Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Сбродова, Алгоритмическое нахождение собственных существенных поверхностей в трехмерных многообразиях, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 4, 593–597

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4020>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 18:03:53

Алгоритмическое нахождение собственных существенных поверхностей в трехмерных многообразиях

Е. А. Сбродова

В работе построен алгоритм, который по данному компактному ориентируемому неприводимому гранично неприводимому трехмерному многообразию M и данному числу $N \geq 0$ выясняет, содержит ли M существенную ориентируемую поверхность (возможно, с краем), род которой не превосходит N . Алгоритм основан на теории нормальных поверхностей Хакена и на предложенном Джейко приеме оценки средней длины граничных кривых, лежащих в данном многообразии неизвестной существенной поверхности данного рода.

Библиография: 5 названий.

Пусть M — компактное ориентируемое неприводимое гранично неприводимое трехмерное многообразие и $N \geq 0$ — целое число. В работе решается задача алгоритмического нахождения такой собственной существенной ориентируемой поверхности $F \subset M$, что ее род $g(F)$ не превосходит числа N . Напомним, что род ориентируемой поверхности F определяется как род (число ручек) замкнутой поверхности, которая получается из поверхности F заклеиванием дисками всех компонент края. Напомним также, что собственная поверхность $F \subset M$ называется *существенной*, если она несжимаема, гранично несжимаема и отлична от сферы и диска.

Как правило, подобные алгоритмические задачи решаются с помощью стандартного применения метода нормальных поверхностей Хакена [1]. Обычно удается доказать, что если многообразие содержит поверхность интересующего нас типа, то такую поверхность можно найти среди конечного множества так называемых фундаментальных поверхностей или их нормальных удвоений. Таким образом, задача сводится к проверке того, содержит ли это конечное множество поверхность требуемого типа. Так были построены алгоритмы для нахождения существенных дисков и существенных колец [1]–[3].

Разумеется, описанный выше стандартный способ работает не всегда. Одна замечательная идея, которая позволила применить метод Хакена в нестандартной ситуации, описана в работе [4]. В ней был построен алгоритм, который по данному трехмерному многообразию M с торическим краем выясняет, содержит ли оно плоскую существенную поверхность (т.е. существенный диск с дырками). Ключевую роль в построении алгоритма сыграло изобретенное Джейко понятие средней

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант № 03-51-3663) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-96026).

длины граничных кривых. Оказалось, что если поверхность $F \subset M$ существенна, то средняя длина кривых в ∂F не превосходит константы, зависящей только от рассматриваемой триангуляции многообразия и рода поверхности.

Здесь уместно отметить, что построение алгоритма в работе [4] существенно использует ограничение на край многообразия M . Нужно, чтобы он состоял из торов. Как доказано в [5], от этого ограничения можно избавиться.

В настоящей работе результаты работ [4], [5] объединяются и усиливаются в двух направлениях. Во-первых, предлагаемый алгоритм пригоден для нахождения поверхностей произвольного рода (а не только рода 0). Во-вторых, как и в [5], край многообразия может быть любым.

ТЕОРЕМА 1. *Существует алгоритм, который по данному компактному ориентируемому неприводимому гранично неприводимому трехмерному многообразию M и данному числу $N \geq 0$ выясняет, содержит ли M существенную ориентируемую поверхность, род которой не превосходит N .*

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1, сформулируем и докажем некоторые вспомогательные результаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Наклоном на крае трехмерного многообразия M называется набор $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ нетривиальных простых замкнутых кривых на ∂M , которые попарно не пересекаются и не изотопны.*

Будем говорить, что наклон $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ содержится в наклоне $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, если существует изотопия, переводящая объединение $\bigcup_{i=1}^n \alpha_i$ в подмножество объединения $\bigcup_{j=1}^m \beta_j$.

Пусть край собственной поверхности $F \subset M$ состоит из нетривиальных кривых. Определим наклон $[\partial F]$ ее края как такой наклон $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, что ∂F имеет вид $k_1\alpha_1 \cup k_2\alpha_2 \cup \dots \cup k_n\alpha_n$, т.е. состоит из k_1 параллельных копий кривой α_1 , k_2 параллельных копий кривой α_2 и т.д., где числа k_i принимают натуральные значения.

ЛЕММА 1. *Существует алгоритм, который по данному компактному ориентируемому неприводимому гранично неприводимому трехмерному многообразию M , наклону α на ∂M и целому числу $N \geq 0$ выясняет следующее:*

- 1) *содержит ли M такую существенную ориентируемую поверхность F , что $g(F) \leq N$ и $[\partial F] \subset \alpha$;*
- 2) *содержит ли M такую существенную поверхность F , что $\partial F \neq \emptyset$ не пересекает кривых наклона α , $[\partial F] \not\subset \alpha$ и число $\chi(F) + k_\alpha$ неотрицательно; здесь через k_α обозначено число тех компонент края поверхности F , которые изотопны кривым наклона α .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем триангуляцию T_α многообразия M и набор неп пересекающихся симплициальных колец $A_1, A_2, \dots, A_n$ на ∂M так, что каждая кривая α_i лежит внутри кольца A_i и триангуляция каждого кольца устроена таким образом, что все вершины и одно ребро каждого треугольника лежат на крае кольца. Введем граничный узор (т.е. граф) Γ на ∂M , состоящий из объединения $\bigcup_i \partial A_i$. Требуемый алгоритм строится стандартным применением метода нормальных поверхностей Хакена, причем рассматриваются только так называемые чистые поверхности, края которых не пересекают узор. Для удобства будем говорить, что поверхность $F \subset M$

имеет *тип 1* или *тип 2*, если она удовлетворяет условиям соответствующего пункта доказываемой леммы. Допустим, что в M найдется чистая поверхность F типа 1 или 2. За счет перекладки компонент ее края можно добиться, чтобы все компоненты, изотопные кривым наклона α , лежали в кольцах. Более того, можно считать, что F *минимальна*, т.е. что ее пересечение с ребрами триангуляции нельзя уменьшить за счет сохраняющей узор изотопии.

Предположим, что F не фундаментальна, т.е. допускает представление в виде геометрической суммы $F = G_1 + G_2$ двух нормальных поверхностей, которые согласно [2], [3] обязаны быть существенными. Тогда из аддитивности эйлеровой характеристики и числа лежащих в кольцах граничных окружностей следует, что одна из поверхностей G_i , $i = 1, 2$ (либо ее нормальное удвоение, если она неориентируема и F имеет тип 1), имеет тот же тип, что и поверхность F . Это позволяет свести решение вопроса о нахождении поверхности типа 1 или 2 к проверке фундаментальных поверхностей и их нормальных удвоений.

Напомним, что *длиной* нормальной кривой на крае триангулированного трехмерного многообразия M называется число точек пересечения этой кривой с ребрами триангуляции. Мы будем обозначать длину кривой γ через $l(\gamma)$. Идея доказательства теоремы 1 состоит в последовательном построении граничных наклонов так, чтобы для любой существенной ориентируемой поверхности рода не больше N все большее и большее число компонент ее края содержалось хотя бы в одном из них.

ЛЕММА 2. *Существует алгоритм, который по данным на его вход компактно-му ориентируемому неприводимому и гранично неприводимому трехмерному многообразию M , наклону α на ∂M и целому числу $N \geq 0$ либо находит в M существенную ориентируемую поверхность F рода $g(F) \leq N$, либо строит такой конечный (возможно пустой) набор $E(\alpha)$ наклонов на ∂M , что выполнены следующие требования:*

- 1) *любой наклон из $E(\alpha)$ состоит из всех кривых наклона α и еще одной кривой, не изотопной ни одной кривой из α ;*
- 2) *если M содержит такую существенную ориентируемую поверхность F , что $g(F) \leq N$, ∂F не пересекает кривых наклона α и $[\partial F] \not\subset \alpha$, то найдется такой наклон $\beta \in E(\alpha)$, что $[\partial F]$ не пересекает кривых наклона β .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем триангуляцию T_α многообразия M , набор $\{A_i\}$ симплициальных колец и граничный узор $\Gamma = \bigcup_i \partial A_i$ так, как это сделано в доказательстве леммы 1. Пусть F – такая собственная чистая поверхность в M , что все компоненты ее края, изотопные кривым наклона α , лежат в кольцах. Такие компоненты будем называть *внутренними*, все остальные – *внешними*. Обозначим через $k_{\bar{\alpha}}(\partial F)$ и $l_{\bar{\alpha}}(\partial F)$ число внешних компонент и их общую длину. Здесь уместно пояснить геометрический смысл этих чисел: они совпадают с числом и общей длиной компонент края поверхности $\hat{F}$, получающейся заклеиванием дисками всех внутренних компонент края поверхности F . Эйлерову характеристику поверхности $\hat{F}$ обозначим через $\chi_{\bar{\alpha}}(F)$. Искомый алгоритм состоит в выполнении следующих шагов.

Шаг 1. Применяя лемму 1, выясняем, есть ли в M такая существенная поверхность F , что либо F ориентируема, $g(F) \leq N$ и $[\partial F] \subset \alpha$, либо $\partial F \neq \emptyset$ не пересекает

кривых наклона α , $[\partial F] \not\subset \alpha$ и $\chi_{\bar{\alpha}}(F) \geq 0$. Если такая поверхность есть, то мы строим либо ее, либо ее ориентируемое нормальное удвоение, и результат подаем на выход алгоритма.

Шаг 2. Если первый шаг алгоритма не выдает никакой поверхности, то мы делаем следующее. Обозначим через C_α число

$$\max \left\{ \frac{l_{\bar{\alpha}}(\partial F_j)}{-\chi_{\bar{\alpha}}(F_j)} \right\},$$

где максимум берется по всем таким чистым существенным фундаментальным поверхностям $F_j \subset M$, что $-\chi_{\bar{\alpha}}(F_j) > 0$. Если таких поверхностей нет, то полагаем $C_\alpha = 0$.

Шаг 3. Построим в M все нетривиальные чистые кривые, которые не изотопны в M ни одной из кривых наклона α и имеют длину не больше $(2N + 1)C_\alpha$. Таких кривых существует конечное число (с точностью до сохраняющей триангуляцию изотопии). Обозначим эти кривые через γ_p , $1 \leq p \leq m$. Добавляя каждую кривую γ_p к наклону α , получим конечное множество $E(\alpha)$, состоящее из наклонов $\beta_p = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_p\}$, где $1 \leq p \leq m$. Множество $E(\alpha)$ может оказаться и пустым (если, например, нетривиальных нормальных кривых нужной длины просто нет).

Докажем, что для набора $E(\alpha)$ выполнены оба требования леммы. Первое требование выполнено по построению. Пусть поверхность $F \subset M$ удовлетворяет условиям второго требования. Представим ее в виде суммы $F = \sum_j F_j$ фундаментальных поверхностей. Используя аддитивность числа внутренних компонент края и эйлеровой характеристики по отношению к суммированию нормальных поверхностей, а также определение константы C_α , получаем

$$l_{\bar{\alpha}}(\partial F) = \sum_j l_{\bar{\alpha}}(\partial F_j) \leq C_\alpha \sum_j (-\chi_{\bar{\alpha}}(F_j)) = C_\alpha (-\chi_{\bar{\alpha}}(F)).$$

Вместе с соотношениями $\chi_{\bar{\alpha}}(F) + k_{\bar{\alpha}}(\partial F) = 2 - 2g(F)$ и $g(F) \leq N$ это дает оценку средней длины внешних компонент края:

$$\frac{l_{\bar{\alpha}}(\partial F)}{k_{\bar{\alpha}}(\partial F)} \leq \frac{-\chi_{\bar{\alpha}}(F)}{k_{\bar{\alpha}}(\partial F)} C_\alpha = \frac{2g(F) - 2 + k_{\bar{\alpha}}(\partial F)}{k_{\bar{\alpha}}(\partial F)} C_\alpha \leq (2N + 1)C_\alpha.$$

Отсюда следует, что длина хотя бы одной внешней компоненты $\gamma \subset \partial F$ не превосходит $(2N + 1)C_\alpha$. Поэтому она изотопна одной из кривых γ_p и наклон $\beta_p = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_p\} \in E(\alpha)$ является искомым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Будем по очереди строить множества $S_0, S_1, \dots$, элементами которых являются наклоны на ∂M . Каждый наклон из множества S_n должен состоять из n кривых, поэтому S_0 содержит только пустой наклон. Если множество S_i уже построено, то положим $S_{i+1} = \emptyset$ и будем по очереди ко всем наклонам из множества S_i применять алгоритм, изложенный в лемме 2. Для каждого наклона $\alpha \in S_i$ на выходе этого алгоритма мы получим либо поверхность $F \subset M$ с нужными свойствами, либо конечное множество $E(\alpha)$ наклонов. В первом случае процесс закончен, так как искомая поверхность построена. Во втором случае мы включаем множество $E(\alpha)$ в S_{i+1} и переходим к следующему наклону. Как только

все наклоны из множества S_i будут исчерпаны, мы перейдем к наклонам множества S_{i+1} .

Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока это возможно. Так как любой наклон на замкнутой ориентируемой поверхности рода g состоит из не более чем $3g - 2$ кривых, то процесс заведомо остановится. Это может произойти по двум причинам: либо мы найдем существенную ориентируемую поверхность рода не больше N , либо очередное множество S_{i+1} окажется пустым. Из пункта 2 леммы 2 следует, что во втором случае нужных поверхностей в M нет.

Автор благодарит С. В. Матвеева за помощь в написании данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Haken, “Theorie der Normalflächen”, *Acta Math.*, **105**:3–4 (1961), 245–375.
- [2] W. Jaco, U. Oertel, “An algorithm to decide if a 3-manifold is a Haken manifold”, *Topology*, **23**:2 (1984), 195–209.
- [3] S. Matveev, *Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds*, Algorithms and Computation in Mathematics, **9**, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [4] W. Jaco, J. H. Rubinstein, E. Sedgwick, *Finding planar surfaces in knot- and link-manifolds*, [arXiv: math.GT/0608700](https://arxiv.org/abs/math.GT/0608700).
- [5] Е. А. Сбродова, “Плоские поверхности в трехмерных многообразиях”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **3** (2006), 451–463.

Е. А. Сбродова

Челябинский государственный университет,
Институт математики и механики УрО РАН
E-mail: sbrodova@csu.ru

Поступило

05.02.2007