Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Данченко, Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 643–649

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4022>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:13:47

Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$

В. И. Данченко

Предлагается способ аппроксимации аналитических в окрестности точки $z=0$ функций f посредством конечных сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$, где h – фиксированная аналитическая в единичном круге функция, а аппроксимация проводится за счет подбора комплексных чисел $\lambda_k = \lambda_k(f)$. Даются некоторые приложения к численному анализу.

Библиография: 10 названий.

1. Аппроксимация аналитических функций суммами вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$.

1.1. Пусть $h(z)$ – некоторая фиксированная аналитическая в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ функция. Положим

$$H_n(z) = H_n(\{\lambda_k\}; z) = \sum_{k=1}^n \lambda_k h(\lambda_k z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\{\lambda_k\}$ – комплексные числа. Функция $H_n(z)$ определена и аналитична в круге $|z| < \min_{k=1, \dots, n} |\lambda_k|^{-1}$. В заметке рассматривается вопрос о возможности равномерного приближения аналитических в окрестности точки $z = 0$ функций f суммами вида (1) за счет подбора чисел $\lambda_k = \lambda_k(h, f, n)$.

ПРИМЕЧАНИЕ 1. В виде (1) представляются так называемые *наипростейшие дроби*, т.е. рациональные функции вида $\rho_n(z) = \sum_{k=1}^n (z - z_k)^{-1}$, если взять, например, $h(z) = 1/(z - 1)$, $\lambda_k = 1/z_k$. Таким образом, рассматриваемая задача является обобщением аппроксимаций посредством наипростейших дробей. Об аппроксимации наипростейшими дробями см. работы [1]–[6]. Результаты данной заметки анонсированы в работах [7], [8].

1.2. Сформулируем основной результат. Пусть функции

$$h(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots, \quad f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots$$

аналитичны в окрестности точки $z = 0$, причем $h(z)$ аналитична в единичном круге D . Обозначим через $M(f)$ множество всех тех натуральных чисел m , при которых $f_{m-1} \neq 0$. Пусть $h_{m-1} \neq 0$ при $m \in M(f)$. Коэффициенты h_{m-1} с остальными номерами могут быть любыми. Положим $s_m(h, f) = f_{m-1}/h_{m-1}$ при $m \in M(f)$ и $s_m(h, f) = 0$ при $m \notin M(f)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 04-01-00717, 05-01-00962).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $s_m = s_m(h, f)$ и $|s_m| \leq a^m$ при всех натуральных m и некотором $a > 0$. Пусть при каждом фиксированном n числа $\lambda_k = \lambda_k(h, f, n)$ в сумме (1) являются решениями алгебраического уравнения

$$P_n(\lambda) := \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n = 0, \quad (2)$$

где коэффициенты σ_k находятся по рекуррентным формулам (Ньютона)

$$\sigma_1 = s_1, \quad \sigma_m = (-1)^{m+1} m^{-1} \left(s_m + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j s_{m-j} \sigma_j \right), \quad m = 2, \dots, n. \quad (3)$$

Тогда $H_n(z)$ и $f(z)$ определены и аналитичны в круге $|z| < \rho$, где $\rho = (2a)^{-1}$, причем $H_n(z) \rightarrow f(z)$ равномерно в любом круге $|z| \leq (1 - \varepsilon)\rho$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Кроме того,

$$|H_n(z) - f(z)| \leq C(h, \varepsilon) a n \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right)^n, \quad |z| \leq (1 - \varepsilon)\rho. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем натуральное n . Перепишем сумму (1) в виде

$$H_n(z) = h_0 S_1 + h_1 S_2 z + h_2 S_3 z^2 + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} h_{m-1} S_m z^{m-1}, \quad (5)$$

где через S_m обозначены степенные суммы

$$S_m = S_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1^m + \lambda_2^m + \dots + \lambda_n^m, \quad m = 1, 2, \dots. \quad (6)$$

Выберем числа $\lambda_k = \lambda_k(h, f, n)$, $k = 1, \dots, n$, так, чтобы $S_m = s_m$ ($s_m = s_m(h, f)$) при $m = 1, \dots, n$. Для этого по рекуррентным формулам (3) (см., например, [9]) найдем элементарные симметрические многочлены

$$\sigma_m = \sigma_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_m}, \quad m = 1, \dots, n, \quad (7)$$

и тогда числа λ_k определяются как корни уравнения (2) (теорема Виета). Итак, пусть $S_m = s_m$ при $m = 1, \dots, n$. Отсюда, из неравенств $|s_m| \leq a^m$ и из (3) по индукции получаются неравенства $|\sigma_m| \leq a^m$, $m = 1, \dots, n$. Поэтому для многочлена (2) при $|\lambda| > 2a$ получаем

$$\begin{aligned} |P_n(\lambda)| &= |\lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n| \\ &\geq |\lambda|^n \left(1 - \sum_{m=1}^n \frac{|\sigma_m|}{|\lambda|^m} \right) \geq |\lambda|^n \left(1 - \sum_{m=1}^n \frac{a^m}{|\lambda|^m} \right) > |\lambda|^n \frac{|\lambda| - 2a}{|\lambda| - a} > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, все корни $\lambda_k = \lambda_k(h, f, n)$ многочлена P_n лежат в круге $|\lambda| \leq \rho^{-1} = 2a$, так что

$$|S_m| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^m \leq n \rho^{-m}, \quad \rho = \frac{1}{2a}, \quad m \geq n+1. \quad (8)$$

Отсюда и из условия теоремы $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |h_m|^{1/m} \leq 1$, в частности, следует, что $H_n(z)$ определена и аналитична в круге $|z| < \rho$ (см. (5)). Заметим еще, что по условию

$|f_m| \leq |h_m|a^{m+1} = |h_m|(2\rho)^{-m-1}$ и, следовательно, функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < 2\rho$. Далее, из равенств $S_m = s_m$ получаем $h_{m-1}S_m = f_{m-1}$ при $m = 1, \dots, n$, откуда

$$r_n(z) := f(z) - H_n(z) = (f_n - h_n S_{n+1})z^n + (f_{n+1} - h_{n+1} S_{n+2})z^{n+1} + \dots, \quad |z| < \rho. \quad (9)$$

Для оценки $r_n(z)$ учтем (8) и неравенства $|f_m| \leq |h_m|(2\rho)^{-m-1}$. Тогда

$$|r_n(z)| \leq \sum_{m=n}^{\infty} (|f_m| + |h_m|n\rho^{-m-1})|z|^m \leq \rho^{-1}(n+1) \sum_{m=n}^{\infty} |h_m||z\rho^{-1}|^m. \quad (10)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ и $|z| \leq (1 - \varepsilon)\rho$. Тогда $|z| \leq (1 - \varepsilon/2)^2\rho$ и, следовательно,

$$|h_m||z\rho^{-1}|^m \leq |h_m| \left|1 - \frac{\varepsilon}{2}\right|^m \left|1 - \frac{\varepsilon}{2}\right|^m \leq C_1(h, \varepsilon) \left|1 - \frac{\varepsilon}{2}\right|^m, \quad m = n, n+1, \dots$$

Отсюда и из (10) получаем, что величина $|r_n(z)|$ равномерно стремится к нулю в круге $|z| \leq (1 - \varepsilon)\rho$ с указанной в (4) скоростью. Теорема 1 доказана.

1.3. Пусть p – целое неотрицательное число и в некоторой проколотой окрестности точки $z = 0$ имеем сходящиеся ряды

$$h(z) = \sum_{m=-p}^{\infty} h_m z^m, \quad f(z) = \sum_{m=-p}^{\infty} f_m z^m,$$

причем функция $h(z)$ аналитична при $0 < |z| < 1$. Рассмотрим аналогичную предыдущей задачу об аппроксимации функции f суммами

$$H_n(z) = H_n(\{\lambda_k\}, p; z) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{p+1} h(\lambda_k z) = \sum_{m=1}^{\infty} S_m h_{m-p-1} z^{m-p-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где $S_m = S_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – степенные суммы (6). Пусть $h_k \neq 0$, если $f_k \neq 0$ ($k \geq -p$). Положим $s_m = s_m(h, f) = f_{m-p-1}/h_{m-p-1}$ при $f_{m-p-1} \neq 0$ и $s_m = s_m(h, f) = 0$ при $f_{m-p-1} = 0$, $m = 1, 2, \dots$. Из теоремы 1 получается

ТЕОРЕМА 2. Пусть $|s_m| \leq a^m$ при всех натуральных m и некотором $a > 0$. Пусть при каждом фиксированном n числа $\lambda_k = \lambda_k(h, f, n)$ в сумме (11) являются решением (2), (3). Тогда функции $H_n(z)$ и $f(z)$ определены и аналитичны в кольце $0 < |z| < \rho$, где $\rho = (2a)^{-1}$. При этом $H_n(z) \rightarrow f(z)$, $n \rightarrow \infty$, равномерно в любом кольце $0 < |z| \leq (1 - \varepsilon)\rho$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Кроме того, при $n \geq p$ имеет место оценка

$$|H_n(z) - f(z)| \leq C(h, \varepsilon, p) n a^{p+1} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n, \quad 0 < |z| \leq (1 - \varepsilon)\rho. \quad (12)$$

Действительно, в теореме 1 следует взять $z^p h(z)$ вместо $h(z)$ и $z^p f(z)$ вместо $f(z)$. Тогда при $|z| = (1 - \varepsilon)\rho$ оценка (12) получается делением обеих частей (4) на $|z|^p$, а в кольцо $0 < |z| \leq (1 - \varepsilon)\rho$ она распространяется по принципу максимума (в точке $z = 0$ функция $H_n(z) - f(z)$, $n \geq p$, имеет устранимую особенность).

2. Примеры. Приведем примеры аппроксимации в некоторых частных случаях.

2.1. Приведем следующий

ПРИМЕР 1. Рассмотрим аппроксимацию дробями вида

$$\rho_n(p, z) = \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{-p}}{z - z_k}, \quad (13)$$

где p – целое число, $z_k \neq 0$, точки z_k с различными номерами могут совпадать. Отметим, что при $p = 0$ в (13) получаются *наипростейшие дроби* $\rho_n(z) = \rho_n(0, z)$ (см. [1]–[6]). Покажем, что при $p \geq 0$ дробями (13) можно сколь угодно точно приблизить (в любом круге) любой многочлен $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_d z^d$, подбирая соответствующим образом точки z_k . Действительно, запишем (13) в окрестности точки $z = 0$ в виде

$$\rho_n(p, z) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{p+1} h(\lambda_k z) = - \sum_{m=0}^{\infty} S_{p+1+m} z^m, \quad h(z) = \frac{1}{z-1} = - \sum_{m=0}^{\infty} z^m, \quad (14)$$

где $\lambda_k = 1/z_k$, $S_m = S_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – степенные суммы (6). Фиксируем натуральное число N . Применим теорему 2 для аппроксимации многочлена $f(z) = P(z)/N$. В данном случае $|s_m(h, f)| = 0$ при $m \leq p$ и $m \geq d + p + 2$. При остальных номерах

$$|s_m(h, f)| = \left| \frac{c_{m-p-1}}{N} \right| \leq a_N^m,$$

где $a_N = \max\{|c_{m-p-1}/N|^{1/m} : m = p+1, \dots, d+p+1\}$. По теореме 2 существует последовательность функций $\rho_n(p, z)$ такая, что $N\rho_n(p, z) \rightarrow P(z)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно в любом круге $|z| \leq r$ радиуса $r < 1/(2a_N)$ (который можно сделать сколь угодно большим, выбрав N достаточно большим). Осталось заметить, что функции $N\rho_n(p, z)$ также имеют вид (13).

Отсюда получается следующий аналог теоремы С. Н. Мергеляна при аппроксимации дробями вида (13).

ТЕОРЕМА М. Если функция f и компакт $K \subset \mathbb{C}$ удовлетворяют условиям теоремы Мергеляна (т.е. K имеет связное дополнение, а f непрерывна на компакте K и аналитична в его внутренних точках), то $f(z)$ можно сколь угодно точно аппроксимировать на K дробями вида $\rho_n(p, z)$, $p \geq 0$.

С другой стороны, при $p < 0$ такая аппроксимация невозможна. Например, при $p = -1$ константа $f(z) = 1$ не приближается дробями (13). Причину этого легко видеть из схемы аппроксимации. Действительно, при $p \geq 0$ мы можем с помощью множителей λ_k изменять должным образом все коэффициенты при степенях $0, 1, \dots$ разложения (14), а в случае $p = -1$ коэффициент при нулевой степени этого разложения всегда равен $-S_0 = -n$.

ПРИМЕЧАНИЕ 2. В случае наипростейших дробей $\rho_n(z) = \rho_n(0, z)$ теорема М доказана в [1], [5]. В работе Косухина [3] получены некоторые прямые теоремы о скорости приближения наипростейшими дробями $\rho_n(z)$ (аналоги известных теорем Джексона и Уолша). В частности, в [3] показано, что на широком классе функций скорости их наилучших приближений многочленами и наипростейшими дробями

слабо эквивалентны. Бородин и Косухин [4] показали, что каждая непрерывная на действительной оси функция с нулевым значением на бесконечности может быть с любой точностью равномерно приближена наипростейшими дробями.

2.2. Пусть s – произвольное комплексное число, отличное от нуля, и пусть n и $q = 1, \dots, n-1$ – натуральные числа. Пусть числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ таковы, что их степенные суммы $S_m = S_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (см. (6)) удовлетворяют равенствам: $S_q = s$ и $S_m = 0$ при $m \neq q$, $m = 1, \dots, n$. В этом случае, как легко проверить по формулам Ньютона (см. (3)), симметрические многочлены σ_m от чисел λ_k (см. (7)) вычисляются по формулам

$$\sigma_{qk} = (-1)^{(q+1)k} \frac{s^k}{q^k k!}, \quad \sigma_m = 0, \quad m \neq qk,$$

и, следовательно, многочлен с корнями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ записывается в виде

$$P_n(\lambda) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{s^k}{q^k k!} \lambda^{n-qk} = \lambda^n Q_n(\tau), \quad Q_n(\tau) := \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{\tau^k}{k!}, \quad (15)$$

где $N = [n/q]$ – целая часть числа n/q , $\tau = s/q\lambda^q$. Из уравнения $Q_n(\tau) = 0$ определяются корни τ_j , $j = 1, \dots, N$, а затем находятся все отличные от нуля корни λ_k , $k = 1, \dots, qN$, многочлена $P_n(\lambda)$ (по каждому корню $\tau = \tau_j$ находятся q различных значений $\lambda = (s/(q\tau))^{1/q}$). Несложно показать, что корни τ_j удовлетворяют неравенству (соответствующие оценки имеются в [6]) $|\tau_j| \geq N/5$, откуда, учитывая, что $N > -1 + n/q$, находим, что корни λ_k уравнения $P_n(\lambda) = 0$ и их степенные суммы S_m удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} |\lambda_k| &\leq \left(\frac{5|s|}{qN} \right)^{1/q} \leq \left(\frac{5|s|}{n-q} \right)^{1/q}, \quad k = 1, \dots, qN, \\ |S_m| &\leq n \left(\frac{5|s|}{n-q} \right)^{m/q}, \quad m \geq n > q. \end{aligned} \quad (16)$$

2.3. Рассмотрим еще один

ПРИМЕР 2. Приведем схему аппроксимации степеней $f(z) = z^{q-1}$ (q – натуральное число) посредством наипростейших дробей $\rho_n(z) = \rho_n(0, z)$. Пусть $h(z) = 1/(z-1)$, а числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ таковы, что их степенные суммы удовлетворяют равенствам $S_q = -1$, $S_m = 0$, $m \neq q$, $m = 1, \dots, n$, $n > q$. Тогда λ_k являются корнями многочлена $P_n(\lambda)$ из (15) с $s = -1$, и, взяв все эти отличные от нуля корни, будем иметь в некоторой окрестности точки $z = 0$ (см. (15))

$$\begin{aligned} \left| z^{q-1} - \sum_{k=1}^{qN} \frac{1}{z - z_k} \right| &= \left| z^{q-1} - \sum_{k=1}^{qN} \lambda_k h(\lambda_k z) \right| \\ &= \left| \sum_{m=n}^{\infty} S_{m+1} z^m \right| \leq n \sum_{m=n}^{\infty} \left(\frac{5}{n-q} \right)^{(m+1)/q} |z|^m, \end{aligned}$$

где $z_k = 1/\lambda_k$. Таким образом, скорость аппроксимации имеет порядок $o(c_0^n n^{-n/q})$ при $n \rightarrow \infty$, $c_0 < 6$. Отметим, что с ростом n неограниченно увеличивается и область аппроксимации.

2.4. Формулы численного дифференцирования и интегрирования.

ПРИМЕР 3. Пусть $h(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots$ – аналитическая в круге D функция. Применим теорему 1 (в первом случае) для аппроксимации функции $f_1(z) = (zh(z))'$, т.е. при $s_m(h, f_1) = m$, и (во втором случае) для аппроксимации функции $f_2(z) = (1/z) \int_0^z h(t) dt$, т.е. при $s_m(h, f_2) = 1/m$, $m = 1, 2, \dots$. Тогда получим следующие формулы численного дифференцирования и интегрирования функции h :

$$zh'(z) \approx -h(z) + \sum_{k=1}^n \lambda_{1,k} h(\lambda_{1,k} z), \quad \int_0^z h(t) dt \approx z \sum_{k=1}^n \lambda_{2,k} h(\lambda_{2,k} z). \quad (17)$$

Числа $\lambda_{l,k}$, $l = 1, 2$, не зависят от функции $h(z)$ и находятся по формулам (2) и (3), причем в первом случае $s_m = m$, а во втором случае $s_m = 1/m$. Области применения формул (17) и их погрешности оцениваются по (4): в первом случае эта область содержит круг $|z| < 1/4$ ($a = 1$), а во втором – $|z| < 1/2$ ($a = 2$). Многочлены $P_{l,n}$, $l = 1, 2$, корнями которых являются числа $\lambda_{l,k}$, можно вычислять по следующей схеме (см. (3)). Пусть $P_{l,0} = 1$, $v_{l,1} = -1$, $l = 1, 2$. Тогда при $k = 1, 2, \dots$ и $l = 1, 2$ имеем

$$P_{l,k} = \lambda P_{l,k-1} + v_{l,k}, \quad v_{1,k} = -1 - \sum_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{k}\right) v_{1,j}, \quad v_{2,k} = -\frac{1}{k^2} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{v_{2,j}}{k(k-j)}.$$

Отметим, что формулы (17) точны на многочленах h степени $\leq n - 1$.

ПРИМЕР 4. Фиксируем натуральное q . При $n > q + 5$ через λ_k , $k = 1, \dots, qN$, обозначим отличные от нуля корни многочлена $P_n(\lambda)$ из (15) при $s = 1$. Тогда для любой аналитической в некотором круге $|z| < r$ функции $h(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots$ имеем

$$\frac{h^{(q-1)}(0)}{(q-1)!} z^{q-1} = \sum_{k=1}^{qN} \lambda_k h(\lambda_k z) + \varepsilon(n, q, z),$$

$$|\varepsilon(n, q, z)| \leq n \sum_{m=n}^{\infty} \left(\frac{5}{n-q}\right)^{(m+1)/q} |h_m| |z|^m,$$

где $|z| < r$. Таким образом, $|\varepsilon(n, q, z)| < (6/n)^{n/q}$ при $n \geq n_0(h, q)$.

Действительно, в данном случае $S_q = 1$ и $S_m = 0$ при $m \neq q$, $m = 1, \dots, n$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k h(\lambda_k z) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m S_{m+1} z^m = h_{q-1} z^{q-1} + \sum_{m=n}^{\infty} h_m S_{m+1} z^m$$

(см. (5), (9)), причем S_m при $m \geq n + 1$ удовлетворяет неравенству (16), откуда и следуют нужные соотношения.

ПРИМЕЧАНИЕ 3. В работе [10] Фрянцев обобщил схему аппроксимации из примера 4 и получил следующую формулу численного дифференцирования:

$$\sum_{s=1}^q p_s \frac{h^{(q-s)}(0)}{(q-s)!} z^{q-s} \approx \sum_{k=1}^{Nq} P(\lambda_k) \cdot h(\lambda_k z),$$

где $P(\lambda) = \sum_{s=1}^q p_s \lambda^s$ – произвольный фиксированный многочлен, $p_q \neq 0$, а числа λ_k определяются как в примере 4. В [10] указано также, что абсолютная погрешность этой формулы имеет порядок $o((c/n)^{n/q})$ ($c = \text{const} > 0$) при $n \rightarrow \infty$.

ПРИМЕР 5. Для любой аналитической в некотором круге $|z - z_0| \leq r$ функции f с единичной в этом круге $\sup$ -нормой имеем

$$f'(z_0) = -nf(z_0) + \sum_{k=1}^n f(z_0 + \tau_k) + \varepsilon(z_0, n), \quad |\varepsilon(z_0, n)| \leq 5n \left(\frac{5}{nr} \right)^n, \quad (18)$$

где $n \geq 6/r$, τ_k – корни уравнения $Q_n(1/\tau) = 0$ (см. (15)); все точки $z_0 + \tau_k$ лежат в круге $|z - z_0| < r$.

Сначала аппроксимируем функцию $J(z) = (z - z_0)^{-2} + n(z - z_0)^{-1}$ суммами (1), где $h(z) = (z - 1)^{-1}$, $\lambda_k = (z_0 + \tau_k)^{-1}$. В данном случае для степенных сумм $S_m = S_m(\tau_1, \dots, \tau_n)$ вида (6) имеем $S_1 = 1$, $S_m = 0$, $m = 2, \dots, n$, так что (см. (16)) $N = n$ и $|\tau_k| \leq 5/n$, $|S_m| \leq n(5/n)^m$ при $m \geq n + 1$. Следовательно, при $|z - z_0| = r$ и $n \geq 6/r$ имеем

$$|J(z) - H_n(z)| = \left| J(z) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_0 - \tau_k} \right| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{S_m}{(z - z_0)^{m+1}} \right| \leq \left(\frac{5}{nr} \right)^n \frac{5n}{r}.$$

Отсюда, интегрируя функцию $(2\pi i)^{-1} f(z)(J(z) - H_n(z))$ по окружности $|z - z_0| = r$, получаем (18). Другим способом формула (18) получена в [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, “О равномерном приближении логарифмическими производными многочленов”, *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы*, Материалы школы-конференции, посвященной 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова (Казань, 13.09–18.09, 1999), Казань, 74–77.
- [2] Е. П. Долженко, “Наипростейшие дроби”, *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы*, Материалы V Казанской международной летней школы-конференции (Казань, 04.06–04.07, 2001), Казань, 90–94.
- [3] О. Н. Косухин, “Об аппроксимативных свойствах наипростейших дробей”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, № 4, 54–59.
- [4] П. А. Бородин, О. Н. Косухин, “О приближении наипростейшими дробями на действительной оси”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 1, 3–8.
- [5] В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, “О приближении наипростейшими дробями”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 553–559.
- [6] В. И. Данченко, “Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы”, *Матем. сб.*, **197**:4 (2006), 33–52.
- [7] В. И. Данченко, “Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ ”, Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 2006, 86–88.
- [8] В. И. Данченко, “Об аппроксимации суммами вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ ”, Третья Петрозаводская Международная конференция по теории функций комплексного переменного, посвященная 100-летию Г. М. Голузина, 18–20.
- [9] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, Физматлит, М., 1963.
- [10] А. В. Фрянецев, “О численной аппроксимации дифференциальных полиномов”, *Современные методы теории функций и смежные проблемы*, Труды Воронежской зимней математической школы (27.01–2.02, 2007), Изд-во Воронеж. ун-та, Воронеж, 233–234.

В. И. Данченко

Владимирский государственный университет

E-mail: danch@vpti.vladimir.ru

Поступило

05.02.2007