Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Масальцев, Об изометрическом лагранжевом погружении орикруга плоскости Лобачевского в комплексное пространство, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 4, 577–582

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4029>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:02:49

Об изометрическом лагранжевом погружении орикруга плоскости Лобачевского в комплексное пространство

Л. А. Масальцев

Доказано, что существует изометрическое лагранжево погружение орикруга плоскости Лобачевского в комплексное пространство $\mathbb{C}^2$, существует изометрическое лагранжево погружение оришара пространства Лобачевского H^3 в комплексное пространство $\mathbb{C}^3$.

Библиография: 11 названий.

Задаче изометрического погружения областей плоскости Лобачевского в евклидовы пространства были посвящены работы Ефимова [1], Позняка [2], Розендорна [3], Сабитова [4], Кадомцева [5], Кайдасова и Шикина [6], Аминова [7], Гарибе [8].

Подмногообразие $M^n \subset \mathbb{C}^n$ называется *лагранжевым*, если комплексная структура J отображает касательное пространство $T_p M$ в произвольной точке $p \in M$ изометрично на соответствующее нормальное пространство $T_p^\perp M$.

В работе Мура и Морвана [9] рассматривался вопрос изометрического погружения n -мерного риманова многообразия в виде лагранжева подмногообразия комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Там доказано (теорема 1), что малая окрестность любой точки на поверхности с аналитической римановой метрикой допускает изометрическое лагранжево погружение в $\mathbb{C}^2$. С другой стороны, в теореме 2 Мур и Морван показали, что любая область трехмерной сферы Берже не может быть реализована в виде лагранжева подмногообразия $\mathbb{C}^3$. В [9] также высказана гипотеза о том, что если размерность риманова многообразия $n \geq 3$, то в случае существования лагранжева изометрического погружения в $\mathbb{C}^n$ оно единственно (для большинства римановых метрик).

В настоящей заметке в теоремах 2, 3 показано, что существует лагранжево изометрическое погружение орикруга плоскости Лобачевского H^2 в $\mathbb{C}^2$ и оришара пространства Лобачевского H^3 в $\mathbb{C}^3$. Для доказательства использован подход, основанный на рассмотрении классической системы уравнений Гаусса–Кодацци–Риччи, которая является переопределенной, однако, как показано в теореме 1, уравнения Риччи в случае лагранжева изометрического погружения являются следствием уравнений Гаусса. Заметим также, что произвол в найденном решении системы уравнений Гаусса–Кодацци говорит о нежесткости лагранжева изометрического погружения оришара пространства Лобачевского H^3 в $\mathbb{C}^3$.

1. Уравнения Гаусса–Кодацци–Риччи для лагранжева погружения $f: M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Пусть M^n – лагранжево подмногообразие $\mathbb{C}^n$, которое мы рассматриваем как евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с комплексной структурой J , коммутирующей с римановой связностью $\bar{\nabla}$ на $\mathbb{R}^{2n}$ [10; с. 14].

Для произвольных касательных векторных полей X, Y на TM и сечений ξ, η нормального расслоения $TM^\perp$ справедливы следующие формулы Гаусса и Вейнгартена [10; с. 23]

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y), \quad (1)$$

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi, \quad (2)$$

где $B(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp$ – вторая фундаментальная форма погружения f , $D_X \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp$ – связность на нормальном расслоении $TM^\perp$, оператор $A_\xi: TM \rightarrow TM$ симметричен $\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle X, A_\xi Y \rangle$ и связан со второй фундаментальной формой соотношением $\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle B(X, Y), \xi \rangle$.

Имеет место уравнение Гаусса

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle, \quad (3)$$

где R и $\bar{R}$ – операторы кривизны M^n и $\mathbb{C}^n$ соответственно. Для нормальной компоненты $\bar{R}(X, Y)Z$ справедливо уравнение Кодацци

$$\bar{R}(X, Y)Z^\perp = (\nabla_X B)(Y, Z) - (\nabla_Y B)(X, Z). \quad (4)$$

Наконец, имеет место также уравнение Риччи [10; с. 24]

$$\langle \bar{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle - \langle A_\eta X, A_\xi Y \rangle + \langle A_\xi X, A_\eta Y \rangle, \quad (5)$$

где $R^\perp$ – тензор кривизны нормального расслоения, определяемый соотношением

$$R^\perp(X, Y)\xi = D_X D_Y \xi - D_Y D_X \xi - D_{[X, Y]}\xi.$$

Если M^n – лагранжево подмногообразие $\mathbb{C}^n$, то для нормальных векторных полей ξ, η можно определить касательные к M^n векторные поля Z, W соотношениями

$$\xi = JZ, \quad \eta = JW. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть M^n – лагранжево подмногообразие $\mathbb{C}^n$. Тогда уравнение Риччи (5) является следствием уравнения Гаусса (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ оператор кривизны $\bar{R} = 0$, то левая часть уравнения (5) равна нулю.

Первое слагаемое правой части (5) можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{а) } R^\perp(X, Y)\xi &= (\bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_Y JZ)^\perp)^\perp - (\bar{\nabla}_Y(\bar{\nabla}_X JZ)^\perp)^\perp - (\bar{\nabla}_{[X, Y]}(JZ))^\perp \\ &= (\bar{\nabla}_X(J(\nabla_Y Z + B(Y, Z))^\perp)^\perp - (\bar{\nabla}_Y(J(\nabla_X Z + B(X, Z))^\perp)^\perp \\ &\quad - (J(\nabla_{[X, Y]}Z + B([X, Y], Z)))^\perp \\ &= (\bar{\nabla}_X(J\nabla_Y Z))^\perp - (\bar{\nabla}_Y(J\nabla_X Z))^\perp - J(\nabla_{[X, Y]}Z) \\ &= J(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z) = JR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle JR(X, Y)Z, JW \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

Оставшиеся слагаемые в правой части (5) можно вычислить так:

$$\begin{aligned} \text{с) } A_\xi X &= D_X \xi - \bar{\nabla}_X \xi = (\bar{\nabla}_X JZ)^\perp - \bar{\nabla}_X JZ = (J(\nabla_X Z + B(X, Z)))^\perp - J\bar{\nabla}_X Z \\ &= J\nabla_X Z - J\bar{\nabla}_X Z = -JB(X, Z). \end{aligned}$$

$$\text{д) } \langle A_\xi X, A_\eta Y \rangle - \langle A_\eta X, A_\xi Y \rangle = \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle - \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle.$$

Таким образом, уравнение Риччи (5) является следствием уравнения Гаусса (3), что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение теоремы 1 справедливо также для лагранжева подмногообразия произвольного кэлерова пространства, поскольку легко проверить, что $\langle \bar{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle$.

2. Рассмотрим задачу изометрического лагранжева погружения орикруга плоскости Лобачевского $H^2 = ((x, y), y > 0)$ с метрикой $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ в $\mathbb{C}^2$.

ТЕОРЕМА 2. *Существует изометрическое класса $\mathbb{C}^\infty$ лагранжевое погружение произвольного орикруга*

$$D^2 = ((x, y), x \in R, y \geq y_0)$$

плоскости Лобачевского H^2 в комплексное пространство $\mathbb{C}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что система уравнений Гаусса–Кодацци–Риччи, определяющих лагранжевое погружение D^2 в (R^4, J) , имеет решение. Пусть $f: D^2 \rightarrow (R^4, J)$ – погружение. Векторы $e_1 = yf_x$, $e_2 = yf_y$ образуют ортонормированный репер касательного пространства $T_{f(x,y)}D^2$. По условию лагранжевости $J(T_{f(x,y)}D^2) = T_{f(x,y)}^\perp D^2$, поэтому векторы $n_1 = Je_1$, $n_2 = Je_2$ образуют ортонормированный базис $T_{f(x,y)}^\perp D^2$. Дифференцируя соотношение $\langle f_y, Jf_x \rangle = 0$, получим $\langle f_{xy}, Jf_x \rangle + \langle f_y, Jf_{xx} \rangle = 0$. Откуда для коэффициентов вторых фундаментальных форм относительно нормалей (n_1, n_2) получаем

$$b_{12}^1 = \langle f_{xy}, n_1 \rangle = \langle f_{xy}, J(yf_x) \rangle = -\langle yf_y, Jf_{xx} \rangle = \langle n_2, f_{xx} \rangle = b_{11}^2.$$

Аналогично находим, что $b_{22}^1 = b_{12}^2$. Таким образом, коэффициенты вторых фундаментальных форм в выбранных базисах симметричны по всем индексам и их можно записать в виде

$$b_{11}^1 = a, \quad b_{12}^1 = b_{11}^2 = b, \quad b_{22}^1 = b_{12}^2 = c, \quad b_{22}^2 = d.$$

Далее, можно найти коэффициенты кручения

$$\begin{aligned} \mu_{12|1} &= \left\langle n_1, \frac{\partial n_2}{\partial x} \right\rangle = \left\langle J(yf_x), J\left(\frac{\partial(yf_y)}{\partial x}\right) \right\rangle = y^2 \langle f_x, f_{xy} \rangle = y^2 \Gamma_{12}^1 f_x^2 = -\frac{1}{y}, \\ \mu_{12|2} &= \left\langle n_1, \frac{\partial n_2}{\partial y} \right\rangle = \left\langle J(yf_x), J\left(\frac{\partial(yf_y)}{\partial y}\right) \right\rangle = \langle yf_x, f_y + yf_{yy} \rangle = y^2 \Gamma_{22}^1 = 0. \end{aligned}$$

Используем уравнения Гаусса и Кодацци в тензорном виде [11; с. 98]

$$R_{lijk} = \sum_{\sigma} (b_{ik}^\sigma b_{jl}^\sigma - b_{ij}^\sigma b_{kl}^\sigma), \quad (7)$$

$$b_{ij,k}^\rho - b_{ik,j}^\rho = b_{ij}^\sigma \mu_{\sigma\rho|k} - b_{ik}^\sigma \mu_{\sigma\rho|j}, \quad (8)$$

где через $b_{ij,k}^\rho$ обозначены ковариантные производные.

Выпишем уравнения Гаусса и Кодацци в наших обозначениях (уравнение Риччи вследствие лагранжовости погружения совпадает с уравнением Гаусса).

$$\begin{aligned}-\frac{1}{y^4} &= ac - b^2 + bd - c^2, \\ \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{a}{y} + \frac{2c}{y} &= 0, \\ \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{d}{y} &= 0, \\ \frac{\partial d}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{c}{y} &= 0.\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что в области $D^2 = ((x, y), -\infty < x < +\infty, y \geq y_0)$ существует следующее решение:

$$a = \frac{1}{y}, \quad b^2 = \frac{k}{y^2} - \frac{1}{y^4}, \quad c = 0, \quad d = \frac{1}{b} \left(\frac{k}{y^2} - \frac{2}{y^4} \right)$$

с произвольной постоянной $k > 1/y_0^2$, что и требовалось доказать.

3. Рассмотрим вопрос об изометрическом лагранжевом погружении оришара пространства Лобачевского H^3 в комплексное пространство $\mathbb{C}^3$. В модели Пуанкаре в верхнем полупространстве метрика H^3 имеет вид $ds^2 = z^{-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, ненулевые символы Кристоффеля суть

$$\Gamma_{33}^3 = \Gamma_{32}^2 = \Gamma_{31}^1 = -\frac{1}{z}, \quad \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = \frac{1}{z}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Существует изометрическое класса C^∞ лагранжевое погружение произвольного оришара*

$$D^3 = ((x, y, z), x, y \in \mathbb{R}, z \geq z_0)$$

пространства Лобачевского H^3 в комплексное пространство $\mathbb{C}^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем ортонормированный базис касательного пространства $T_{f(x,y,z)}H^3$ лагранжева изометрического погружения $f: H^3 \rightarrow (\mathbb{R}^6, J)$ в виде

$$e_1 = z f_x, \quad e_2 = z f_y, \quad e_3 = z f_z.$$

Векторы $n_i = J e_j$, $i = 1, 2, 3$, образуют ортонормированный базис соответствующего нормального пространства. Как и при доказательстве теоремы 2, можно показать, что коэффициенты вторых фундаментальных форм в данных базисах симметричны по всем трем индексам, что позволяет ввести следующие обозначения:

$$(b_{ij}^1) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, \quad (b_{ij}^2) = \begin{pmatrix} b & d & e \\ d & g & h \\ e & h & k \end{pmatrix}, \quad (b_{ij}^3) = \begin{pmatrix} c & e & f \\ e & h & k \\ f & k & l \end{pmatrix}.$$

Вычисление коэффициентов кручения в данном базисе дает

$$\mu_{13|1} = \left\langle n_1, \frac{\partial n_3}{\partial x} \right\rangle = \langle J(z f_{zx}), J(z f_x) \rangle = z^2 \langle f_{zx}, f_x \rangle = z^2 \Gamma_{13}^1 f_x^2 = -\frac{1}{z}.$$

Аналогично, $\mu_{23|2} = -1/z$, а остальные коэффициенты кручения равны нулю.

Выпишем систему уравнений Гаусса–Кодацци изометрического лагранжева погружения $f: H^3 \rightarrow (\mathbb{R}^6, J)$. Система уравнений Гаусса (7) состоит из следующих шести уравнений:

$$R_{1212} = -\frac{1}{z^4} = ad - b^2 + bg - d^2 + ch - e^2, \quad (9)$$

$$R_{1313} = -\frac{1}{z^4} = af - c^2 + bk - e^2 + cl - f^2, \quad (10)$$

$$R_{2323} = -\frac{1}{z^4} = df - e^2 + gk - h^2 + hl - k^2, \quad (11)$$

$$R_{1323} = 0 = bf - ce + dk - eh + el - fk, \quad (12)$$

$$R_{1232} = 0 = cd - be + eg - dh + fh - ek, \quad (13)$$

$$R_{2131} = 0 = ae - cb + bh - ed + ck - ef. \quad (14)$$

Затем выпишем систему уравнений Кодацци (8) (в скобках указаны значения индексов (ρ, i, j, k)):

$$\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{b}{z} = 0 \quad (\rho = 1, i = 1, j = 2, k = 3), \quad (15)$$

$$\frac{\partial e}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{k}{z} = 0 \quad (\rho = 1, i = 3, j = 2, k = 1), \quad (16)$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{2e}{z} = 0 \quad (\rho = 1, i = 1, j = 1, k = 2), \quad (17)$$

$$\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{a + 2f}{z} = 0 \quad (\rho = 1, i = 1, j = 1, k = 3), \quad (18)$$

$$\frac{\partial d}{\partial z} - \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{d + f}{z} = 0 \quad (\rho = 1, i = 2, j = 2, k = 3), \quad (19)$$

$$\frac{\partial d}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{c - h}{z} = 0 \quad (\rho = 1, i = 2, j = 2, k = 1), \quad (20)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{l}{z} = 0 \quad (\rho = 1, i = 3, j = 3, k = 1), \quad (21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial e}{\partial z} = 0 \quad (\rho = 1, i = 3, j = 3, k = 2), \quad (22)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{f}{z} = 0 \quad (\rho = 2, i = 3, j = 2, k = 1), \quad (23)$$

$$\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{b + k}{z} = 0 \quad (\rho = 2, i = 1, j = 1, k = 3), \quad (24)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{g + 2k}{z} = 0 \quad (\rho = 2, i = 2, j = 2, k = 3), \quad (25)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial d}{\partial y} + \frac{2e}{z} = 0 \quad (\rho = 2, i = 2, j = 2, k = 1), \quad (26)$$

$$\frac{\partial k}{\partial x} - \frac{\partial e}{\partial z} = 0 \quad (\rho = 2, i = 3, j = 3, k = 1), \quad (27)$$

$$\frac{\partial k}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{l}{z} = 0 \quad (\rho = 2, i = 3, j = 3, k = 2), \quad (28)$$

$$\frac{\partial k}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (\rho = 3, i = 3, j = 2, k = 1), \quad (29)$$

$$\frac{\partial l}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{f}{z} = 0 \quad (\rho = 3, i = 3, j = 3, k = 1), \quad (30)$$

$$\frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial k}{\partial z} + \frac{k}{z} = 0 \quad (\rho = 3, i = 3, j = 3, k = 2). \quad (31)$$

При составлении уравнений Кодацци некоторые из них повторяются, например, уравнение с набором индексов $(\rho, i, j, k) = (1223)$ совпадает с уравнением с индексами (2123) . Повторяющиеся уравнения мы не выписываем, кроме того, некоторые из уравнений зависимы, например,

$$(15), (16) \Rightarrow (24), \quad (22), (29) \Rightarrow (27).$$

Поэтому, исключая уравнения (24), (27), получим систему уравнений Гаусса–Кодацци, состоящую из уравнений (9)–(23), (25), (26), (28)–(31).

Непосредственно проверяется, что ее решением являются следующие функции:

$$e = f = k = 0, \quad c = h, \quad c^2 = -\frac{1}{z^4} + \frac{c_0^2}{z^2}, \quad a = \frac{a_0}{z}, \quad b = \frac{b_0}{z},$$

$$d = \frac{d_0}{z}, \quad g = \frac{g_0}{z}, \quad l = c - \frac{1}{cz^4},$$

причем между постоянными a_0, b_0, c_0, d_0, g_0 должна выполняться зависимость $c_0^2 = b_0^2 + d_0^2 - a_0 d_0 - b_0 g_0$. Поскольку функция $c(z)$ определена при $z \geq 1/c_0$, то решение существует в оришаре, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. В. Ефимов, “Непогружаемость полуплоскости Лобачевского”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **30:2** (1975), 83–86.
- [2] Э. Г. Позняк, “Изометрическое погружение в E^3 некоторых некомпактных областей плоскости Лобачевского”, *Матем. сб.*, **102:1** (1977), 3–12.
- [3] Э. Р. Розендорн, *Геометрия*, кн. 3, Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундам. напр., **48**, ВИНТИ, М., 1989.
- [4] И. Х. Сабитов, “Об изометрических погружениях плоскости Лобачевского в E^4 ”, *Сиб. матем. журн.*, **30:5** (1989), 179–186.
- [5] С. Б. Кадомцев, “Невозможность некоторых специальных изометрических погружений пространств Лобачевского”, *Матем. сб.*, **107:2** (1978), 175–198.
- [6] Ж. Кайдасов, Е. В. Шикин, “Об изометрическом погружении в E^3 выпуклой области плоскости Лобачевского, содержащей два орикула”, *Матем. заметки*, **39:4** (1986), 612–617.
- [7] Ю. А. Аминов, “О функционально-вырожденных погружениях плоскости Лобачевского в E^4 ”, *Укр. геом. сб.*, 1990, № 33, 8–18.
- [8] Т. Гарибе, “Двумерные поверхности с постоянной внешней геометрией в E^5 ”, *Укр. геом. сб.*, 1982, № 25, 11–22.
- [9] J. D. Moore, J.-M. Morvan, “On isometric Lagrangian immersions”, *Illinois J. Math.*, **45:3** (2001), 833–849.
- [10] К. Яно, М. Кон, *CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях*, Наука, М., 1990.
- [11] Ю. А. Аминов, *Геометрия подмногообразий*, Наукова думка, Киев, 2002.

Л. А. Масальцев

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина,
Украина
E-mail: masaltsev@univer.kharkov.ua

Поступило

07.09.2006

Исправленный вариант

08.11.2007