text{sign } \tau_{s_i}(t, t', A + B) + \sum_{i=k+1}^n \text{sign } \tau_{s_i}(t, t', A + B) \\ &\leq n - 2k \leq 0. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\forall B \in \mathcal{B}(\varphi) \quad (M^n(A) \subseteq M^n(A + B)).$$

Следовательно, верна оценка (7).

Теорема 1 доказана.

Задачу $Z^n(A)$ назовем *линейной*, если $I_{\text{SUM}} = N_n$.

ТЕОРЕМА 2. Для радиуса квазиустойчивости линейной задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, справедлива формула

$$\rho^n(A) = \varphi^n(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что при $I_{\text{SUM}} = N_n$ верно неравенство

$$\rho^n(A) \leq \varphi := \varphi^n(A). \quad (8)$$

Пусть $\varepsilon > \beta > \varphi \geq 0$. Тогда существуют такие траектории $t \in M^n(A)$ и $t' \in T \setminus \{t\}$, что справедливы неравенства

$$\forall i \in \{k, k+1, \dots, n\} \quad (\beta > \gamma_{s_i}(t, t', A)). \quad (9)$$

Если в качестве возмущающей матрицы $B = [b_{ij}]_{n \times m} \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ возьмем матрицу с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} \beta, & \text{если } i \in N_n, j \in N(t \setminus t'), \\ -\beta, & \text{если } i \in N_n, j \in N(t' \setminus t), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

то, учитывая линейность функций $\tau_i(t, t', A)$, равенства (4) и неравенства (9), для любого индекса $i \in \{k, k+1, \dots, n\}$ получаем

$$\begin{aligned} \tau_{s_i}(t, t', A+B) &= \tau_{s_i}(t, t', A) + \tau_{s_i}(t, t', B) = -\gamma_{s_i}(t, t', A)\Delta(t, t') + \beta\Delta(t, t') \\ &= (\beta - \gamma_{s_i}(t, t', A))\Delta(t, t') > 0. \end{aligned}$$

Поэтому с учетом (6) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \text{sign } \tau_i(t, t', A+B) &= \sum_{i=1}^{k-1} \text{sign } \tau_{s_i}(t, t', A+B) + \sum_{i=k}^n \text{sign } \tau_{s_i}(t, t', A+B) \\ &\geq n - 2k + 2 > 0, \end{aligned}$$

т.е. t не является мажоритарно эффективной траекторией возмущенной задачи $Z^n(A+B)$.

Тем самым показано, что для возмущающей матрицы B справедливо соотношение

$$M^n(A) \not\subseteq M^n(A+B).$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > \varphi \quad (\rho_M^n(A) < \varepsilon),$$

т.е. верно неравенство (8).

Теорема 2 доказана.

Поскольку $M^2(A) = P^2(A)$, доказанные теоремы 1 и 2 при $n = 2$ переходят в

СЛЕДСТВИЕ 1. Для радиуса квазистойчивости двухкритериальной задачи $Z^2(A)$ поиска множества Парето $P^2(A)$ с любой комбинацией критериев MINSUM, MINMAX и MINMIN справедлива оценка

$$\rho^2(A) \geq \varphi^2(A) := \min_{\tilde{t} \in M^2(A)} \min_{t \in T \setminus \{\tilde{t}\}} \max_{i \in N_2} \frac{\tau_i(t, \tilde{t}, A)}{\Delta(t, \tilde{t})},$$

причем

$$\rho^2(A) = \varphi^2(A), \quad \text{если } I_{\text{SUM}} = N_2.$$

Заметим, что в [2] этот результат обобщен на произвольное число критериев $n \geq 2$ указанных видов.

Как обычно [1]–[6], задачу $Z^n(A)$ назовем квазистойчивой, если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon) \quad (M^n(A) \subseteq M^n(A + B)),$$

т.е. если $\rho^n(A) > 0$.

Для всякого вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ введем обозначения

$$\xi^-(x) = |\{i \in N_n : x_i < 0\}|, \quad \xi^+(x) = |\{i \in N_n : x_i > 0\}|, \quad \xi^0(x) = |\{i \in N_n : x_i = 0\}|.$$

Как и прежде, будем полагать $k = \lfloor (n + 1)/2 \rfloor$.

Множество $S^n(A)$ строго мажоритарно эффективных траекторий задачи $Z^n(A)$ зададим формулой

$$t \in S^n(A) \iff (t \in T) \& (\forall t' \in T \setminus \{t\} \quad (\xi^-(\tau(t, t', A)) \geq k)).$$

Очевидно, что $S^n(A) \subseteq M^n(A)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для того чтобы задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, была квазистойчивой, достаточно, а в случае, когда задача $Z^n(A)$ линейна, и необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$S^n(A) = M^n(A). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Из равенства (10) ввиду (4) для любых траекторий $t \in M^n(A)$ и $t' \in T \setminus \{t\}$ выводим $\xi^+(\gamma(t, t', A)) \geq k$, где

$$\gamma(t, t', A) = (\gamma_1(t, t', A), \gamma_2(t, t', A), \dots, \gamma_n(t, t', A)).$$

Поэтому, учитывая упорядоченность (5), имеем

$$\forall t \in M^n(A) \quad \forall t' \in T \setminus \{t\} \quad (\gamma_{s_k}(t, t', A) > 0).$$

Следовательно, с учетом теоремы 1 получаем $\rho^n(A) \geq \varphi := \varphi^n(A) > 0$, т.е. задача $Z^n(A)$ квазистойчива.

Необходимость. Пусть $I_{\text{SUM}} = N_n$. Тогда из квазистойчивости задачи $Z^n(A)$ согласно теореме 2 следует $\rho^n(A) = \varphi > 0$.

Поэтому в силу определения числа φ для любых траекторий $t \in M^n(A)$ и $t' \in T \setminus \{t\}$ имеют место неравенства

$$\forall i \in N_k \quad (\gamma_{s_i}(t, t', A) > 0),$$

а следовательно, и неравенства

$$\forall i \in N_k \quad (\tau_{s_i}(t, t', A) < 0).$$

Откуда получаем $\forall t \in M^n(A) \quad \forall t' \in T \setminus \{t\} \quad (\xi^-(\tau(t, t', A)) \geq k)$, т.е. $M^n(A) = S^n(A)$.

Следствие 2 доказано.

Тем самым, справедливо следующее утверждение: векторная линейная траекторная задача с мажоритарным принципом оптимальности квазиустойчива тогда и только тогда, когда всякая мажоритарно эффективная траектория является строго мажоритарно эффективной.

Отметим, что для векторной задачи целочисленного линейного программирования с паретовским принципом оптимальности известен аналогичный результат [24] (см. также [1], [25]): для того чтобы такая задача была квазиустойчивой, необходимо и достаточно, чтобы всякое эффективное (оптимальное по Парето) решение было строго эффективным, т.е. элементом множества Смейла

$$Q^n(A) = \{t \in T : \sigma(t) = \emptyset\},$$

где

$$\sigma(t) = \{t' \in T \setminus \{t\} : f(t) \geq f(t')\}.$$

Так как $S^n(A) \subseteq Q^n(A)$, то из следствия 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Если линейная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, квазиустойчива, то всякая мажоритарно эффективная траектория является строго эффективной, т.е. $M^n(A) \subseteq Q^n(A)$.

Кроме того, из следствия 2 выводим еще два следствия.

СЛЕДСТВИЕ 4. Линейная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, не является квазиустойчивой, если существуют такие две мажоритарно эффективные траектории $t \neq t'$, что

$$\xi^0(\tau(t, t', A)) > 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Если число критериев $n \geq 1$ нечетно, то для того чтобы линейная задача $Z^n(A)$ была квазиустойчивой, необходимо выполнение равенства $|M^n(A)| = 1$.

При $n = 1$ теорема 2, в частности, переходит в следующий сопутствующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 6 [7]. Однокритериальная линейная траекторная задача $Z^1(A)$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда она имеет единственное оптимальное решение. При этом для радиуса квазиустойчивости справедливо соотношение:

$$\rho^1(A) = \min_{t \in M^1(A)} \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \frac{\sum_{j \in N(t' \setminus t)} a_j - \sum_{j \in N(t \setminus t')} a_j}{|(t \setminus t') \cup (t' \setminus t)|},$$

где $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$.

В заключение приведем пример, свидетельствующий о том, что при $I_{\text{SUM}} \neq N_n$ условие (10), вообще говоря, не является необходимым условием квазиустойчивости задачи $Z^n(A)$ и радиус квазиустойчивости может быть больше величины $\varphi^n(A)$.

ПРИМЕР. Пусть $m = 3, n = 3, T = \{t_1, t_2\}, t_1 = \{e_1, e_2\}, t_2 = \{e_2, e_3\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_i(t, A) = \sum_{j \in N(t)} a_{ij} \rightarrow \min_T, \quad i = 1, 2,$$

$$f_3(t, A) = \max_{j \in N(t)} a_{3j} \rightarrow \min_T.$$

Тогда $f(t_1) = (1, 1, 3), f(t_2) = (3, 1, 3), M^3(A) = \{t_1\}, S^3(A) = \emptyset, \varphi^3(A) = 0$. Следовательно, равенство (10) не выполняется. Тем не менее, наша задача квазиустойчива. Действительно, легко видеть, что

$$\forall B \in \mathcal{B}(1) \quad (\tau_3(t_1, t_2, A + B) = 0).$$

Кроме того, по лемме имеем

$$\forall B \in \mathcal{B}(1) \quad (\tau_1(t_1, t_2, A + B) < 0).$$

Поэтому для любой матрицы $B \in \mathcal{B}(1)$ верно неравенство

$$\sum_{i=1}^3 \text{sign } \tau_i(t_1, t_2, A + B) \leq 0.$$

Тогда $\forall B \in \mathcal{B}(1) (M^3(A) \subseteq M^3(A + B))$. Откуда $\rho^3(A) \geq 1 > \varphi^3(A) = 0$, т.е. задача $Z^3(A)$ квазиустойчива.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Емеличев В. А., Подкопаев Д. П. О количественной мере устойчивости векторной задачи целочисленного программирования // ЖВМиМФ. 1998. Т. 38. № 11. С. 1801–1805.
- [2] Емеличев В. А., Кравцов М. К., Подкопаев Д. П. О квазиустойчивости траекторных задач векторной оптимизации // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 1. С. 21–27.
- [3] Емеличев В. А., Бердышева Р. А. О радиусах устойчивости, квазиустойчивости и стабильности векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации // Дискретная математика. 1998. Т. 10. № 1. С. 20–27.
- [4] Бердышева Р. А., Емеличев В. А. Некоторые виды устойчивости комбинаторной задачи лексикографической оптимизации // Изв. вузов. Матем. 1998. № 12. С. 11–21.
- [5] Емеличев В. А., Бердышева Р. А. Об устойчивости и квазиустойчивости траекторной задачи последовательной оптимизации // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43. № 3. С. 41–44.
- [6] Емеличев В. А., Бердышева Р. А. О мере устойчивости задачи целочисленной лексикографической оптимизации // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1999. № 4. С. 119–124.
- [7] Леонтьев В. К. Устойчивость в линейных дискретных задачах // Проблемы кибернетики. 1979. № 35. С. 169–184.
- [8] Emelichev V. A., Stepanishyna Yu. V. Stability of a majority efficient solution of a vector linear trajectorial problem // Computer Sci. J. Moldova. 1999. V. 7. № 3. P. 291–307.
- [9] Миркин Б. Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.

- [10] Шоломов Л. А. Логические методы исследования дискретных моделей выбора. М.: Наука, 1989.
- [11] Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Выбор вариантов: основы теории. М.: Наука, 1990.
- [12] Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
- [13] Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К. Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // ЖВМиМФ. 1996. Т. 36. № 1. С. 66–72.
- [14] Артеменко В. И., Гордеев Э. Н., Журавлев Ю. И. и др. Метод формирования оптимальных программных траекторий перемещения робота-манипулятора // Кибернетика и систем. анализ. 1996. № 5. С. 82–104.
- [15] Емеличев В. А., Кравцов М. К. О неразрешимости векторных задач дискретной оптимизации на системах подмножеств в классе алгоритмов линейной свертки критериев // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 1. С. 9–11.
- [16] Емеличев В. А., Кравцов М. К. О задачах векторной дискретной оптимизации на системах подмножеств, неразрешимых с помощью алгоритма линейной свертки // ЖВМиМФ. 1994. Т. 34. № 7. С. 1082–1094.
- [17] Емеличев В. А., Кравцов М. К. О комбинаторных задачах векторной оптимизации // Дискретная математика. 1995. Т. 7. № 1. С. 3–18.
- [18] Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. N. Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Appl. Math. 1995. V. 58. P. 169–190.
- [19] Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
- [20] Borda J. C. Memoires sur les elections au scrutin. Histoires de l'academi royale des sciences. Paris, 1781.
- [21] Condorcet M. Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des decisions rendues à la pluralité des voix. Paris, 1785.
- [22] Arrow K. J. Social Choice and Individual Values (2nd edition). New York: John Wiley, 1963.
- [23] Вольский В. И., Лезина З. М. Голосование в малых группах: процедуры и методы сравнительного анализа. М.: Наука, 1991.
- [24] Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И. Задачи целочисленного программирования с векторным критерием: параметрический анализ и исследование устойчивости // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 3. С. 527–529.
- [25] Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наукова думка, 1995.