Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Иванова, В. И. Ушаков, Вторая краевая задача для псевдопараболического уравнения в нецилиндрической области, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 1, 48–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm403>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 03:01:18

УДК 517.945.9

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

М. В. Иванова, В. И. Ушаков

Работа посвящена исследованию разрешимости второй смешанной задачи в нецилиндрической области для нестационарного уравнения

$$\operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u_t) - c(x)u_t - b(x)u(x, t) = f(x, t),$$

называемого псевдопараболическим уравнением. Доказываются теоремы существования и единственности решения в случае сужающейся при возрастании времени t области.

Библиография: 4 названия.

В настоящей статье изучаются вопросы существования и единственности решения псевдопараболического уравнения

$$\operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u_t) - c(x)u_t = b(x)u(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

в нецилиндрической области.

Такого вида уравнения возникают в теории фильтрации жидкости (уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной), в теории влагопереноса в почве (уравнение Аллера), теории теплопроводности в среде с “двумя температурами” (уравнение Чена–Гуртина) и многих других.

Изучению краевых задач для псевдопараболических уравнений в цилиндрических областях посвящено большое число работ (например, [1], [2]). Краевые задачи в нецилиндрических областях для параболического уравнения были рассмотрены одним из авторов в работе [3]. В данной работе рассматривается случай, когда задача поставлена для данного уравнения в “сужающейся” области; также был исследован случай “расширяющейся” области [4].

Рассмотрим область $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим через Ω_τ проекцию сечения области Q плоскостью $t = \tau$, $Q_T = \{(x, t) \in Q \mid t \in [0, T]\}$ на координатную плоскость $\{t = 0\}$.

Напомним стандартные определения: $W_2^{1,0}(Q_T)$ – гильбертово пространство, состоящее из элементов $f(x, t)$ пространства $L_2(Q_T)$, имеющих квадратично суммируемые по Q_T обобщенные производные $\partial f / \partial x_i$, $i = 1, \dots, n$.

Норма в этом пространстве

$$\|f(x, t)\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}^2 = \int_{Q_T} (f^2(x, t) + (\nabla f(x, t))^2) dx dt,$$

где $W_2^{0,1}(Q_T)$ – гильбертово пространство, состоящее из элементов $f(x, t)$ пространства $L_2(Q_T)$, имеющих квадратично суммируемые по Q_T обобщенные производные $\partial f / \partial t$ с нормой

$$\|f(x, t)\|_{W_2^{0,1}(Q_T)}^2 = \int_{Q_T} \left(f^2(x, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 \right) dx dt.$$

Будем говорить, что область Q_T *сужается*, если при любых t_1, t_2 таких, что $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, $\Omega_{t_2} \subset \Omega_{t_1}$ (Ω_0 предполагается не пустой и ограниченной).

Рассмотрим краевую задачу в “криволинейном цилиндре” Q_T для псевдопараболического уравнения с переменными коэффициентами:

$$\operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u_t(x, t)) - c(x)u_t(x, t) = b(x)u(x, t) + f(x, t), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u_t}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где Γ – боковая поверхность Q_T , $\Gamma = (x, t) \in \partial Q \mid t \in (0, T)$ а n – внешняя нормаль к Ω_t .

Потребуем выполнения дополнительных условий:

- (i) функция $\varphi(x) \in L_2(\Omega_0)$ такая, что $\nabla \varphi(x) \in L_2(\Omega_0)$, функция $f(x, t) \in L_2(Q_T)$;
- (ii) функции $b(x), c(x), k(x)$ измеримые на Ω_0 и такие, что $\forall x \in \Omega_0$

$$0 < b \leq b(x) \leq B, \quad 0 < c \leq c(x) \leq C, \quad 0 < k \leq k(x) \leq K;$$

- (iii) часть границы Q_T , лежащую в полупространстве $t > 0$, можно представить в виде $\Gamma = \{(x, \psi(x)) \mid x \in \Omega_0\}$, $\psi(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, где $\psi(x)$ – гладкая функция, $\nabla \psi(x) \neq 0$.

Целью работы является доказательство существования и единственности обобщенного решения этой задачи.

Обобщенным решением задачи (1)–(3) в Q_T будем считать функцию $u(x, t) \in W_2^{0,1}(Q_T)$, для которой $u_t(x, t) \in W_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} k(x) \nabla u_t(x, t) \nabla v(x, t) dx dt - \int_{Q_T} c(x) v(x, t) u_t(x, t) dx dt \\ & = \int_{Q_T} b(x) v(x, t) u(x, t) dx dt + \int_{Q_T} f(x, t) v(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (4)$$

для любой пробной функции $v(x, t) \in W_2^{1,0}(Q_T)$ и удовлетворяющую начальному условию (2).

ТЕОРЕМА. Пусть область Q_T сужается и выполняются условия (i), (ii), (iii). Тогда решение задачи (1)–(3) существует и единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в $L_2(\Omega_0)$ такой, что для всех $t \in [0, T]$ система $\varphi(x)$ линейно независима в $L_2(\Omega_t)$. Например, системе $\varphi(k)$ можно получить процессом ортогонализации из системы одночленов $\{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}, \dots, x_n^{\alpha_n}\}$, где α_i целые неотрицательные числа. Отметим, что $\forall \tau \in [0, T]$ система $\{\varphi_k \mid \Omega_{\tau}\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом в $L_2(\Omega_{\tau})$ (не обязательно, конечно, ортонормированным).

Приближенное решение будем искать в виде

$$u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \varphi_k(x),$$

где коэффициенты $c_k^N(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^N \dot{c}_k^N(t) \int_{\Omega_t} (k(x) \nabla \varphi_k(x) \nabla \varphi_i(x) + c(x) \varphi_k(x) \varphi_i(x)) dx \\ & = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \int_{\Omega_t} b(x) \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx + \int_{\Omega_t} f(x, t) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (5)$$

с начальными условиями

$$c_i(0) = (\varphi(x), \varphi_i(x))_{L_2(\Omega_0)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Получили линейную неоднородную систему из N дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно N неизвестных $c_i(t)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \alpha_{ki}(t) \dot{c}_k(t) &= \sum_{k=1}^N \beta_{ki}(t) c_k(t) + f_i(t), \quad i = 1, \dots, N, \\ \alpha_{ki}(t) &= - \int_{\Omega_t} (k(x) \nabla \varphi_k(x) \nabla \varphi_i(x) + c(x) \varphi_k(x) \varphi_i(x)) dx, \\ \beta_{ki}(t) &= \int_{\Omega_t} b(x) \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx, \quad f_i(t) = \int_{\Omega_t} f(x, t) \varphi_i(x) dx, \end{aligned} \quad (7)$$

причем матрица $\{\alpha_{ij}\}$ обратима в силу выбора системы функций $\{\varphi_k\}$. Следовательно, система дифференциальных уравнений (7) с начальными условиями (6) имеет единственное решение. Это решение определено на всем отрезке $[0, T]$.

Покажем ограниченность норм $\|u^N(x, t)\|_{W_2^{0,1}(Q_T)}$, $\|u_t^N(x, t)\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}$. Для этого умножим уравнение (5) на $c_i(t)$, просуммируем от 1 до N и проинтегрируем от 0 до T :

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} (k(x) \nabla u_t^N(x, t) \nabla u^N(x, t) + c(x) u_t^N(x, t) u^N(x, t)) dx dt \\ & = \int_{Q_T} b(x) (u^N(x, t))^2 dx dt + \int_{Q_T} f(x, t) u^N(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Учитывая (ii) и интегрируя неравенства по времени, получим

$$\begin{aligned}\|u^N(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 &\leq \frac{K}{b} \|\nabla \varphi(x)\|_{L_2(\Omega_0)}^2 + \frac{C}{b} \|\varphi(x)\|_{L_2(\Omega_0)}^2 + \frac{1}{b^2} \|f(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2, \\ \|\nabla u^N(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 &\leq \frac{KT}{k} \left(1 + \frac{1}{b}\right) \|\nabla \varphi(x)\|_{L_2(\Omega_0)}^2 + \frac{CT}{k} \left(1 + \frac{1}{b}\right) \|\varphi(x)\|_{L_2(\Omega_0)}^2 \\ &\quad + \frac{T}{k} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{8}\right) \|f(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2.\end{aligned}$$

Умножив уравнение (5) на $\dot{c}_i(t)$, просуммируем от 1 до N и проинтегрируем полученное выражение от 0 до T ; получим

$$\begin{aligned}& - \int_{Q_T} (k(x)(\nabla u_t^N(x, t))^2 + c(x)(u_t^N(x, t))^2) dx dt \\ &= \int_{Q_T} b(x) u_t^N(x, t) u^N(x, t) dx dt + \int_{Q_T} f(x, t) u_t^N(x, t) dx dt.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\|u_t^N(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 &\leq \frac{B}{c} \|\varphi(x)\|_{L_2(\Omega_0)}^2 + \frac{1}{c^2} \|f(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2, \\ \|\nabla u_t^N(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 &\leq \frac{B}{k} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{c}\right) \|\varphi(x)\|_{L_2(\Omega_0)}^2 + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{c^2}\right) \|f(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2.\end{aligned}$$

На основе полученных оценок можем оценить интересующие нас нормы:

$$\begin{aligned}\|u^N(x, t)\|_{W_2^{0,1}(Q_T)}^2 &= \|u^N(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|u_t^N(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 \\ &\leq \frac{K}{b} \|\nabla \varphi(x)\|_{L_2(\Omega_0)}^2 + \left(\frac{C}{b} + \frac{B}{c}\right) \|\varphi(x)\|_{L_2(\Omega_0)}^2 + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \|f(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2, \\ \|u_t^N(x, t)\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}^2 &= \|u_t^N(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|\nabla u_t^N(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 \\ &\leq B \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{kc} + \frac{1}{c}\right) \|\varphi(x)\|_{L_2(\Omega_0)}^2 + \left(\frac{1}{c^2 k} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{c^2}\right) \|f(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2\end{aligned}$$

и, кроме этого,

$$\begin{aligned}\|u^N(x, t)\|_{W_2^1(Q_T)}^2 &= \|u^N(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|u_t^N(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|\nabla u^N(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 \\ &\leq \left(\frac{KT}{k} + \frac{K}{b} + \frac{KT}{kb}\right) \|\nabla \varphi(x)\|_{L_2(\Omega_0)}^2 + \left(\frac{CT}{k} + \frac{CT}{bk} + \frac{C}{b} + \frac{B}{c}\right) \|\varphi(x)\|_{L_2(\Omega_0)}^2 \\ &\quad + \left(\frac{T}{8k} + \frac{T}{b^2 k} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \|f(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2,\end{aligned}$$

т.е. нормы $u^N(x, t)$ и $u_t^N(x, t)$ ограничены независимо от N . Следовательно, можно выбрать подпоследовательность $\{u^{N_k}(x, t)\}_{k=1}^\infty$ такую, что

$$u^{N_k}(x, t) \rightharpoonup u(x, t) \quad \text{в } W_2^{0,1}(Q_T), \quad u_t^{N_k}(x, t) \rightharpoonup u_t(x, t) \quad \text{в } W_2^{1,0}(Q_T)$$

к некоторой функции $u(x, t) \in W_2^{0,1}(Q_T)$, производная которой $u_t(x, t) \in W_2^{1,0}(Q_T)$. Рассмотрим функцию $v(x, t) \in W_2^{1,0}(Q_T)$ вида

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^M a_k(t) \varphi_k(x). \quad (8)$$

Умножим уравнение (5) на $a_k(t)$, просуммируем от 1 до M и проинтегрируем от 0 до T . Получим

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} k(x) \nabla u_t^{N_k}(x, t) \nabla v(x, t) dx dt - \int_{Q_T} c(x) v(x, t) u_t^{N_k}(x, t) dx dt \\ & = \int_{Q_T} b(x) v(x, t) u^{N_k}(x, t) dx dt + \int_{Q_T} f(x, t) v(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

В силу приведенных выше рассуждений можно перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$. При этом получим

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} k(x) \nabla u_t(x, t) \nabla v(x, t) dx dt - \int_{Q_T} c(x) v(x, t) u_t(x, t) dx dt \\ & = \int_{Q_T} b(x) v(x, t) u(x, t) dx dt + \int_{Q_T} f(x, t) v(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

То есть тождество из определения обобщенного решения верно для всех функций вида (8). Но эти линейные комбинации составляют в $W_2^{1,0}(Q_T)$ плотное множество. Следовательно, оно верно и при любой пробной функции $v(x, t) \in W_2^{1,0}(Q_T)$.

Согласно теоремам вложения из любой последовательности $\{u_m(x, t)\}$ такой, что нормы $\|u_m(x, t)\|_{W_2^1(Q_T)}$ ограничены, можно выбрать подпоследовательность, следы которой на Ω_0 сходятся в $L_2(\Omega_0)$, сходящуюся в $L_2(\Omega_0)$. Значит, можно считать, что

$$u^N(x, 0) \rightharpoonup u(x, 0) \quad \text{в } L_2(\Omega_0).$$

Причем $u(x, 0) = \varphi(x)$, так как $u^N(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(0) \varphi_k(x) \rightarrow \varphi(x)$ в $L_2(\Omega_0)$ по свойствам ряда Фурье. Следовательно, $u(x, 0) = \varphi(x)$, т.е. функция $u(x, t)$, удовлетворяет определению обобщенного решения нашей задачи.

Доказательство единственности обобщенного решения проведем от противного. Предположим, что $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ – два различных решения нашей задачи. Тогда $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ также является решением задачи (1)–(3) с $f(x, t) \equiv 0$ в Q_T и $\varphi(x) \equiv 0$ и удовлетворяет интегральному тождеству (5):

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} k(x) \nabla u_t(x, t) \nabla v(x, t) dx dt - \int_{Q_T} c(x) v(x, t) u_t(x, t) dx dt \\ & = \int_{Q_T} b(x) v(x, t) u(x, t) dx dt + \int_{Q_T} f(x, t) v(x, t) dx dt \quad \forall v(x, t) \in W_2^{1,0}(Q_T). \end{aligned}$$

Оценим $\|u(x, t)\|_{W_2^{0,1}(Q_T)}$ и $\|u_t(x, t)\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}$. Для этого вместо $v(x, t)$ возьмем $u_t(x, t)$ и подставим в интегральное тождество. Подстановка корректна, так как по определению обобщенного решения $u_t(x, t) \in W_2^{1,0}(Q_T)$

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} k(x)(\nabla u_t(x, t))^2 dx dt - \int_{Q_T} c(x)(u_t(x, t))^2 dx dt \\ & = \int_{Q_T} b(x)u_t(x, t)u(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Отсюда легко получить следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|\nabla u_t(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 & \leq \frac{1}{2k} B \|\varphi(x)\|_{L_2(\Omega_0)}^2 + \frac{1}{2ck} \|f(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2, \\ \|u_t(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 & \leq \frac{1}{c} B \|\varphi(x)\|_{L_2(\Omega_0)}^2 + \frac{1}{c^2} \|f(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2, \\ \|u(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 & \leq \frac{BT}{b} \left(1 + \frac{1}{c}\right) \|\varphi(x)\|_{L_2(\Omega_0)}^2 + \frac{T}{b} \left(1 + \frac{1}{c^2}\right) \|f(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\|_{W_2^{0,1}(Q_T)}^2 & = \|u(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|u_t(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 \\ & \leq B \left(\frac{T}{b} + \frac{T}{bc} + \frac{1}{c} \right) \|\varphi(x)\|_{L_2(\Omega_0)}^2 + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{T}{b} + \frac{T}{bc^2} \right) \|f(x, t)\|_{L_2(Q_T)}^2 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$, т.е. решение задачи единственно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.
- [2] Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева // Сиб. матем. ж. 1990. Т. 31. № 5. С. 109–119.
- [3] Ушаков В. И. Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области // Матем. сб. 1980. Т. 3. № 1. С. 95–115.
- [4] Иванова М. В. Вторая краевая задача для уравнения типа Соболева в нецилиндрической области // “Понтрягинские чтения–X”. Тез. докл. Воронеж: ВГУ, 1999. С. 114.

Челябинский государственный университет
E-mail: marina@csu.ru

Поступило
30.01.2001