Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Стабилизация локально минимальных деревьев, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 4, 512–524

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4023>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:03:01

Стабилизация локально минимальных деревьев

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

В данной работе доказано, что каждое локально минимальное дерево в евклидовом пространстве можно “стабилизировать”, т.е. его можно превратить в кратчайшее, добавляя новые граничные вершины, но не меняя исходное дерево как подмножество пространства. Этот результат полезен при построении примеров кратчайших деревьев.

Библиография: 2 названия.

1. Введение. Классическая проблема Штейнера состоит в описании кратчайших связанных плоских графов, соединяющих заданные конечные наборы точек плоскости. Одной из наглядных интерпретаций этой проблемы является задача о проектировании сети дорог, соединяющей выбранные города, причем так, чтобы затраты на строительство сети были бы наименьшими. В предположении, что затраты пропорциональны суммарной длине всех построенных дорог, получаем задачу, эквивалентную проблеме Штейнера. Сети, являющиеся решениями проблемы Штейнера, обязаны быть плоскими деревьями, и их традиционно называют *минимальными деревьями Штейнера*. Мы же, для краткости, и в силу некоторых исторических обстоятельств, см. [1], будем называть эти сети просто *кратчайшими деревьями*.

Кратчайшие деревья устроены достаточно просто, а именно, они состоят из отрезков, пересекающихся лишь в вершинах, причем под углами не меньшими 120° (точное описание локального устройства таких сетей см. в утверждении 6). Отметим, что деревья, устроенные локально как в утверждении 6, не обязаны быть кратчайшими в целом, хотя достаточно малые окрестности каждой их точки представляют собой кратчайшие деревья. В силу этого обстоятельства такие деревья называют *локально минимальными*.

Строить примеры локально минимальных деревьев легко: достаточно проводить отрезки под нужными углами. Однако понять, является ли нарисованное локально минимальное дерево кратчайшим, достаточно сложно. Хотя последняя задача алгоритмически разрешима, время, затраченное на ее решение, даже для деревьев с маленьким числом вершин, может оказаться очень большим, см. [1]. Отметим, что часто, при исследовании общих свойств кратчайших деревьев, бывает необходимо понять, существуют ли такие деревья с теми или иными специальными свойствами. Одной из таких задач и посвящена настоящая статья. А именно, требуется

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00648), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-660.2008.1) и программы Министерства образования и науки РФ (грант № РНП 2.1.1.3704).

выяснить, можно ли, не меняя локально минимальное дерево как подмножества плоскости, превратить его в кратчайшее? Оказывается, что ответ положительный, если модификацию дерева проводить с помощью подразбиения его ребер граничными вершинами. Процесс перехода от локально минимального дерева к кратчайшему с помощью описанной выше операции мы называем *стабилизацией*, что и объясняет название статьи. Таким образом, в настоящей статье мы докажем следующий результат, имеющий место не только на плоскости, но и в евклидовом пространстве произвольной размерности: *всякое локально минимальное дерево может быть стабилизировано, т.е. подразбито граничными вершинами так, чтобы результирующее дерево стало кратчайшим.*

2. Бинарные деревья. В этом пункте мы приведем и докажем результаты из теории графов, играющие важную роль при доказательстве основной теоремы. Дерево, степени вершин которого равны или 1, или 3, будем называть *бинарным*. Отбрасывая тривиальные случаи графа с одной вершиной и дерева с единственным ребром, в дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать только бинарные деревья с тремя и более вершинами степени 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть G – бинарное дерево с n вершинами степени 1. Тогда

- 1) для каждой вершины v степени 1 дерева G кратчайший по числу ребер путь, соединяющий v с множеством других вершин степени 1, состоит не более чем из $\log_2(2n - 2)$ ребер;
- 2) для каждой вершины v степени 1 дерева G существуют по крайней мере два пути, соединяющие v с множеством других вершин степени 1, каждый из которых состоит не более чем из $\log_2(4n - 8)$ ребер;
- 3) для каждой вершины v степени 3 дерева G кратчайший по числу ребер путь, соединяющий v с множеством вершин степени 1, состоит не более чем из $\log_2(2n/3)$ ребер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала первую оценку. Рассмотрим бесконечное корневое бинарное дерево $\mathcal{G}$ с корнем r степени 1. Вершины дерева $\mathcal{G}$ естественным образом разбиты на уровни, которые мы занумеруем, начав с нуля, соответствующего корневому уровню $\{r\}$. Тогда на k -м уровне дерева $\mathcal{G}$, $k \geq 1$, расположено 2^{k-1} вершин и длина пути от каждой вершины этого уровня до вершины r равна k . Вложим G в бесконечное бинарное дерево $\mathcal{G}$ так, чтобы v перешла в r . Ясно, что если k – длина кратчайшего (по числу ребер) пути от v до множества других вершин степени 1 дерева G , то весь k -й уровень дерева $\mathcal{G}$ содержится в образе G , поэтому $n - 1 \geq 2^{k-1}$, откуда $k \leq \log_2(2n - 2)$.

Вторая оценка получается из первой так. Пусть кратчайший путь, соединяющий вершину v с множеством остальных вершин степени 1, состоит из k ребер и приходит в вершину v' , а следующий по длине такой путь состоит из $p \geq k$ ребер. Тогда образ дерева G в $\mathcal{G}$ содержит вершину w' из k -го уровня дерева $\mathcal{G}$, соответствующую v' , а также все вершины p -го уровня, за исключением 2^{p-k} вершин-потомков вершины w' , откуда

$$n - 1 \geq 1 + 2^{p-1} - 2^{p-k} \geq 1 + 2^{p-1} - 2^{p-2} = 1 + 2^{p-2},$$

поэтому $p \leq \log_2(4n - 8)$.

Перейдем теперь к третьей оценке. Рассмотрим теперь бесконечное бинарное дерево $\mathcal{G}$ с корнем c степени 3. Как и выше, вершины дерева $\mathcal{G}$ естественным образом разбиты на уровни, которые мы занумеруем, начав с нуля, соответствующего уровню $\{c\}$. Тогда на k -м уровне дерева $\mathcal{G}$, $k \geq 1$, расположено $3 \cdot 2^{k-1}$ вершин и длина пути от каждой вершины этого уровня до вершины c равна k . Вложим G в бесконечное бинарное дерево $\mathcal{G}$ так, чтобы v перешла в c . Ясно, что если k – длина кратчайшего (по числу ребер) пути от v до множества граничных вершин дерева G , то весь k -й уровень дерева $\mathcal{G}$ содержится в образе G , поэтому $n \geq 3 \cdot 2^{k-1}$, откуда $k \leq \log_2(2n/3)$. Утверждение доказано.

3. Сети в метрических пространствах. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, V – конечное подмножество X и E – подмножество семейства двухэлементных подмножеств из V . Пара $G = (V, E)$ называется *графом на пространстве X* , а V и E – соответственно множествами *вершин* и *ребер* графа G . Часто, чтобы подчеркнуть принадлежность множеств вершин и ребер графу G , мы будем обозначать эти множества через V_G и E_G . Ребра $\{v, w\} \in E$, как обычно для краткости, будем обозначать через vw . *Длиной ребра $vw \in E$ графа G* называется число $\rho(vw) = \rho(v, w)$, а *длиной $\rho(G)$ графа G* – сумма длин всех его ребер.

Так как определенный выше граф на метрическом пространстве с точки зрения теории графов является простым графом, у которого множество вершин обладает дополнительными свойствами (как набор точек метрического пространства), мы в дальнейшем будем пользоваться терминологией и результатами теории графов, см. [2]. Связный граф на X называется *сетью*.

Будем говорить, что сеть G *затягивает* конечное подмножество M из X , если $V_G = M$, и *соединяет* M , если $M \subset V_G$. Кратчайший граф, затягивающий M , является деревом, которое называется *минимальным остовным*. Точная нижняя грань длин всех сетей, соединяющих M , обозначается через $\text{smt}(M)$. Если существует соединяющая M сеть G , для которой $\rho(G) = \text{smt}(M)$, то G является деревом, которое называется *минимальным деревом Штейнера* или *кратчайшим деревом*. В любом случае, число $\text{smt}(M)$ называется *длиной минимального дерева Штейнера*. Множество всех кратчайших деревьев, соединяющих M , обозначим через $\text{SMT}(M)$. Кроме того, говоря о минимальном остовном дереве или кратчайшей сети G на M , само множество M будем называть *граничным* и обозначать через ∂G . Более того, мы будем рассматривать сети, у которых фиксированы некоторые подмножества M множеств вершин. Такие подмножества также будем называть *граничными* или просто *границами*. Вершины, принадлежащие границе, будем называть *граничными*, а не принадлежащие – *внутренними* или *подвижными*.

Отметим, что у каждого кратчайшего дерева все вершины степени 1 граничные, а каждую внутреннюю вершину v степени 2 можно исключить, заменив инцидентные ей ребра на одно ребро, соединяющее отличные от v инцидентные этим ребрам вершины. Заметим, что при этой перестройке кратчайшее дерево остается таковым. Поэтому, в дальнейшем мы будем предполагать, что *все вершины степени 1 и 2 являются граничными*, как для кратчайшего дерева, так и для любого другого.

Пусть G – произвольное дерево с границей ∂G . Разрежем дерево G по всем граничным вершинам степени больше 1, т.е. перестанем считать ребра, инцидентные таким вершинам, смежными (при этом вершина заменяется на ее копии в количестве, равном степени вершины; эти копии будем по-прежнему считать граничными

вершинами). Полученные в результате связные компоненты являются деревьями, у которых множества граничных вершин совпадают с множествами их вершин степени 1. Такие деревья будем называть *невыврожденными компонентами* исходного дерева G .

Пусть G – произвольное дерево в метрическом пространстве $(\mathbb{X}, \rho)$ и M – его граница. Выбрасывание произвольного ребра e из дерева G порождает разбиение $\mathcal{P}_G(e)$ граничного множества M на два подмножества, являющихся пересечением связных компонент леса $G \setminus e = (V_G, E_G \setminus \{e\})$ и M . Расстояние между этими подмножествами обозначим через $d_G(e)$. Заметим, что в силу сделанных выше предположений, граница M содержит все вершины степени 1 и 2, поэтому разбиения, порожденные разными ребрами дерева G , различны.

Пусть M – произвольное подмножество метрического пространства с функцией расстояния ρ . Положим

$$D(M) = \sup\{\rho(M_1, M_2) \mid M = M_1 \sqcup M_2, M_i \neq \emptyset\}$$

и назовем полученную величину *разреженностью* множества M .

В оставшейся части этого пункта M обозначает произвольное конечное подмножество метрического пространства $(\mathbb{X}, \rho)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть G – произвольная сеть, затягивающая M , причем все ее ребра не длиннее, чем ε . Тогда $D(M) \leq \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = M_1 \sqcup M_2$ – произвольное разбиение M на непустые подмножества M_i . Тогда в силу связности G в нем существует ребро, соединяющее вершины из M_1 и M_2 , поэтому $\rho(M_1, M_2)$ не больше длины этого ребра и, значит, не превосходит ε . Доказательство закончено.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $G \in \text{SMT}(M)$. Тогда для любого $e \in E_G$ имеем $\rho(e) \leq d_G(e)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если расстояние $d_G(e)$ реализуется на паре точек m и m' из M , то или $mm' \in E_G$, и тогда $\rho(e) = d_G(e)$ или граф $G \cup mm'$ содержит цикл, причем в этот цикл входят как ребро e , так и ребро mm' , откуда в силу минимальности G имеем $\rho(e) \leq \rho(mm') = d_G(e)$, что и требовалось.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $M = M_1 \sqcup M_2$ – разбиение на непустые подмножества. Предположим, что $D(M_i) \leq \varepsilon$, $i = 1, 2$, для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда каждое дерево $G \in \text{SMT}(M)$ содержит не более одного ребра e , для которого $\rho(e) > \varepsilon$. Более того, если такое ребро e существует, то $\mathcal{P}_G(e) = \{M_1, M_2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = M'_1 \sqcup M'_2$ – некоторое разбиение множества M на непустые подмножества, отличное от исходного, т.е. $\{M_1, M_2\} \neq \{M'_1, M'_2\}$. Тогда $\rho(M'_1, M'_2) \leq \varepsilon$. Действительно, для одного из $i = 1, 2$ оба множества $A_j = M'_j \cap M_i$, $j = 1, 2$, не пусты и $M_i = A_1 \sqcup A_2$, поэтому $\rho(M'_1, M'_2) \leq \rho(A_1, A_2) \leq \varepsilon$. Пусть теперь e – произвольное ребро дерева G . Но в силу утверждения 3 имеем $\rho(e) \leq d_G(e)$. Поэтому, если $\mathcal{P}_G(e)$ не совпадает с исходным разбиением, то $\rho(e) \leq \varepsilon$, что и требовалось.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть $M = M_1 \sqcup M_2$ – разбиение конечного подмножества метрического пространства, причем M состоит из n точек. Предположим, что

$D(M_i) \leq \varepsilon$, $i = 1, 2$, для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда если

$$\rho(M_1, M_2) > \varepsilon \log_2 \frac{8n^2}{9},$$

то каждое дерево $G \in \text{SMT}(M)$ содержит, причем ровно одно, ребро e , для которого $\rho(e) > \varepsilon$. Тем самым, каждое дерево $G \in \text{SMT}(M)$ содержит такое ребро e , что

$$\mathcal{P}_G(e) = \{M_1, M_2\} \quad \text{и} \quad \rho(e) \geq \rho(M_1, M_2) - \varepsilon \log_2 \frac{4n^2}{9} > \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, а именно, пусть все ребра дерева G имеют длину не больше, чем ε . Пусть s – произвольная внутренняя вершина дерева G и G' – невырожденная компонента дерева G , содержащая s . Тогда в силу утверждения 1 наименьший по количеству ребер путь γ из s в граничные вершины дерева G' состоит не более чем из $\log_2(2n/3)$ ребер и, поэтому, расстояние от s до множества M_i , содержащего граничную вершину пути γ , не превосходит $\varepsilon \log_2(2n/3)$.

Отнесем внутреннюю вершину s к множеству S_i , если расстояние от s до M_i не превосходит $\varepsilon \log_2(2n/3)$. В силу сделанного предположения расстояние между множествами M_1 и M_2 больше, чем

$$\varepsilon \log_2 \frac{8n^2}{9} = \varepsilon \left(\log_2 \frac{2n}{3} + \log_2 \frac{2n}{3} + 1 \right),$$

поэтому S_1 и S_2 не пересекаются, образуя тем самым разбиение множества S всех внутренних вершин дерева G .

Положим $M'_i = S_i \cup M_i$, $i = 1, 2$. В силу доказанного выше $\{M'_1, M'_2\}$ – разбиение множества V_G . Покажем, что $\rho(M'_1, M'_2) > \varepsilon$. Действительно, пусть $\rho(M'_1, M'_2) = \rho(p_1, p_2)$, $p_i \in M'_i$. Тогда

$$\varepsilon \log_2 \frac{8n^2}{9} < \rho(M_1, M_2) \leq \rho(M_1, p_1) + \rho(p_1, p_2) + \rho(p_2, M_2) \leq 2\varepsilon \log_2 \frac{2n}{3} + \rho(p_1, p_2),$$

откуда $\rho(M'_1, M'_2) = \rho(p_1, p_2) > \varepsilon$. С другой стороны, в силу связности G в нем найдется ребро, соединяющее вершины из M'_1 и M'_2 . Длина такого ребра не меньше, чем $\rho(M'_1, M'_2)$, и поэтому больше, чем ε , и мы получаем противоречие с предположением о том, что длины всех ребер не превосходят ε .

4. Сети в римановых многообразиях. Стабилизация. Пусть W – связное риманово многообразие и G – произвольная сеть в W . Представим каждое ребро $\{v, w\}$ из G произвольной непрерывной кривой, соединяющей v и w . Полученный объект назовем *оснащенной сетью типа G* , а сами непрерывные кривые, представляющие ребра из G , – *ребрами оснащенной сети*. Если все ребра оснащенной сети – спрямляемые (гладкие, регулярные) кривые, то оснащенную сеть назовем *спрямляемой (гладкой, регулярной)*. Оснащенную сеть назовем *вложенной*, если все ее ребра – вложенные кривые, причем смежные ребра пересекаются только по общей вершине, а несмежные ребра не пересекаются. *Длиной спрямляемой оснащенной сети* назовем сумму длин всех ее ребер.

Напомним, что каждое связное риманово многообразие W превращается в метрическое пространство (W, ρ) , если определить расстояние $\rho(A, B)$ между его точками A и B равным точной нижней грани длин гладких кривых, соединяющих эти

точки. Если многообразие W полное, то каждая пара его точек соединяется кратчайшей кривой, реализующей расстояние между этими точками. Такие кривые называются *кратчайшими геодезическими*. Оснащенную сеть назовем *геодезической сетью*, если все ее ребра – кратчайшие геодезические. Кроме того, геодезическую сеть типа G назовем *геометрической реализацией сети G* . По определению как длины ребер, так и длина самой сети G совпадают с соответствующими длинами каждой геометрической реализации сети G .

Имеет место следующий результат, описывающий локальную структуру геометрических реализаций кратчайших деревьев, см. [1].

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть Γ – геометрическая реализация кратчайшего дерева на полном связном римановом многообразии, тогда Γ – вложенная геодезическая сеть, у которой ребра стыкуются под углами не меньшими 120° . Кроме того, все вершины степени 1 из Γ являются граничными, а в каждой внутренней вершине степени 2 ребра стыкуются под углом 180° .

Утверждение 6 гарантирует, что у кратчайших деревьев на римановых многообразиях степени вершин не превосходят 3, причем у геометрических реализаций в каждой вершине степени 3, как во внутренней, так и в граничной, векторы скоростей выходящих ребер лежат в одной двумерной плоскости и составляют друг с другом равные углы величины 120° . Вершины степени 2 могут быть как граничными (в них углы между выходящими ребрами не меньше 120°), так и внутренними (углы равны 180°). Отметим, что если исключить внутреннюю вершину степени 2 из множества вершин, рассматривая при этом два входящих в нее ребра как одно, более длинное, то перестроенное таким образом кратчайшее дерево вновь останется кратчайшим. Однако если такую операцию проделать с граничной вершиной степени 2, даже при условии, что входящие в нее ребра образуют угол величины 180° , полученное в результате дерево может перестать быть кратчайшим, хотя локальное устройство его геометрической реализации вновь будет описываться утверждением 6. Геодезическая сеть (не обязательно дерево) называется *локально минимальной*, если ее локальное устройство подчиняется утверждению 6.

С другой стороны, подразбиение вложенной локально минимальной сети граничной вершиной (степени 2) иногда приводит к кратчайшей сети (стабилизирует сеть). Последнее является мотивацией следующего определения.

Пусть Γ – произвольная геодезическая сеть на римановом многообразии W , $\partial\Gamma = M$. Будем говорить, что Γ имеет стабилизацию, если существует такое подразбиение ее ребер конечным множеством P точек многообразия W , что полученная в результате геодезическая сеть Γ_P с границей $M \sqcup P$ является кратчайшим деревом. В этом случае сеть Γ_P будем называть *стабилизацией сети Γ* . Из утверждения 6 вытекает, что каждая геодезическая сеть, имеющая стабилизацию, является вложенным локально минимальным деревом. Основная цель данной работы – показать, что в случае, когда объемлющее многообразие – стандартное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, верно и обратное, а именно, каждое вложенное локально минимальное дерево имеет стабилизацию. Сети в конечномерном евклидовом пространстве будем называть *евклидовыми*.

Отметим, что если некоторая геодезическая сеть Γ имеет стабилизацию, то и любая сеть, полученная из Γ подразбиением ребер граничными вершинами и добавлением к множеству $\partial\Gamma$ некоторых подвижных вершин сети, также имеет ста-

билизацию, так как эти операции сохраняют свойство сети быть кратчайшей (для расширенной границы). Отсюда, в частности, вытекает, что достаточно доказать возможность стабилизации для локально минимальных сетей без граничных вершин степени 3, а также без граничных вершин степени 2, в которых ребра стыкуются под углами в 180° .

5. Стабилизация евклидовых сетей. В данном пункте изучаются сети в конечномерном евклидовом пространстве. Наша цель – доказать, что любое вложенное евклидово локально минимальное дерево имеет стабилизацию.

Назовем кривую $\gamma: [a_1, a_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ *хорошей*, если любой треугольник, построенный на трех ее последовательных точках, имеет в средней вершине угол больше, чем $\pi/2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть $\gamma: [a_1, a_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – хорошая кривая и $a_1 < t_1 < t_2 < a_2$. Тогда

$$\rho(\gamma([a_1, t_1]), \gamma([t_2, a_2])) = \rho(\gamma(t_1), \gamma(t_2)).$$

Пусть $\gamma: [a_1, a_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – регулярная кривая. Тогда существует такое $\delta > 0$, что для каждой точки t_0 ограничение кривой γ на любой отрезок $[t_1, t_2]$, где $t_0 - \delta < t_1 < t_0 < t_2 < t_0 + \delta$, является хорошей кривой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение непосредственно вытекает из определения хорошей кривой. Действительно, если расстояние между отрезками $\gamma([a_1, t_1])$ и $\gamma([t_2, a_2])$ достигается в точках $\gamma(\tau_1)$ и $\gamma(\tau_2)$, $\tau_1 \in [a_1, t_1]$, $\tau_2 \in [t_2, a_2]$, и хотя бы одно из τ_i отлично от t_i , то, рассматривая тупоугольный треугольник $\gamma(\tau_1)$, $\gamma(t_i)$, $\gamma(\tau_2)$ с тупым углом в вершине $\gamma(t_i)$, получаем противоречие.

Далее, из регулярности кривой γ вытекает, что вектор скорости γ' равномерно непрерывен на отрезке $[a_1, a_2]$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ , что $|t_1 - t_2| < \delta$ влечет $\|\gamma'(t_1) - \gamma'(t_2)\| < \varepsilon$ и угол между касательной к γ в точке $\gamma(t_1)$ и хордой $\gamma(t_1)\gamma(t_2)$ также меньше ε . Поэтому δ можно выбрать столь малым, чтобы углы каждой ломаной, вписанной в отрезок $\gamma([t_1, t_2])$, были сколь угодно близки к π , в частности, были бы все больше $\pi/2$. Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Пусть Γ – вложенная регулярная сеть в римановом многообразии W и $\gamma: [a_1, a_2] \rightarrow W$ – произвольное ее ребро. Пусть Γ_1 и Γ_2 – связные компоненты в $\Gamma \setminus \gamma$, причем $\gamma(a_i) \in \Gamma_i$. Тогда для каждого $t_0 \in (a_1, a_2)$ существует $\delta > 0$ такое, что $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset (a_1, a_2)$ и для любых t_1 и t_2 , $t_0 - \delta < t_1 < t_0 < t_2 < t_0 + \delta$, выполняется

$$\rho(\Gamma_1 \cup \gamma([a_1, t_1]), \Gamma_2 \cup \gamma([t_2, a_2])) = \rho(\gamma(t_1), \gamma(t_2)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ребро γ и выберем δ таким, как в утверждении 7. Положим

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma([a_1, t_0]), & \gamma_2 &= \gamma([t_0, a_2]), \\ r_i &= \rho(\Gamma_i \cup \gamma_i, \Gamma_j), & \{i, j\} &= \{1, 2\}, & r &= \min\{r_1, r_2\}. \end{aligned}$$

Пусть δ_1 таково, что $\gamma([t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1])$ содержится в открытом круге $U(\gamma(t_0), r/2)$ с центром в $\gamma(t_0)$ и радиусом $r/2$. Переопределим δ , положив его равным $\min\{\delta, \delta_1\}$, и выберем t_i в соответствии с условием утверждения. Положим также

$$\tilde{\gamma}_1 = \gamma([a_1, t_1]) \quad \text{и} \quad \tilde{\gamma}_2 = \gamma([t_2, a_2]).$$

Пусть $P_i \in \Gamma_i \cup \tilde{\gamma}_i$. Для завершения доказательства достаточно проверить, что $\rho(P_1, P_2) \geq \rho(\gamma(t_1), \gamma(t_2))$.

Если одна из P_i лежит в Γ_i , то

$$\rho(P_i, P_j) \geq \rho(\Gamma_i, \Gamma_j \cup \gamma_j) = r_j \geq r > \rho(\gamma(t_1), \gamma(t_2)),$$

где последнее неравенство имеет место в силу того, что $\gamma(t_i)$ лежат в $U(\gamma(t_0), r/2)$. Если же обе P_i не лежат в Γ_i , то они лежат в $\gamma([t_0 - \delta, t_0 + \delta]) \setminus \gamma((t_1, t_2))$ и

$$\rho(P_i, P_j) \geq \rho(\gamma([t_0 - \delta, t_1]), \gamma([t_2, t_0 + \delta])) = \rho(\gamma(t_1), \gamma(t_2)),$$

где последнее равенство выполняется в силу выбора δ . Доказательство закончено.

Прежде чем перейти к основной теореме, введем полезное для дальнейшего обозначение.

Пусть Γ – вложенная геометрическая реализация произвольного дерева G и p – некоторая внутренняя точка отрезка γ , соответствующего ребру $vw \in E_G$. Рассмотрим дерево G' , для которого

$$V_{G'} = V_G \cup \{p\}, \quad E_{G'} = (E_G \setminus \{vw\}) \cup \{vp, wp\}.$$

Кроме того, обозначим через V_1 и V_2 множества вершин компонент леса $G \setminus vw$. Наконец, рассмотрим поддеревья G'_i , $i = 1, 2$, дерева G' , порожденные множествами $V_i \cup \{p\}$. Пару, состоящую из геометрических реализаций поддеревьев G'_i , совпадающих с Γ на всех ребрах из $E_G \setminus \{vw\}$, а на vp и wp – с соответствующими фрагментами отрезка γ , обозначим через $\Gamma \nmid p$, а каждую из этих геометрических реализаций будем называть *компонентой пары* $\Gamma \nmid p$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть Γ – вложенное евклидово локально минимальное дерево с границей, не содержащей граничных вершин степени 3 и граничных вершин степени 2, в которых ребра стыкуются под углами в 180° . Тогда Γ имеет стабилизацию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем доказывать индукцией по числу n граничных вершин. Для $n \leq 3$ теорема имеет место, так как все локально минимальные сети в этом случае являются кратчайшими, см. например [1].

Пусть теперь $n \geq 4$. Тогда в дереве Γ имеется такое ребро e , что $\Gamma \setminus e$ состоит из двух неточечных компонент Γ'_1 и Γ'_2 . Пусть q – середина ребра e . В силу утверждения 8 для каждого достаточно малого отрезка $[q_1, q_2] \subset e$ с серединой в q расстояние между связными компонентами графа $\Gamma \setminus (q_1, q_2)$ равно длине отрезка $[q_1, q_2]$. Среди таких отрезков выберем тот, для которого в прямом круговом цилиндре Π с осью $[q_1, q_2]$ и радиусом равным $|q_1 q_2|$ не содержится точек сети Γ , отличных от точек отрезка $[q_1, q_2]$. Пусть точка q_i лежит на той компоненте пары $\Gamma \nmid q$, которая содержит Γ'_i . Далее, пусть $[p_1, p_2] \subset [q_1, q_2]$, где $|p_1 q_1| = |p_2 q_2| = \delta < |q_1 q_2|/4$, и положим $d = |p_1 p_2| > 2\delta$.

Пусть Γ_i – та компонента пары $\Gamma \nmid p_i$, которая содержит Γ'_i . Положим $\partial\Gamma_i = (\partial\Gamma \cap \Gamma_i) \cup \{p_i\}$, тогда каждое из деревьев Γ_i является вложенным локально минимальным, имеет меньше n граничных вершин, все его вершины степени 3 являются внутренними, а во всех его вершинах степени 2 угол между выходящими ребрами отличен от 180° . Поэтому в силу индуктивного предположения для деревьев Γ_i имеются стабилизации $\bar{\Gamma}_i$.

Для каждого $\varepsilon > 0$ можно так подправить стабилизации $\bar{\Gamma}_i$, подразбив, если необходимо, их ребра граничными вершинами, чтобы граница M_i подправленной стабилизации, которую мы по-прежнему будем обозначать через $\bar{\Gamma}_i$, удовлетворяла условию $D(M_i) \leq \varepsilon$. Кроме того, будем предполагать, что в сетях $\bar{\Gamma}_i$ нет смежных подвижных вершин (иначе подразобьем ребра, соединяющие подвижные вершины). Пусть $M = M_1 \sqcup M_2$ – множество всех граничных вершин, как принадлежащих $\partial\Gamma$, так и добавленных при всех описанных модификациях, и пусть m – количество элементов множества M .

Подразобьем сети $\bar{\Gamma}_i$, добавив середины всех их ребер. Тогда разреженности так модифицированных граничных множеств M_i уменьшатся по меньшей мере вдвое, и, если обозначить их теми же буквами, для них будет верна оценка $D(M_i) \leq \varepsilon/2$. При этом число m граничных вершин увеличится на число ребер сетей $\bar{\Gamma}_i$, которое, в силу отсутствия граничных вершин степени 3 и смежных подвижных вершин, оценивается сверху как $2m$ (каждая из добавленных вершин смежна с имевшейся граничной вершиной, и каждая из имевшихся граничных вершин смежна не более чем с двумя добавленными), т.е. количество граничных вершин возрастет не более чем в три раза. Так как величина

$$\frac{c_1}{2^k} \log_2(c_2 3^k)$$

стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, стабилизации $\bar{\Gamma}_i$ можно так подправить, чтобы разреженности множеств M_i не превосходили некоторого ε , удовлетворяющего следующему условию:

$$|p_1 p_2| = d > \varepsilon \log_2 \frac{8m^2}{9}.$$

Подправленные так стабилизации и их границы будем обозначать теми же буквами.

Отметим, что по утверждению 5 у каждого кратчайшего дерева Σ на границе, полученной из M любым подразбиением деревьев $\bar{\Gamma}_i$, всегда имеется, причем ровно одно, ребро e' длины больше ε . Кроме того, $\mathcal{P}_\Sigma(e') = \{M_1, M_2\}$ (для подразбитых деревьев и их границ мы сохраняем те же обозначения).

Пусть e_i – ребро дерева $\bar{\Gamma}_i$, инцидентное p_i . Сместим точки q_i в сторону точек p_i так, чтобы они оказались внутри ребер e_i на одном и том же расстоянии от p_i , которое мы опять обозначим через δ . Заметим, что по-прежнему $d > 2\delta$. Добавим точки q_i в множества граничных вершин деревьев $\bar{\Gamma}_i$. Ребра $p_i q_i$ обозначим через e_i (это по-прежнему инцидентные p_i ребра деревьев $\bar{\Gamma}_i$).

Кроме того, для $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ подразобьем деревья $\bar{\Gamma}_i \setminus p_i$ так, чтобы разреженности границ полученных деревьев не превосходили ε' . В дальнейшем мы подберем величину ε' так, чтобы для каждого $\Sigma \in \text{SMT}(M)$ ребро e' соединяло граничные точки. Но тогда в силу утверждения 3 имеем $\rho(e') \leq d$, а с другой стороны, $\rho(e') \geq \rho(M_1, M_2) \geq d$, откуда $\rho(e') = d = \rho(p_1, p_2)$. Далее, компоненты $\Sigma \setminus e'$ представляют собой кратчайшие деревья Σ_i на M_i , поэтому $\rho(\Sigma_i) = \rho(\bar{\Gamma}_i)$. Следовательно, длина дерева Σ равна сумме длин деревьев $\bar{\Gamma}_i$ и отрезка $[p_1, p_2]$, откуда объединение $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup [p_1, p_2]$ – кратчайшее дерево на M , что и требовалось.

Таким образом, осталось показать, что для достаточно малого ε' ребро e' обязано соединять граничные точки. Положим $e' = a_1 a_2$, где a_i лежит в той компоненте дерева $\Sigma \setminus e'$, которая содержит M_i . Отметим, что по построению

$$\rho(M_1 \setminus p_1, M_2 \setminus p_2) = 2\delta + d \quad \text{и} \quad \rho(M_i, M_j \setminus p_j) = \delta + d, \quad i \neq j.$$

Итак, пусть $\Sigma \in \text{SMT}(M)$, и предположим, что хотя бы одна из вершин ребра e' дерева Σ , скажем a_1 , не является граничной. Рассмотрим невырожденную компоненту Υ дерева Σ , содержащую a_1 .

В дальнейшем нам понадобится следующая техническая лемма, непосредственно вытекающая из неравенства треугольника и определения расстояния между множествами.

ЛЕММА 1. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, X и Y – его подмножества, a_1 и a_2 – его точки. Тогда имеют место следующие неравенства:

$$\rho(a_1, a_2) + \rho(a_1, X) \geq \rho(a_2, X), \quad \rho(X, a_1) + \rho(a_1, a_2) + \rho(a_2, Y) \geq \rho(X, Y).$$

Рассмотрим несколько вариантов.

(1) Предположим сначала, что вершина a_1 не смежна с вершиной p_1 в Σ . Разрежем Υ по вершине a_1 . Так как a_1 не смежна с p_1 , те две из трех полученных связных компонент, которые не содержат ребра e' , содержат вершины из $M_1 \setminus p_1$. Обозначим через Υ' ту из этих компонент, которая не содержит ни ребра e' , ни вершины p_1 .

Из утверждения 3 вытекает, что каждое ребро компоненты Υ' не длиннее, чем ε' . С другой стороны, компонента Υ' представляет собой бинарное дерево, имеющее меньше чем m вершин степени 1, поэтому в силу утверждения 1 кратчайший по числу ребер путь в Υ' от ее вершины a_1 степени 1 до другой ее вершины степени 1 состоит не более, чем из $\log_2(2m-2)$ ребер. Таким образом, $\rho(a_1, M_1 \setminus p_1) \leq \varepsilon' \log_2(2m-2)$. По аналогии с тем, как это было показано выше, существуют такие подразделения деревьев $\bar{\Gamma}_i \setminus p_i$, что $\varepsilon' \log_2(2m-2) < \delta$. Будем считать, что выбраны именно такие подразделения и, значит, $\rho(a_1, M_1 \setminus p_1) \leq \delta$.

(1.1) Если a_2 – граничная вершина дерева Σ , то, используя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} \rho(e') &= \rho(a_1, a_2) \geq -\rho(a_1, M_1 \setminus p_1) + \rho(M_1 \setminus p_1, a_2) \\ &\geq -\rho(a_1, M_1 \setminus p_1) + \rho(M_1 \setminus p_1, M_2) > -\delta + (\delta + d) = d, \end{aligned}$$

однако последнее противоречит утверждению 3, так как $\rho(e') > d = \rho(M_1, M_2) = d_\Sigma(e')$.

(1.2) Если a_2 не является граничной и не смежна с p_2 , то, рассуждая аналогично, заключаем, что при таком же подразбиении деревьев $\bar{\Gamma}_i \setminus p_i$ имеем, кроме того, $\rho(a_2, M_2 \setminus p_2) \leq \varepsilon' \log_2(2m-2) < \delta$. Поэтому в этом случае, снова используя лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} \rho(e') &= \rho(a_1, a_2) \geq \rho(M_1 \setminus p_1, M_2 \setminus p_2) - \rho(a_1, M_1 \setminus p_1) - \rho(a_2, M_2 \setminus p_2) \\ &> (d + 2\delta) - \delta - \delta = d, \end{aligned}$$

и снова получаем противоречие с утверждением 3.

(1.3) Пусть вершина a_2 не является граничной и смежна с p_2 . Рассуждения, аналогичные проведенным выше, приводят к следующему результату: для каждого α , $0 < \alpha < 1$, можно так подразбить деревья $\bar{\Gamma}_i \setminus p_i$, чтобы выполнялось $\rho(a_1, M_1 \setminus p_1) < \delta(1 - \alpha)$. Мы покажем, как выбрать α , чтобы рассматриваемый случай не смог реализоваться.

Рассмотрим треугольник $T = p_2 a_1 a_2$. Заметим, что

$$\rho(p_2, a_1) \geq \rho(p_2, M_1 \setminus p_1) - \rho(a_1, M_1 \setminus p_1) > (d + \delta) - \delta(1 - \alpha) = d + \alpha\delta.$$

Рис. 1. Вершина a_1 неграничная, смежная с p_1 , и $a_2 = p_2$

Покажем, что найдется такое α , для которого $\rho(e') = \rho(a_1, a_2) > d$. Положим $\rho(a_1, a_2) = x$, $\rho(a_2, p_2) = y$, тогда по теореме косинусов

$$x^2 + xy + y^2 = \rho(a_1, p_2)^2 > (d + \alpha\delta)^2.$$

По утверждению 3 имеем $x \leq d$ и $y \leq \delta$, откуда

$$d^2 + d\delta + \delta^2 > (d + \alpha\delta)^2.$$

Однако при $\alpha = 1$ это неравенство места не имеет, поэтому это же верно и при $\alpha < 1$, достаточно близких к 1. Выбор таких α соответствует достаточно мелкому подразбиению деревьев $\bar{\Gamma}_i \setminus p_i$. Считая, что именно такое ε' было выбрано, получаем, что рассматриваемый случай не реализуется.

(2) Пусть теперь неграничная вершина a_1 смежна с p_1 .

(2.1) Предположим сначала, что вершина a_2 граничная.

(2.1.1) Если $a_2 \neq p_2$, то

$$\rho(p_1, a_1) + \rho(e') > \rho(p_1, a_2) \geq \rho(p_1, q_2) = \rho(p_1, M_2 \setminus p_2),$$

где первое неравенство справедливо так как e' и ребро $p_1 a_1$ составляют угол в 120° , поскольку a_1 – внутренняя вершина степени 3, а второе – так как по предположению $a_2 \in M_2 \setminus p_2$. Кроме того, по утверждению 3 имеем $\rho(p_1, a_1) \leq \delta$, откуда $\rho(e') > (\delta + d) - \delta = d$, противоречие с тем же утверждением 3.

(2.1.2) Пусть теперь $a_2 = p_2$. Обозначим через b_1 вершину сети Σ , смежную с a_1 и отличную от p_1 и p_2 , см. рис. 1. По утверждению 3 имеем $\rho(a_1, b_1) \leq \delta$. Поэтому по построению точка b_1 лежит внутри цилиндра Π , причем расстояние от b_1 до границы этого цилиндра больше, чем $\delta/2$. Действительно, вектор $a_1 b_1$ составляет с вектором $p_1 p_2$ угол меньше 120° , поэтому абсолютная величина проекции вектора $a_1 b_1$ на направление $p_1 p_2$ меньше, чем $\delta/2$. Проекция же вектора $p_1 a_1$ на это направление положительна. Поэтому точка b_1 лежит между плоскостями, проходящими через

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Современная математика, Ин-т компьютер. исслед., Ижевск, 2003.
- [2] В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич, *Лекции по теории графов*, Учебное пособие, Наука, М., 1990.

А. О. Иванов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: aoiva@mail.ru

Поступило

25.07.2007

Исправленный вариант

26.09.2008

А. А. Тужилин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: tuz@mech.math.msu.su