Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Мануйлов, Ю. Чао, О почти представлениях групп со свойством (T), *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 2, 219–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4025>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:15:07

О почти представлениях групп со свойством (Т)

В. М. Мануйлов, Чао Ю

Свойство (Т) Каждана для групп означает альтернативу: представление такой группы либо обладает инвариантным вектором, либо не имеет даже почти инвариантных векторов. Мы показываем, что при выполнении несколько более сильного условия Жука подобная альтернатива имеет место для почти представлений.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Пусть Γ – группа, порожденная симметричным конечным множеством S , а $\pi: \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ – ее унитарное представление. Предположим, что Γ – группа со свойством (Т) Каждана (т.е. тривиальное представление изолировано в двойственном пространстве группы). Сведения о группах со свойством (Т) можно найти в [1]. Известно [2], что спектр оператора

$$\pi(x) = \frac{1}{|S|} \sum_{s \in \Gamma} \pi(s)$$

имеет лауну рядом с 1:

$$\text{Sp}(\pi(x)) \subset [-1, 1 - c] \cup \{1\},$$

где c – константа Каждана для Γ (по отношению к S). В терминах групповой C^* -алгебры это означает, что, применив к

$$x = \frac{1}{|S|} \sum_{g \in S} g \in C^*(\Gamma)$$

непрерывную функцию f , удовлетворяющую условиям $f(1) = 1$ и $f(t) = 0$ для всех $t \in [-1, 1 - c]$, мы получим канонический проектор $p = f(x) \in C^*(\Gamma)$, отвечающий тривиальному представлению [3].

Нашей целью является обобщение этого свойства на случай почти представлений групп. Напомним, что для $\varepsilon \geq 0$ ε -почти представлением π группы Γ (по отношению к заданному набору образующих S) называется отображение $\pi: S \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$, удовлетворяющее свойствам

$$\|\pi(s_1 s_2) - \pi(s_1)\pi(s_2)\| \leq \varepsilon \quad \text{для всех } s_1, s_2, s_1 s_2 \in S,$$

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00923).

$$\pi(s^{-1}) = \pi(s)^* \quad \text{для всех } s \in S.$$

Это определение появилось в [4] и затем (в несколько иной форме) в [5]. Если $\varepsilon = 0$, то (в случае, когда Γ конечно порождена, а S достаточно велико) 0-почти представление очевидным образом порождает настоящее представление группы Γ . Известно, что в некоторых приложениях достаточно, чтобы π было определено только на S , а не на всей группе. Любое малое возмущение настоящего представления является почти представлением, но существуют почти представления, далекие от любого настоящего представления [6]. Следует отличать почти представления от различных других групповых “почти” понятий, таких как, например, квазипредставления, почти действия и т.п. [7], [8].

Если говорить об асимптотических представлениях (т.е. непрерывных семействах ε_t -почти представлений $(\pi_t)_{t \in [0, \infty)}$, где $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_t = 0$), то из теории асимптотических гомоморфизмов C^* -алгебр следует, что спектр оператора $\pi_t(x)$ имеет лауну при достаточно больших t : существует такая непрерывная функция $\alpha = \alpha(t) > 0$, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0 \quad \text{и} \quad \text{Sp}(\pi_t(x)) \subset [-1, 1 - c + \alpha(t)] \cup [1 - \alpha(t), 1].$$

Однако, если рассматривать индивидуальное почти представление, может оказаться, что его нельзя включить в асимптотическое представление [9], и не известно, как проверить существование лауны в спектре, так как не существует удобной формулы для проектора p .

Однако существует условие, несколько более сильное, чем свойство (Т), которое обеспечивает существование лауны в $\text{Sp}(\pi(x))$ для почти представления π . Важность этого условия была замечена Жуком [10]. Напомним его конструкцию.

В предположении, что единичный элемент группы не включен в множество S образующих, сопоставим множеству S граф $L(S)$ следующим образом: множество вершин $L(S)$ есть S , а множество ребер – $\{(s, s') : s, s', s^{-1}s' \in S\}$. С помощью добавления дополнительных образующих к множеству S можно считать, что граф $L(S)$ связан [10]. Для вершины $s \in L(S)$ пусть $\deg(s)$ обозначает ее степень, т.е. число ребер, выходящих из нее. Пусть Δ – оператор Лапласа, действующий на функциях f , определенных на множестве вершин $L(S)$ по формуле

$$\Delta f(s) = f(s) - \frac{1}{\deg(s)} \sum_{s' \sim s} f(s'), \quad (1)$$

где $s' \sim s$ означает, что вершины s' и s соединены ребром. Оператор Δ является неотрицательным самосопряженным оператором в (конечномерном) гильбертовом пространстве $l^2(L(S), \deg)$ и 0 – его простое собственное значение. Пусть $\lambda_1(L(S))$ – наименьшее ненулевое собственное значение Δ . Будем говорить, что группа Γ с множеством образующих S удовлетворяет *условию Жука*, если $\lambda_1(L(S)) > 1/2$. Один из основных результатов [10] утверждает, что свойство (Т) с константой Каждана

$$c = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(2 - \frac{1}{\lambda_1(L(S))} \right)$$

следует из условия Жука. Подход Жука ценен тем, что наряду с настоящими представлениями он позволяет работать с почти представлениями. Основной результат настоящей статьи – следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ и S удовлетворяют условию Жука, c – определенная выше константа Каждана. Тогда существует такая непрерывная функция $\alpha = \alpha(\varepsilon) \geq 0$, что $\alpha(0) = 0$ и

$$\mathrm{Sp}\left(\frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \pi(s)\right) \subset [-1, 1 - c/2 + \alpha(\varepsilon)] \cup [1 - \alpha(\varepsilon), 1]$$

для любого ε -почти представления π .

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого ε -почти представления π найдется $(\varepsilon + 6|S|\alpha(\varepsilon))$ -почти представление π' такое, что

$$\|\pi'(s) - \pi(s)\| \leq 3|S|\alpha(\varepsilon) \quad \text{для всех } s \in S$$

и $\pi' = \tau \oplus \sigma$, где τ – тривиальное представление, а σ – $(\varepsilon + 6|S|\alpha(\varepsilon))$ -почти представление, удовлетворяющее условию

$$\mathrm{Sp}\left(\frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \sigma(s)\right) \subset \left[-1, 1 - \frac{c}{2} + (1 + 3|S|)\alpha(\varepsilon)\right]. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H \subset \mathcal{H}_\pi$ – образ спектрального проектора оператора

$$\frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \pi(s),$$

отвечающего интервалу $[1 - c + \alpha(\varepsilon), 1]$. Тогда $\|\pi(s)\xi - \xi\| \leq |S|\alpha(\varepsilon)\|\xi\|$ для всех $s \in S$ и для любого $\xi \in H$, и, если записать $\pi(s)$ в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

относительно разложения $H \oplus H^\perp$, то $\|B\| \leq |S|\alpha(\varepsilon)$ и $\|C\| \leq |S|\alpha(\varepsilon)$, следовательно, существует такой унитарный оператор D' , что

$$\|D' - D\| \leq 2|S|\alpha(\varepsilon).$$

Положим

$$\pi'(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}.$$

Тогда $\|\pi'(s) - \pi(s)\| \leq 3|S|\alpha(\varepsilon)$ и π' очевидно является $(\varepsilon + 6|S|\alpha(\varepsilon))$ -почти представлением, тривиальным на H . Значит, $H^\perp$ $\pi(s)$ -инвариантно для всех $s \in S$. Поскольку ограничение $(1/|S|) \sum_{s \in S} \pi(s)$ на $H^\perp$ удовлетворяет неравенству

$$\left\| \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \pi(s) \right\|_{H^\perp} \leq 1 - \frac{c}{2} + \alpha(\varepsilon),$$

получаем (2).

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теоремы 1. При этом мы следуем соответствующему доказательству Жука для настоящих представлений, но привлекаем дополнительные аргументы, связанные с тем, что соотношения для почти представлений выполняются лишь приблизительно. Из доказательства будет видно, что функцию $\alpha(\varepsilon)$ из теоремы 1 можно взять в виде $\alpha(\varepsilon) = O(\varepsilon^{2/5})$.

2. Доказательство теоремы. Следующие гильбертовы пространства и операторы определяются в точности так, как в [10], при этом не важно, что π не является настоящим представлением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [10]. Для $r = 0, 1$ и 2 пусть C^r – гильбертовы пространства, определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} C^0 &= \{u : u \in \mathcal{H}_\pi\}, & \langle u, w \rangle_{C^0} &= \langle u, w \rangle_{\mathcal{H}_\pi} |T|, & u, w \in C^0; \\ C^1 &= \{f : S \rightarrow \mathcal{H}_\pi : f(s^{-1}) = -\pi(s^{-1})f(s) \text{ для всех } s \in S\}, \\ & \langle f, g \rangle_{C^1} = \sum_{s \in S} \langle f(s), g(s) \rangle_{\mathcal{H}_\pi} n(s); \\ C^2 &= \{g : T \rightarrow \mathcal{H}_\pi\}, & \langle f, g \rangle_{C^2} &= \sum_{t \in T} \langle f(t), g(t) \rangle_{\mathcal{H}_\pi}, \end{aligned}$$

где $n(s) = \#\{s' \in S : (s, s') \in T\}$.

Поскольку граф $L(S)$ связан, то $n(s) > 0$ для любого $s \in S$, и $n(s) = \deg(s)$. Кроме того, легко видеть, что $n(s) = n(s^{-1})$ и $\sum_{s \in S} n(s) = |T|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [10]. Определим линейные операторы $d_1 : C^0 \rightarrow C^1$ и $d_2 : C^1 \rightarrow C^2$ формулами

$$\begin{aligned} d_1 u(s) &= \pi(s)u - u & \text{для всех } u \in C^0, \\ d_2 f((s, s')) &= f(s) - f(s') + \pi(s)f(s^{-1}s') & \text{для всех } f \in C^1. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5 [10]. Для любой $f \in C^1$ имеет место равенство

$$d_1^* f = -2 \sum_{s \in S} f(s) \frac{n(s)}{|T|}, \quad \|d_1^*\|_{C^1 \rightarrow C^0} \leq 2.$$

В [10] показано, что $d_2 d_1 = 0$ для любого настоящего унитарного представления. Однако если π – лишь почти представление, это равенство не имеет места. Можно лишь показать, что норма этой композиции мала.

ЛЕММА 6. Для любого $u \in C^0$ и $(s, s') \in T$ имеет место оценка

$$\|d_2 d_1 u((s, s'))\|_{\mathcal{H}_\pi} \leq \varepsilon \|u\|_{\mathcal{H}_\pi}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определениям d_1 и d_2 имеем

$$\begin{aligned} \|d_2 d_1 u((s, s'))\|_{\mathcal{H}_\pi} &= \|d_1 u(s) - d_1 u(s') + \pi(s)d_1 u(s^{-1}s')\|_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \|(\pi(s)u - u) - (\pi(s')u - u) + \pi(s)(\pi(s^{-1}s')u - u)\|_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \|\pi(s')u - \pi(s)\pi(s^{-1}s')u\|_{\mathcal{H}_\pi} \leq \varepsilon \|u\|_{\mathcal{H}_\pi}, \end{aligned}$$

следовательно, $\|d_2 d_1 u((s, s'))\|_{\mathcal{H}_\pi} \leq \varepsilon \|u\|_{\mathcal{H}_\pi}$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Выполнена оценка $\|d_2 d_1\|_{C^2 \rightarrow C^0} \leq \varepsilon$.

По этой причине введем два новых (под)пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Для любого $\beta \geq 0$ положим

$$B^0(\beta) = \{P_\Omega(d_1^*d_1)(u) : u \in C^0\} \subset C^0, \quad B^1(\beta) = \overline{\{d_1u : u \in B^0(\beta)\}} \subset C^1,$$

где P_Ω – спектральный проектор, отвечающий интервалу $\Omega = [\beta, +\infty)$.

Ясно, что $B^0(\beta)$ и $B^1(\beta)$ являются инвариантными подпространствами для $d_1^*d_1$ и $d_1d_1^*$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Если существуют такие $c > 0$ и $0 < \delta < c/2$, что для любой $f \in B^1(\delta^2/|T|)$ выполнена оценка

$$\langle d_1d_1^*f, f \rangle_{C^1} > c\langle f, f \rangle_{C^1}, \quad (4)$$

то для любого ε -почти представления π имеет место одно из двух условий: либо существует такое $u \in C^0$, что

$$\|\pi(s)u - u\|_{\mathcal{H}_\pi} < \delta\|u\|_{\mathcal{H}_\pi} \quad \text{для всех } s \in S, \quad (5)$$

либо

$$\max_{s \in S} \|\pi(s)u - u\|_{\mathcal{H}_\pi} \geq \frac{c}{2}\|u\|_{\mathcal{H}_\pi} \quad (6)$$

для любого $u \in C^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что если не существует $u \in C^0$, удовлетворяющих (5), то $B^0(\delta^2/|T|) = C^0$. Если бы это было неверно, то существовал бы ненулевой вектор $u^\perp$, ортогональный к $B^0(\delta^2/|T|)$. Поскольку

$$\|d_1^*d_1u^\perp\|_{C^0} < \frac{\delta^2}{|T|}\|u^\perp\|_{C^0},$$

имеем

$$\langle d_1u^\perp, d_1u^\perp \rangle_{C^1} = \langle u^\perp, d_1^*d_1u^\perp \rangle_{C^0} \leq \|u^\perp\|_{C^0}\|d_1^*d_1u^\perp\|_{C^0} < \frac{\delta^2}{|T|}\|u^\perp\|_{C^0}^2,$$

откуда следует, что

$$\|d_1u^\perp\|_{C^1} < \frac{\delta}{\sqrt{|T|}}\|u^\perp\|_{C^0}.$$

Из определения нормы $\|\cdot\|_{C^1}$ легко видеть, что

$$\|\pi(s)u^\perp - u^\perp\|_{\mathcal{H}_\pi} \leq \|d_1u^\perp\|_{C^1} < \frac{\delta}{\sqrt{|T|}}\sqrt{|T|}\|u^\perp\|_{\mathcal{H}_\pi} = \delta\|u^\perp\|_{\mathcal{H}_\pi} \quad \text{для всех } s \in S,$$

что противоречит предположению.

Далее, докажем, что из (4) следует существование ограниченного обратного к оператору

$$d_1d_1^*: B^1\left(\frac{\delta^2}{|T|}\right) \rightarrow B^1\left(\frac{\delta^2}{|T|}\right).$$

В силу (4) $d_1d_1^*(B^1(\delta^2/|T|))$ замкнуто в $B^1(\delta^2/|T|)$. Если бы $d_1d_1^*(B^1(\delta^2/|T|))$ не совпадало с $B^1(\delta^2/|T|)$, то существовал бы ненулевой вектор $f \in B^1(\delta^2/|T|)$, ортогональный к $d_1d_1^*(B^1(\delta^2/|T|))$. Тогда, из (4) следовало бы, что

$$0 = \langle f, d_1d_1^*(f) \rangle_{C^1} > c\langle f, f \rangle_{C^1},$$

– противоречие.

Таким образом, оператор

$$d_1 d_1^*: B^1\left(\frac{\delta^2}{|T|}\right) \rightarrow B^1\left(\frac{\delta^2}{|T|}\right)$$

обладает ограниченным обратным оператором

$$(d_1 d_1^*)^{-1}: B^1\left(\frac{\delta^2}{|T|}\right) \rightarrow B^1\left(\frac{\delta^2}{|T|}\right)$$

и $\|(d_1 d_1^*)^{-1}\|_{B^1(\delta^2/|T|) \rightarrow B^1(\delta^2/|T|)} \leq c^{-1}$.

Предположим теперь, что неверны оба условия, (5) и (6). Тогда найдутся такие $\gamma < c/2$ и $u \in \mathcal{H}_\pi$, что $\|u\|_{\mathcal{H}_\pi} = 1$ и $\|\pi(s)u - u\|_{\mathcal{H}_\pi} \leq \gamma$ для всех $s \in S$. Поэтому

$$\|d_1 u\|_{B^1(\delta^2/|T|)}^2 = \sum_{s \in S} \|d_1 u(s)\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 n(s) = \sum_{s \in S} \|\pi(s)u - u\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 n(s) \leq \sum_{s \in S} \gamma^2 n(s) = \gamma^2 |T|,$$

откуда имеем $\|d_1 u\|_{B^1(\delta^2/|T|)} \leq \gamma \sqrt{|T|}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \|d_1^* (d_1 d_1^*)^{-1} d_1 u\|_{C^0} \\ & \leq \|d_1^*\|_{B^1(\delta^2/|T|) \rightarrow C^0} \cdot \|(d_1 d_1^*)^{-1}\|_{B^1(\delta^2/|T|) \rightarrow B^1(\delta^2/|T|)} \cdot \|d_1 u\|_{B^1(\delta^2/|T|)} \\ & \leq 2 \cdot c^{-1} \cdot \gamma \sqrt{|T|} < \sqrt{|T|}. \end{aligned}$$

По определению нормы в C^0 имеем $d_1^* (d_1 d_1^*)^{-1} d_1 u = u'$, откуда $\|u'\|_{\mathcal{H}_\pi} < 1$, поэтому вектор $u - u'$ ненулевой. Наконец,

$$d_1(u - u') = d_1 u - d_1(d_1^* (d_1 d_1^*)^{-1} d_1 u) = d_1 u - d_1 u,$$

что означает, что для любого $s \in S$,

$$\pi(s)(u - u') - (u - u') = 0.$$

Таким образом, $u - u'$ – ненулевой инвариантный вектор и выполнено (5) в противоречии с предположением.

Следуя [10], определим оператор $D: C^1 \rightarrow C^2$ равенством

$$Df((s_1, s_2)) = f(s_1) - f(s_2),$$

где $f \in C^1$ и $(s_1, s_2) \in T$.

В [10] было изучено соотношение между d_2 и D и было показано, что

$$\frac{1}{3} \langle d_2 f, d_2 f \rangle_{C^2} = \langle Df, Df \rangle_{C^2} - \langle f, f \rangle_{C^1}.$$

Поскольку мы используем почти представления вместо настоящих представлений, оценим разность левой и правой частей.

ЛЕММА 10. Для каждой $f \in C^1$ имеем

$$\langle f, f \rangle_{C^1} = \sum_{(s, s') \in T} \langle f(s^{-1}s'), f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi}, \quad (7)$$

$$\|d_2 f((s, s')) + d_2 f((s', s))\|_{\mathcal{H}_\pi} \leq \varepsilon \|f((s')^{-1}s)\|_{\mathcal{H}_\pi}, \quad (8)$$

$$d_2f((s, s')) = -\pi(s)d_2f((s^{-1}, s^{-1}s')), \quad (9)$$

$$\sum_{(s, s') \in T} \langle d_2f((s^{-1}, s^{-1}s')), -f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \sum_{(s, s') \in T} \langle d_2f((s, s')), -f(s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi}, \quad (10)$$

$$\|d_2f((s, s')) - \pi(s')d_2f(((s')^{-1}, (s')^{-1}s))\|_{\mathcal{H}_\pi} \leq \varepsilon \|f((s')^{-1}s)\|_{\mathcal{H}_\pi}, \quad (11)$$

$$\left| \sum_{(s, s') \in T} \langle d_2f((s, s')), \pi(s)f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} - \frac{1}{3} \langle d_2f, d_2f \rangle_{C^2} \right| < \frac{5}{3} \varepsilon \|f\|_{C^1}^2. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательства формул (7) и (9) в [10] не зависят от свойства π быть настоящим представлением. Имеем

$$\begin{aligned} d_2f((s, s')) &= f(s) - f(s') + \pi(s)f(s^{-1}s') \\ &= -(f(s') - f(s) + \pi(s)\pi(s^{-1}s')f((s')^{-1}s)) \\ &= -(f(s') - f(s) + \pi(s')f((s')^{-1}s) \\ &\quad + \pi(s')f((s')^{-1}s) - \pi(s)\pi(s^{-1}s')f((s')^{-1}s)) \\ &= -d_2f((s', s)) + (\pi(s')f((s')^{-1}s) - \pi(s)\pi(s^{-1}s')f((s')^{-1}s)), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \|d_2f((s, s')) + d_2f((s', s))\|_{\mathcal{H}_\pi} &= \|\pi(s')f((s')^{-1}s) - \pi(s)\pi(s^{-1}s')f((s')^{-1}s)\|_{\mathcal{H}_\pi} \\ &\leq \varepsilon \|f((s')^{-1}s)\|_{\mathcal{H}_\pi}, \end{aligned}$$

откуда получаем (8).

Из (8) и (9) следует, что

$$\begin{aligned} &\|d_2f((s, s')) - \pi(s')d_2f(((s')^{-1}, (s')^{-1}s))\|_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \|d_2f((s, s')) + d_2f((s', s)) - d_2f((s', s)) - \pi(s')d_2f(((s')^{-1}, (s')^{-1}s))\|_{\mathcal{H}_\pi} \\ &\leq \|d_2f((s, s')) + d_2f((s', s))\|_{\mathcal{H}_\pi} \leq \varepsilon \|f((s')^{-1}s)\|_{\mathcal{H}_\pi}, \end{aligned}$$

что доказывает (11).

Рассмотрим отображение

$$M: T \rightarrow T, \quad M((s, s')) = (s^{-1}, s^{-1}s') = (t, t').$$

Легко видеть, что M биективно. Следовательно,

$$\sum_{(s, s') \in T} \langle df((s^{-1}, s^{-1}s')), -f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \sum_{(t, t') \in T} \langle df((t, t')), -f(t') \rangle_{\mathcal{H}_\pi},$$

что с точностью до обозначений дает (10).

Далее,

$$\begin{aligned} &\sum_{(s, s') \in T} \langle d_2f((s, s')), \pi(s)f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{(s, s') \in T} (\langle d_2f((s, s')), \pi(s)f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &\quad + \langle -\pi(s)d_2f((s^{-1}, s^{-1}s')), \pi(s)f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &\quad + \langle \pi(s')d_2f(((s')^{-1}, (s')^{-1}s)), \pi(s)f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi}) + D_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} (\langle d_2 f((s, s')), \pi(s) f(s^{-1} s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} + \langle d_2 f((s^{-1}, s^{-1} s')), -f(s^{-1} s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\
&\quad + \langle d_2 f(((s')^{-1}, (s')^{-1} s)), \pi((s')^{-1} s) f(s^{-1} s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi}) + D_1 + D_2 \\
&= \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} (\langle d_2 f((s, s')), \pi(s) f(s^{-1} s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} + \langle d_2 f((s, s')), -f(s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\
&\quad + \langle d_2 f(((s')^{-1}, (s')^{-1} s)), -f((s')^{-1} s) \rangle_{\mathcal{H}_\pi}) + D_1 + D_2 \\
&= \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} (\langle d_2 f((s, s')), \pi(s) f(s^{-1} s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} + \langle d_2 f((s, s')), -f(s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\
&\quad + \langle d_2 f((s', s)), -f(s) \rangle_{\mathcal{H}_\pi}) + D_1 + D_2 \\
&= \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} (\langle d_2 f((s, s')), \pi(s) f(s^{-1} s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} + \langle d_2 f((s, s')), -f(s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\
&\quad + \langle d_2 f((s, s')), f(s) \rangle_{\mathcal{H}_\pi}) + D_1 + D_2 + D_3 \\
&= \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} \langle d_2 f((s, s')), f(s) - f(s') + \pi(s) f(s^{-1} s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} + D_1 + D_2 + D_3 \\
&= \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} \langle d_2 f((s, s')), d_2 f((s, s')) \rangle_{\mathcal{H}_\pi} + D_1 + D_2 + D_3 \\
&= \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} \langle d_2 f, d_2 f \rangle_{C^2} + D_1 + D_2 + D_3,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} \langle d_2 f((s, s')) - \pi(s') d_2 f(((s')^{-1}, (s')^{-1} s)), \pi(s) f(s^{-1} s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi}, \\
D_2 &= \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} \langle d_2 f(((s')^{-1}, (s')^{-1} s)), (\pi((s')^{-1}) \pi(s) - \pi((s')^{-1} s)) f(s^{-1} s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi}, \\
D_3 &= \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} \langle d_2 f((s, s')) + d_2 f((s', s)), -f(s) \rangle_{\mathcal{H}_\pi},
\end{aligned}$$

т.е.

$$\sum_{(s,s') \in T} \langle d_2 f((s, s')), \pi(s) f(s^{-1} s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} - \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} \langle d_2 f, d_2 f \rangle_{C^2} = D_1 + D_2 + D_3.$$

Из неравенства Коши–Буняковского, определения нормы $\|\cdot\|_{C^1}$ и из (7)–(11) получаем, что

$$\begin{aligned}
|D_1| &= \frac{1}{3} \left| \sum_{(s,s') \in T} \langle d_2 f((s, s')) - \pi(s') d_2 f(((s')^{-1}, (s')^{-1} s)), \pi(s) f(s^{-1} s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \right| \\
&\leq \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} |\langle d_2 f((s, s')) - \pi(s') d_2 f(((s')^{-1}, (s')^{-1} s)), \pi(s) f(s^{-1} s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi}| \\
&\leq \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} \|d_2 f((s, s')) - \pi(s') d_2 f(((s')^{-1}, (s')^{-1} s))\|_{\mathcal{H}_\pi} \|\pi(s) f(s^{-1} s')\|_{\mathcal{H}_\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} \varepsilon \|f((s')^{-1}s)\|_{\mathcal{H}_\pi} \|f(s^{-1}s')\|_{\mathcal{H}_\pi} \\
&\leq \frac{1}{3} \varepsilon \left(\sum_{(s,s') \in T} \|f((s')^{-1}s)\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{(s,s') \in T} \|f(s^{-1}s')\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{3} \varepsilon \|f\|_{C^1}^2, \\
|D_2| &= \frac{1}{3} \left| \sum_{(s,s') \in T} \langle d_2 f(((s')^{-1}, (s')^{-1}s)), (\pi((s')^{-1})\pi(s) - \pi((s')^{-1}s))f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \right| \\
&\leq \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} \|d_2 f(((s')^{-1}, (s')^{-1}s))\|_{\mathcal{H}_\pi} \|(\pi((s')^{-1})\pi(s) - \pi((s')^{-1}s))f(s^{-1}s')\|_{\mathcal{H}_\pi} \\
&\leq \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} \|f((s')^{-1}) - f((s')^{-1}s) + \pi((s')^{-1})f(s)\|_{\mathcal{H}_\pi} \varepsilon \|f(s^{-1}s')\|_{\mathcal{H}_\pi} \\
&\leq \frac{1}{3} \varepsilon \sum_{(s,s') \in T} \|f((s')^{-1})\|_{\mathcal{H}_\pi} \|f(s^{-1}s')\|_{\mathcal{H}_\pi} \\
&\quad + \frac{1}{3} \varepsilon \sum_{(s,s') \in T} \|f((s')^{-1}s)\|_{\mathcal{H}_\pi} \|f(s^{-1}s')\|_{\mathcal{H}_\pi} + \frac{1}{3} \varepsilon \sum_{(s,s') \in T} \|f(s)\|_{\mathcal{H}_\pi} \|f(s^{-1}s')\|_{\mathcal{H}_\pi} \\
&\leq \frac{1}{3} \varepsilon \left(\sum_{(s,s') \in T} \|f((s')^{-1})\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{(s,s') \in T} \|f(s^{-1}s')\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 \right)^{1/2} \\
&\quad + \frac{1}{3} \varepsilon \left(\sum_{(s,s') \in T} \|f((s')^{-1}s)\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{(s,s') \in T} \|f(s^{-1}s')\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 \right)^{1/2} \\
&\quad + \frac{1}{3} \varepsilon \left(\sum_{(s,s') \in T} \|f(s)\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{(s,s') \in T} \|f(s^{-1}s')\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{3} \varepsilon \|f\|_{C^1}^2 + \frac{1}{3} \varepsilon \|f\|_{C^1}^2 + \frac{1}{3} \varepsilon \|f\|_{C^1}^2 = \varepsilon \|f\|_{C^1}^2, \\
|D_3| &= \frac{1}{3} \left| \sum_{(s,s') \in T} \langle d_2 f((s, s')) + d_2 f((s', s)), -f(s) \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \right| \\
&\leq \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} \|d_2 f((s, s')) + d_2 f((s', s))\|_{\mathcal{H}_\pi} \|f(s)\|_{\mathcal{H}_\pi} \\
&\leq \frac{1}{3} \sum_{(s,s') \in T} \varepsilon \|f((s')^{-1}s)\|_{\mathcal{H}_\pi} \|f(s)\|_{\mathcal{H}_\pi} \\
&\leq \frac{1}{3} \varepsilon \left(\sum_{(s,s') \in T} \|f((s')^{-1}s)\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{(s,s') \in T} \|f(s)\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{3} \varepsilon \|f\|_{C^1}^2.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{(s,s') \in T} \langle d_2 f((s, s')), \pi(s)f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} - \frac{1}{3} \langle d_2 f, d_2 f \rangle_{C^2} \right| = |D_1 + D_2 + D_3| \\
&\leq |D_1| + |D_2| + |D_3| \leq \frac{5}{3} \varepsilon \|f\|_{C^1}^2,
\end{aligned}$$

что доказывает (12).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Для любой $f \in C^1$ имеем

$$\left| \langle Df, Df \rangle_{C^2} - \frac{1}{3} \langle d_2 f, d_2 f \rangle_{C^2} - \langle f, f \rangle_{C^1} \right| \leq \frac{10}{3} \varepsilon \langle f, f \rangle_{C^1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения оператора D имеем

$$\begin{aligned} \langle Df, Df \rangle_{C^2} &= \sum_{(s, s') \in T} \langle d_2 f((s, s')) - \pi(s)f(s^{-1}s'), d_2 f((s, s')) - \pi(s)f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \sum_{(s, s') \in T} \langle d_2 f((s, s')), d_2 f((s, s')) \rangle_{\mathcal{H}_\pi} + \sum_{(s, s') \in T} \langle f(s^{-1}s'), f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &\quad - 2 \sum_{(s, s') \in T} \langle d_2 f((s, s')), \pi(s)f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle d_2 f, d_2 f \rangle_{C^2} + \langle f, f \rangle_{C^1} - \frac{2}{3} \langle d_2 f, d_2 f \rangle_{C^2} \\ &\quad + \frac{2}{3} \langle d_2 f, d_2 f \rangle_{C^2} - 2 \sum_{(s, s') \in T} \langle d_2 f((s, s')), \pi(s)f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \frac{1}{3} \langle d_2 f, d_2 f \rangle_{C^2} + \langle f, f \rangle_{C^1} \\ &\quad + 2 \left(\frac{1}{3} \langle d_2 f, d_2 f \rangle_{C^2} - \sum_{(s, s') \in T} \langle d_2 f((s, s')), \pi(s)f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \right), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} &\left| \langle Df, Df \rangle_{C^2} - \frac{1}{3} \langle d_2 f, d_2 f \rangle_{C^2} - \langle f, f \rangle_{C^1} \right| \\ &= 2 \left| \frac{1}{3} \langle d_2 f, d_2 f \rangle_{C^2} - \sum_{(s, s') \in T} \langle d_2 f((s, s')), \pi(s)f(s^{-1}s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \right| \leq \frac{10}{3} \varepsilon \langle f, f \rangle_{C^1}, \end{aligned}$$

что заканчивает доказательство предложения 11.

Заметим, что функцию $f \in C^1$ можно рассматривать как функцию на $L(S)$. В [10] было показано (и доказательство не зависит от свойства π быть настоящим представлением), что $\langle f, f \rangle_{C^1} = \langle f, f \rangle_{L(S)}$,

$$\begin{aligned} \langle Df, Df \rangle_{C^2} &= \sum_{(s, s') \in T} \langle f(s) - f(s'), f(s) - f(s') \rangle_{\mathcal{H}_\pi} = 2 \langle \Delta f, f \rangle_{L(S)}, \\ \langle \Delta f, f \rangle_{L(S)} &\geq \lambda_1(L(S)) \langle f, f \rangle_{C^1} - \frac{\lambda_1(L(S))}{4} \langle d_1^* f, d_1^* f \rangle_{C^0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь и далее для краткости мы будем обозначать $\lambda_1(L(S))$ через λ_1 .

ЛЕММА 12. Для любой $f \in C^1$ имеем

$$\frac{1}{3} \langle d_2 f, d_2 f \rangle_{C^2} + \frac{1}{2} \lambda_1 \langle d_1^* f, d_1^* f \rangle_{C^0} \geq \left(2\lambda_1 - 1 - \frac{10}{3} \varepsilon \right) \langle f, f \rangle_{C^1}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (13) имеем

$$2\lambda_1 \langle f, f \rangle_{C^1} - \langle f, f \rangle_{C^1} \leq 2 \langle \Delta f, f \rangle_{L(S)} - \langle f, f \rangle_{C^1} + \frac{\lambda_1}{2} \langle d_1^* f, d_1^* f \rangle_{C^0}.$$

Поскольку $\langle Df, Df \rangle_{C^2} = 2\langle \Delta f, f \rangle_{L(S)}$,

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 \langle f, f \rangle_{C^1} - \langle f, f \rangle_{C^1} &\leq \langle Df, Df \rangle_{C^2} - \langle f, f \rangle_{C^1} + \frac{\lambda_1}{2} \langle d_1^* f, d_1^* f \rangle_{C^0} \\ &\leq \frac{1}{3} \langle d_2 f, d_2 f \rangle_{C^2} + \frac{10}{3} \varepsilon \langle f, f \rangle_{C^1} + \frac{\lambda_1}{2} \langle d_1^* f, d_1^* f \rangle_{C^0}, \end{aligned}$$

что доказывает (14).

ЛЕММА 13. Любая $f \in B^1(\delta^2/|T|)$ удовлетворяет оценке

$$\|d_2 f\|_{C^2}^2 \leq \frac{4|T|^2 \varepsilon^2}{\delta^4} \|f\|_{C^1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 6 следует, что для любого $u \in B^0(\delta^2/|T|)$ выполнено

$$\|d_2 d_1 u\|_{C^2}^2 = \sum_{(s, s') \in T} \|d_2 d_1 u((s, s'))\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{(s, s') \in T} \|u\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 = \varepsilon^2 |T| \|u\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 = \varepsilon^2 \|u\|_{C^0}^2.$$

Из того, что $u \in B^0(\delta^2/|T|)$, следует, что

$$\frac{\delta^2}{|T|} \|u\|_{C^0} \leq \|d_1^* d_1 u\|_{C^0} \leq 2 \|d_1 u\|_{C^1}.$$

Поэтому

$$\|d_2 d_1 u\|_{C^2}^2 \leq \frac{4|T|^2 \varepsilon^2}{\delta^4} \|d_1 u\|_{C^1}.$$

Поскольку $d_1(B^0(\delta^2/|T|))$ плотно в $B^1(\delta^2/|T|)$, любая $f \in B^1(\delta^2/|T|)$ также удовлетворяет неравенству

$$\|d_2 f\|_{C^2}^2 \leq \frac{4|T|^2 \varepsilon^2}{\delta^4} \|f\|_{C^1}.$$

СЛЕДСТВИЕ 14. Для любой $f \in C^1$ имеем

$$\langle d_1^* f, d_1^* f \rangle_{C^0} \geq \left(4 - \frac{2}{\lambda_1} - \frac{20\varepsilon}{3\lambda_1} - \frac{8|T|^2 \varepsilon^2}{3\lambda_1 \delta^4} \right) \langle f, f \rangle_{C^1}.$$

Следствие 14 предоставляет константу c для предложения 9. Функцию $\alpha(\varepsilon)$ из теоремы 1 следует взять так, чтобы она удовлетворяла равенству

$$\alpha(\varepsilon) = \max \left\{ \frac{10\varepsilon}{3\lambda_1} + \frac{8|T|^2 \varepsilon^2}{3\lambda_1 \delta^4}, \delta \right\}.$$

Для того, чтобы получилась непрерывная функция, с условием $\alpha(0) = 0$, можно взять $\delta = \varepsilon^{2/5}$. Тогда $\alpha(\varepsilon) = O(\varepsilon^{2/5})$ и теорема 1 непосредственно вытекает из следствия 14 и предложения 9.

Авторы благодарны Н. Моноду за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. de la Harpe, A. Valette, “La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts”, *Astérisque*, **175**, Soc. Math. France, Paris, 1989.
- [2] P. de la Harpe, A. G. Robertson, A. Valette, “On the spectrum of the sum of generators for a finitely generated group”, *Israel J. Math.*, **81**:1–2 (1993), 65–96.
- [3] A. Valette, “Minimal projections, integrable representations and property (T)”, *Arch. Math. (Basel)*, **43**:5 (1984), 397–406.
- [4] A. Connes, M. Gromov, H. Moscovici, “Conjecture de Novikov et fibrés presque plats”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **310**:5 (1990), 273–277.
- [5] V. M. Manuilov, A. S. Mishchenko, “Almost, asymptotic and Fredholm representations of discrete groups”, *Acta Appl. Math.*, **68**:1–3 (2001), 159–210.
- [6] D. Voiculescu, “Asymptotically commuting finite rank unitary operators without commuting approximants”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **45**:1–4 (1983), 429–431.
- [7] А. И. Штерн, “Квазипредставления и псевдопредставления”, *Функц. анализ и его прил.*, **25**:2 (1991), 70–73.
- [8] D. Fisher, G. Margulis, “Almost isometric actions, property (T), and local rigidity”, *Invent. Math.*, **162**:1 (2005), 19–80.
- [9] В. М. Мануйлов, “Почти представления и асимптотические представления дискретных групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:5 (1999), 159–178.
- [10] A. Żuk, “Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups”, *Geom. Funct. Anal.*, **13**:3 (2003), 643–670.

В. М. Мануйлов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: manuilov@mech.math.msu.su

Поступило

14.08.2007

ЧАО Ю

Харбинский технологический институт, КНР

E-mail: hityou1982@hotmail.com