Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ф. Зак, К вопросу об унирациональности кватрик над незамкнутыми полями, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 1, 40–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4030>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 11:14:18

К вопросу об унирациональности квартик над незамкнутыми полями

Н. Ф. Зак

Мы приводим примеры унирациональных над алгебраически незамкнутым полем $\mathbb{k}$ гладких гиперповерхностей четвертой степени, не содержащих определенных над $\mathbb{k}$ прямых. В отличие от других методов доказательства унирациональности квартик, наш метод не использует лежащих на них линейных пространств.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Вопрос об унирациональности рационально связных алгебраических многообразий относится к числу фундаментальных и, в то же время, мало изученных вопросов алгебраической геометрии. До сих пор неизвестно ни одного примера неунирационального многообразия Фано. В частности, неизвестно, существует ли неунирациональная гладкая трехмерная квартика. Все известные автору примеры гладких унирациональных многообразий, не являющихся унирациональными над алгебраически незамкнутым полем $\mathbb{k}$, доставляют многообразия, не имеющие $\mathbb{k}$ -точек (см. [1], [2]).

Пусть X – алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{k} \subset \bar{\mathbb{k}}$ характеристики нуль, где $\bar{\mathbb{k}}$ – алгебраическое замыкание поля $\mathbb{k}$. Ниже мы будем обозначать через $\bar{O}$ алгебраическое замыкание $O \times_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}$ объекта O (поля, многообразия или отображения), определенного над $\mathbb{k}$. Все рассматриваемые нами многообразия по умолчанию предполагаются определенными над $\mathbb{k}$. Мы называем многообразие X *неособым*, если неособо многообразие $\bar{X}$. Грассманиан прямых в $\mathbb{P}^n$ мы обозначаем через $\mathbb{G}(1, n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Многообразие X называется $\mathbb{k}$ -*унирациональным* (или *унирациональным над $\mathbb{k}$*), если поле $\mathbb{k}(X)$ является подполем чисто трансцендентного расширения поля $\mathbb{k}$, или, другими словами, если существует доминантное рациональное отображение $\mathbb{P}^N \dashrightarrow X$, определенное над $\mathbb{k}$. Многообразие X называется *унирациональным*, если многообразие $\bar{X}$ унирационально над $\bar{\mathbb{k}}$.

В работе [3] доказывается унирациональность гиперповерхностей $H_d \subset \mathbb{P}^n$ степени d для достаточно большого n . Поскольку соответствующие оценки на число n далеки от оптимальных, представляет интерес разработка других способов доказательства унирациональности гиперповерхностей. Метод, используемый в [3], был впервые предложен Морином в [4] и состоит в нахождении линейного пространства $L^m \subset H_d$ некоторой положительной размерности m и рассмотрении семейства гиперповерхностей $H_{d-1} \subset L^{m+1}$, полученных пересечением всевозможных подпространств $L^{m+1} \supset L^m \subset H_d$.

В разделе 1.2 работы [3] авторы пишут, что им не известен ни один метод доказательства унирациональности неособых гиперповерхностей H_d степени $d > 3$, который не использует линейных подпространств положительной размерности, лежащих на H_d . В частности, не известен ни один пример неособой унирациональной над $\mathbb{k}$ гиперповерхности $H_4 \subset \mathbb{P}^n$, не содержащей прямых. В нескольких работах Маркизио (см., например, [5]) развивается другой метод доказательства унирациональности кватрик, предложенный Сегре в [6]. Этот метод использует существование прямых на кватрике и не решает поставленной выше задачи.

В настоящей работе мы строим примеры неособых вещественных унирациональных кватрик, не содержащих вещественных прямых.

ТЕОРЕМА 1.2. *Для всякого $n \geq 8$ существует неособая унирациональная над $\mathbb{R}$ гиперповерхность $H_4 \subset \mathbb{P}^n$ степени четыре, не содержащая определенных над $\mathbb{R}$ прямых.*

Настоящая работа имеет следующую структуру. В разделе 2 мы доказываем предложение 2.2, дающее достаточное условие $\mathbb{k}$ -унирациональности полных пересечений квадрики и кубики. В разделе 3 с помощью бирациональной перестройки в пересечение квадрики и кубики с нужными свойствами мы доказываем предложение 3.1 об унирациональности над $\mathbb{k}$ общих особых четырехмерных кватрик, содержащих $\mathbb{k}$ -рациональную трехмерную квадратичную с кратностью два.¹ В разделе 4 мы доказываем предложение 4.1 о $\mathbb{k}$ -унирациональности общих многомерных кватрик, содержащих $\mathbb{k}$ -рациональную трехмерную квадратичную с кратностью два, сводя этот вопрос к кватрикам, рассмотренным в разделе 3. В разделе 5 мы доказываем существование вещественных кватрик, удовлетворяющих условию предложения 4.1 и не содержащих прямых, что завершает доказательство теоремы 1.2.

2. $\mathbb{k}$ -унирациональные полные пересечения квадрики и кубики. Унирациональность неособого пересечения квадрики и кубики $\mathcal{X}_{23} \subset \mathbb{P}^n$ при $n \geq 5$ хорошо известна, см. набросок доказательства в примере 10.1.3 в [7]. Однако стандартное доказательство не обобщается на случай незамкнутого поля, поскольку использует семейство плоскостей, лежащих на многомерной квадратике.

В данном разделе мы получим достаточное условие $\mathbb{k}$ -унирациональности неприводимого полного пересечения квадрики и кубики $\mathcal{X}_{23} \subset \mathbb{P}^n$. Для упрощения изложения предположим, что на $\mathcal{X}_{23}$ отсутствуют особые точки x кратности $\text{mult}_x(\mathcal{X}_{23}) > 2$. Заметим, что в этом случае касательное пространство $T_x(\mathcal{X}_{23})$ в произвольной точке $x \in \mathcal{X}_{23}$ имеет размерность не выше $n - 1$ (в противном случае соответствующие квадратика и кубика особы в x и $\text{mult}_x(\mathcal{X}_{23}) \geq 4$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если $\text{mult}_x \mathcal{X}_{23} > 2$, $\dim \mathcal{X}_{23} > 1$ и $\mathcal{X}_{23}$ не является конусом, то бирациональная проекция $\pi_x: \mathcal{X}_{23} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ отображает $\mathcal{X}_{23}$ на неприводимую гиперповерхность $H \subset \mathbb{P}^{n-1}$ степени не больше трех, которая, как известно, унирациональна над $\mathbb{k}$, если она имеет гладкую точку и не является кубическим конусом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Рассмотрим пересечение $\mathcal{X}_{23} \subset \mathbb{P}^n$, $n > 5$, кубики $\mathcal{C}$ и неособой квадрики $\mathcal{Q}$, имеющее изолированные особенности кратности не выше двух и содержащее $\mathbb{k}$ -унирациональную поверхность $S \not\subset \text{Sing } \mathcal{X}_{23}$. Если поверхность S*

¹Здесь и далее под этой фразой понимается тот факт, что проективная оболочка данной квадрики пересекает кватрику по многообразию, содержащему эту квадратичную с кратностью два.

замечается таким семейством $\mathcal{F}$ прямых, что через общую точку $s \in S$ проходит единственная прямая $l_s \in \mathcal{F}$, то $\mathcal{X}_{23}$ унирационально над $\mathbb{k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В общей точке $s \in S$ рассмотрим конус

$$\mathcal{K}_s = \mathcal{Q} \cap T_s(\mathcal{Q}) \cap T_s(\mathcal{C}) = \mathcal{Q} \cap T_s(\mathcal{X}_{23}).$$

Поскольку $S \not\subset \text{Sing } \mathcal{X}_{23}$, в общей точке $\dim \mathcal{K}_s = n - 3$. Пусть $\mathcal{X} \subset \mathbb{G}(1, n) \times S$ — замыкание семейства образующих конусов $\mathcal{K}_s$. Многообразие $\mathcal{X}$ является расслоением на $(n - 4)$ -мерные квадрики Q_s (лежащие на плюккеровом вложении грассманиана $\mathbb{G}(1, n)$) над S , а прямые l_s определяют рациональное сечение $\varphi: S \dashrightarrow \mathcal{X}$ этого расслоения.

ЛЕММА 2.3. Для общей точки $s \in S$ квадратика Q_s неприводима, а точка $\varphi(l_s) \in Q_s$ неособа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку квадратика $\mathcal{Q}$ неособа, многообразие $\mathcal{Q} \cap T_s(\mathcal{Q})$ является конусом над неособой $(n - 3)$ -мерной квадратикой Q^{n-3} . При $n > 5$ квадратика Q_s неприводима как гиперплоское сечение квадратика Q^{n-3} .

Поскольку квадратика $Q^{n-2} = T_s(\mathcal{Q}) \cap \mathcal{Q}$ является конусом с единственной вершиной в точке s , то ее гиперплоское сечение $\mathcal{K}_s = Q^{n-2} \cap T_s(\mathcal{C})$ может быть конусом над особой квадратикой, только если $T_s(\mathcal{C})$ касается конуса Q^{n-2} вдоль образующей. Следовательно, Q_s особа в $\varphi(l_s)$, только если

$$l_s \subset \text{Sing}(T_s(\mathcal{Q}) \cap \mathcal{X}_{23}).$$

Если для общей точки $s' \in l_s$ квадратика $Q_{s'}$ особа в $\varphi(l_{s'}) = \varphi(l_s)$, то касательное пространство к $\mathcal{X}_{23}$ в каждой точке прямой l_s совпадает с объемлющим пространством, а значит, $l_s \subset \text{Sing}(\mathcal{X}_{23})$. Если последнее верно для общей точки $s \in S$, то $S \subset \text{Sing } \mathcal{X}_{23}$, что противоречит условию предложения 2.2.

С учетом леммы 2.3 многообразие $\mathcal{X}$ унирационально над $\mathbb{k}$ ввиду следующего простого факта.

ЛЕММА 2.4. Пусть S — $\mathbb{k}$ -унирациональное многообразие, $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ — расслоение, общий слой которого является неприводимой квадратикой Q_s . Тогда $\mathcal{X}$ унирационально над $\mathbb{k}$ при наличии рационального (т.е. определенного на открытом подмножестве) сечения $l_s \in Q_s$ такого, что для общей точки $s \in S$ точка $\varphi(l_s) \in Q_s$ неособа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из унирациональности неприводимой квадратика $\tilde{Q}_s$ над полем функций $\mathbb{k}(S)$ на многообразии S при условии наличия гладкой $\mathbb{k}(S)$ -точки на $\tilde{Q}_s$ (подполе чисто трансцендентного расширения поля функций $\mathbb{k}(t_1, \dots, t_m)$ является, очевидно, подполем чисто трансцендентного расширения поля $\mathbb{k}$).

Общая образующая $l \subset \mathcal{K}_s$ касается $\mathcal{C}$ в s , а значит, поскольку $\mathcal{X}_{23}$ не является конусом (кратность особенности в вершине такого конуса была бы равна шести), пересекает $\mathcal{X}_{23}$ еще ровно в одной точке s_l . Сопоставляя прямой l точку s_l , мы получаем рациональное отображение $f: \mathcal{X} \dashrightarrow \mathcal{X}_{23}$. Для доказательства предложения 2.2 нам достаточно проверить доминантность отображения f . Ввиду $\mathbb{k}$ -унирациональности $\mathcal{X}$ образующие конусов $\mathcal{K}_s$ всюду плотны в многообразии образующих конусов $\mathcal{K}_s$, а значит, достаточно проверить доминантность отображения $\tilde{f}$, которая, в свою очередь, непосредственно вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 2.5. *Многообразие $\overline{\mathcal{Q}}'$, заметаемое конусами $\overline{\mathcal{K}}_s \subset \overline{\mathcal{Q}}$ при $s \in \overline{S}$, совпадает с квадратикой $\overline{\mathcal{Q}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\dim \overline{\mathcal{Q}}' \leq n - 3$, то для двух общих точек $s, s' \in \overline{S}$ справедливо $\overline{\mathbb{K}}_s = \overline{\mathbb{K}}_{s'}$, а значит, общий конус $\mathcal{K}_s$ особ вдоль всей поверхности S и основание Q_s общего конуса также особо, что противоречит лемме 2.3. Предположим, что $\dim \overline{\mathcal{Q}}' = n - 2$. Поскольку на $\overline{\mathcal{Q}}'$ лежит $(2 \cdot (n - 2) - 3)$ -мерное семейство прямых, $\overline{\mathcal{Q}}'$ является либо трехмерной квадратикой, либо одномерным семейством проективных пространств $\mathbb{P}^{n-3}$ (см. [8]). Второй случай невозможен, поскольку при $n > 5$ неособая квадратика $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^n$ не содержит $(n - 3)$ -мерных подпространств.

В первом случае для общей точки $s \in \overline{S}$ справедливо $\overline{\mathcal{K}}_s = T_s(\overline{\mathcal{Q}}') \cap \overline{\mathcal{Q}}'$, а значит,

$$\overline{S} \subset \text{Sing}(\overline{\mathcal{C}} \cap \overline{\mathcal{Q}}').$$

Заметим, что из соображений непрерывности² для всякой точки $x \in \overline{S} \cap \text{Sing} \overline{\mathcal{X}}_{23}$ выполнено $\overline{\mathcal{Q}}' \subset T_x(\overline{\mathcal{X}}_{23})$. Таким образом, $(n - 1)$ -мерная проективная оболочка квадратика $\overline{\mathcal{Q}}'$ касается $(n - 2)$ -мерного многообразия $\overline{\mathcal{X}}_{23}$ вдоль поверхности $\overline{S}$, что противоречит теореме Зака о касательных (см. следствие 1.8 в [9]). Итак, $\dim \overline{\mathcal{Q}}' = n - 1$, а значит, $\overline{\mathcal{Q}}' = \overline{\mathcal{Q}}$, что и требовалось доказать.

Будучи образом $\mathbb{k}$ -унирационального многообразия $\mathcal{X}$ при доминантном рациональном отображении, $\mathcal{X}_{23}$ унирационально над $\mathbb{k}$, что доказывает предложение 2.2.

3. $\mathbb{k}$ -унирациональные четырехмерные кварталки. Основной задачей данного раздела является доказательство следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Пусть Q – трехмерная неособая $\mathbb{k}$ -рациональная квадратика.³ Общая кварталка $Y_4 \subset \mathbb{P}^5$, содержащая Q с кратностью два, унирациональна над $\mathbb{k}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ниже мы докажем вспомогательный результат, справедливый в более общих предположениях для кварталков произвольной размерности. Рассмотрим неприводимую нормальную кварталку $Y_4 \subset \mathbb{P}^{n-1}$, $n > 3$, содержащую (не обязательно с кратностью два) $(n - 3)$ -мерную неособую квадратикой Q (которая не обязательно является рациональной над $\mathbb{k}$).

Рассмотрим конус $\mathcal{K}_{Y_4} \subset \mathbb{P}^n$ над кварталкой Y_4 с вершиной в общей точке $x \in \mathbb{P}^n$. Пусть $\mathcal{K}_Q \subset \mathcal{K}_{Y_4}$ – конус над квадратикой Q с той же вершиной. Пусть $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^n$ – неособая квадратика, содержащая $\mathcal{K}_Q$. Следующее предложение сводит вопрос о $\mathbb{k}$ -унирациональности Y_4 к вопросу о $\mathbb{k}$ -унирациональности полного пересечения квадратика и кубики $\mathcal{X}_{23} \subset \mathbb{P}^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *$Y_4 = \pi_x(\mathcal{X}_{23})$, где $\mathcal{X}_{23} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ является полным пересечением $\mathcal{Q}$ и некоторой кубики $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}} \subset \mathbb{P}^n$, а π_x – бирациональная проекция из особой точки $x \in \mathcal{X}_{23}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пересечение $\mathcal{Q} \cap \mathcal{K}_{Y_4}$. Так как $\deg(\overline{\mathcal{Q} \cap \mathcal{K}_{Y_4}}) = 8$,

$$\mathcal{Q} \cap \mathcal{K}_{Y_4} = \mathcal{K}_Q \cup \mathcal{X}_{23},$$

²Эти соображения применимы при $\overline{\mathbb{k}} = \mathbb{C}$, а в остальных случаях вывод будет таким же согласно принципу Лефшеца.

³Квадратика рациональна над $\mathbb{k}$ тогда и только тогда, когда она неприводима и имеет неособую точку.

где $\overline{\mathcal{X}}_{23} \subset \overline{\mathcal{Q}}$ – дивизор степени шесть. По теореме Лефшеца многообразие $\overline{\mathcal{X}}_{23}$ является пересечением квадрики $\overline{\mathcal{Q}}$ с некоторой кубикой⁴ $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{Q}} \subset \mathbb{P}^n$. Ввиду того, что $\overline{\mathcal{X}}_{23}$ определено над $\mathbb{k}$, несложно показать, что кубикой $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{Q}}$ тоже можно выбрать определенной над $\mathbb{k}$, поскольку соответствующий идеал должен быть порожден квадрикой и кубикой над $\mathbb{k}$. Так как квадрика $\mathcal{Q}$ не является конусом с вершиной в x , проекция $\pi_x: \overline{\mathcal{X}}_{23} \dashrightarrow \overline{Y}_4$ из точки x сюръективна. В нашей ситуации, если $\overline{\mathcal{X}}_{23}$ приводимо, то оно является объединением квадрики и полного пересечения двух квадрик (остальные варианты противоречат теореме Лефшеца), что противоречит нормальности Y_4 . Если же $\overline{\mathcal{X}}_{23}$ неприводимо, то оно не может покрывать многообразие степени четыре. Поэтому $x \in \mathcal{X}_{23}$, причем точка $x \in \mathcal{X}_{23}$ имеет кратность два, так как при проекции из нее степень $\mathcal{X}_{23}$ падает на два. Таким образом, $\mathcal{X}_{23}$ бирационально проектируется на Y_4 из особой точки $x \in \mathcal{X}_{23}$.

Вернемся к нашему случаю общей кватрики $Y_4 \subset \mathbb{P}^5$, содержащей $\mathbb{k}$ -рациональную неособую трехмерную квадрику Q с кратностью два. Такая кватрика нормальна, поскольку согласно лемме 5.1 множество ее особенностей имеет коразмерность два. Поэтому с учетом предложения 3.2 для завершения доказательства предложения 3.1 нам осталось найти такую неособую квадрику $\mathcal{Q} \supset \mathcal{K}_Q$, что соответствующее многообразие $\mathcal{X}_{23}$ унирационально над $\mathbb{k}$. Заметим, что $T_x(\mathcal{X}_{23}) = T_x(\mathcal{Q})$, так как $\text{mult}_x(\mathcal{X}_{23}) = 2$, а квадрика $\mathcal{Q}$ неособа. Следовательно,

$$T_x(\mathcal{X}_{23}) \cap \mathcal{X}_{23} = \mathcal{K}_Q \cap \mathcal{X}_{23}.$$

В нашей ситуации квадрика Q , в которую, неформально говоря, раздувается точка $x \in \mathcal{X}_{23}$, лежит в гиперплоском сечении касательного конуса $\mathcal{K}_x(\mathcal{X}_{23})$, так что $\mathcal{K}_x(\mathcal{X}_{23}) = \mathcal{K}_Q$. Следовательно, если кубика $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ содержит неособую точку $s \in \mathcal{K}_Q$, то $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ пересекает прямую, соединяющую x и s , по крайней мере, в четырех точках (с учетом кратностей), а значит, $\mathcal{X}_{23}$ содержит эту прямую. В частности, $\tilde{\mathcal{K}}_x = \mathcal{X}_{23} \cap T_x(\mathcal{X}_{23})$ является конусом над пересечением квадрики Q и кубики $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$.

Пусть $C \subset Q$ – $\mathbb{k}$ -рациональная кривая. Если для некоторой неособой квадрики $\mathcal{Q} \supset \mathcal{K}_Q$ кубика $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ содержит C , то согласно сказанному выше соответствующее многообразие $\mathcal{X}_{23}$ содержит ($\mathbb{k}$ -рациональный) конус S над C с вершиной в x , а значит, ввиду предложения 2.2, многообразие $\mathcal{X}_{23}$ унирационально над $\mathbb{k}$ при условии $S \not\subset \text{Sing}(\mathcal{X}_{23})$. Это условие выполняется для общей кватрики $Y_4 \subset \mathbb{P}^5$, содержащей $\mathbb{k}$ -рациональную неособую трехмерную квадрику Q с кратностью два. Действительно, нетрудно показать, что особенности общей кватрики рассматриваемого вида являются обыкновенными двойными, а значит, в них не могут стягиваться прямые, содержащиеся во множестве особенностей многообразия $\mathcal{X}_{23}$.

ЛЕММА 3.3. *Для всякой коники $C \subset Q$ найдется такая неособая квадрика $\mathcal{Q} \supset \mathcal{K}_Q$, что кубика $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ содержит C .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно посчитать, что размерность проективизации линейной системы квадрик $Q \subset \mathbb{P}^6$, содержащих $\mathcal{K}_Q$, равна семи. Кубика $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ может соответствовать не более чем двум квадрикам, поскольку $\mathcal{Q} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{Q}} \cap \mathcal{K}_{Y_4}$, а пересечения кубики с разными квадриками различны. Следовательно, размерность проективизированной линейной системы, высекаемой кубиками $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ на $\mathcal{K}_{Y_4}$, также

⁴Эта кубика определена не однозначно, но произвол в ее выборе не влияет на дальнейшее изложение.

равна семи. Пространство кубик, содержащих данную конику C , имеет коразмерность семь в пространстве всех кубик, а значит, найдется квадрака $\mathcal{Q}$ такая, что $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}} \supset C$.

Если квадрака $\mathcal{Q}$ особа, то $\mathcal{Q}$ является конусом с вершиной в x над квадракой Q_1 такой, что $\mathbb{P}_{Y_4}^5 \supset Q_1 \supset Q$, где $\mathbb{P}_{Y_4}^5$ – проективная оболочка Y_4 . Несложно показать, что существует одномерное семейство (с неполной базой) неособых пятимерных квадратик $\mathcal{Q}' \supset (\mathcal{K}_Q \cup Q_1)$. Заметим, что ограничения $R_{\mathcal{Q}}$ и $R_{\mathcal{Q}'}$ кубик $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ и $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}'}$ на проективную оболочку квартики Y_4 совпадают, поскольку задаются одинаковым условием $Q_1 \cap Y_4 = Q \cup R$. Следовательно, $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}'} \cap \mathcal{Q}_1 = \mathcal{C}_{\mathcal{Q}} \cap \mathcal{Q}_1$, а значит, $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}'} \supset C$, что и требовалось доказать.

Выберем в качестве C произвольную $\mathbb{k}$ -рациональную конику на Q (такие коники существуют ввиду $\mathbb{k}$ -рациональности Q), а в качестве $\mathcal{K}_{23}$ – пересечение $\mathcal{Q} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$, где $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}} \supset C$. Согласно сказанному выше $\mathcal{K}_{23}$ унирационально над $\mathbb{k}$. Поскольку квартака Y_4 бирациональна $\mathcal{K}_{23}$, предложение 3.1 доказано.

4. $\mathbb{k}$ -унирациональные многомерные квартики.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Общая неособая квартака $H_4 \subset \mathbb{P}^n$, пересекающая четырехмерное пространство $M \subset \mathbb{P}^n$ по $\mathbb{k}$ -унирациональной трехмерной квадраке Q с кратностью два, унирациональна над $\mathbb{k}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ψ_4^n – универсальное расслоение четырехмерных квартик в $\mathbb{P}^n$, т.е. многообразие пар $\{(Y_4, y)\} \subset \mathbb{P}^n$, где $Y_4 \subset \mathbb{P}^n$ – четырехмерная квартака, а $y \in Y_4$ – точка на ней. Рассмотрим семейство $\Lambda \subset \Psi_4^n$ всевозможных сечений $H_4 \cap G$ пятимерными пространствами $G \supset M$, параметризуемых базой $B = \mathbb{P}^{n-5}$.

Заметим, что общий элемент Y_4 семейства Λ неприводим. Действительно, в противном случае он является объединением двух квадратик $Y_4 = \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2$, так как Y_4 не содержит M . Следовательно, $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \subset \text{Sing } Y_4$, т.е. $\dim \text{Sing } Y_4 \geq 3$, а значит, согласно теореме Бертини $\text{Sing } Y_4 = Q$. Следовательно, $\text{Sing } H_4 \supset Q$, что противоречит неособости H_4 .

Поскольку $\Lambda \supset B \times Q$, соответствующая общему слою семейства Λ четырехмерная квартака $\tilde{Y}_4$ над полем функций $\mathbb{k}(B)$ содержит неособую трехмерную квадраку $\tilde{Q}$, определенную над $\mathbb{k}(B)$, с кратностью два и не содержит ее проективной оболочки $\tilde{M} = \mathbb{P}_{\mathbb{k}(B)}^4$. Для всякой $\mathbb{k}$ -точки $q \in Q$ справедливо $\Lambda \supset B \times q$, а значит, на $\tilde{Q}$ есть $\mathbb{k}(B)$ -точки, и $\tilde{Q}$ унирациональна над $\mathbb{k}(B)$. Следовательно, квартака $\tilde{Y}_4$ унирациональна над $\mathbb{k}(B)$ по предложению 3.1, а значит, Λ унирационально над $\mathbb{k}$ (см. аналогичное рассуждение в доказательстве леммы 2.4). Поскольку H_4 бирациональна Λ (они изоморфны вне $M \cap H_4$), предложение 4.1 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Можно показать (см. в [3] общий результат про максимальную вариацию линейных сечений гиперповерхностей малых степеней в соответствующем пространстве модулей), что над алгебраически замкнутым полем неособая квартака в $\mathbb{P}^n$ при достаточно большом n содержит неособую трехмерную квадраку с кратностью два, но не содержит ее линейной оболочки, что дает альтернативное доказательство унирациональности многомерных квартик (другие доказательства унирациональности квартик см. в [3]–[6]).

5. Примеры неособых $\mathbb{k}$ -унирациональных кватрик, не содержащих прямых. Рассмотрим в качестве $\mathbb{k}$ поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел, а в качестве Q – вещественную сферу

$$Q \subset M \subset \mathbb{P}^n, \quad n \geq 8,$$

заданную уравнением

$$f = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$$

в однородных координатах $(x_0 : \dots : x_4)$ на $M = \mathbb{P}^4$. Обозначим через D двойную квадрику Q , т.е. кватрику, заданную в M уравнением $f^2 = 0$. Рассмотрим общую гиперплоскость $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$, не пересекающую D . Заметим, что множество $(n-1)$ -мерных вещественных кватрик, содержащих D и не пересекающих Γ , открыто в аналитической вещественной топологии и не пусто, поскольку содержит, например (для достаточно далекой от D гиперплоскости Γ), кватрику, заданную уравнением $f^2 + x_5^4 + \dots + x_n^4 = 0$. Поскольку $\dim \text{Sing } D = 3$, общая (в топологии Зарисского) $(n-1)$ -мерная вещественная кватрика, содержащая D , неособа согласно следующей простой лемме (доказательство которой мы опускаем).

ЛЕММА 5.1. Пусть $H_d^{N-1} \subset \mathbb{P}^N$ – гиперповерхность степени d над $\mathbb{k}$ такая, что

$$\dim \text{Sing } H_d^{N-1} = m.$$

Тогда для общей лежащей в $\mathbb{P}^{N+k}$ гиперповерхности $H_d^{N+k-1} \supset H_d^{N-1}$ справедливо равенство

$$\dim \text{Sing } H_d^{N+k-1} = m - k.$$

Заметим, что непустое открытое в аналитической топологии множество всегда пересекает непустое открытое в топологии Зарисского множество, а значит, существует неособая кватрика $H_4 \subset \mathbb{P}^n$, содержащая двойную квадрику D , удовлетворяющая условию предложения 4.1 и не пересекающая гиперплоскость Γ . В частности, H_4 не содержит прямых и доставляет пример, доказывающий теорему 1.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. В примерах, доказывающих теорему 1.2, мы используем два свойства поля $\mathbb{R}$. Первое свойство – наличие элемента $r \in \mathbb{R}$, который нельзя представить в виде суммы квадратов вещественных чисел (это свойство необходимо для построения $\mathbb{k}$ -рациональной квадрики Q , не содержащей прямых), а второе – тот факт, что непустое открытое в аналитической топологии множество всегда пересекает непустое множество, открытое в топологии Зарисского. Такие поля, как $\mathbb{R}(t)$, обладают аналогичными свойствами, и для них существуют примеры, аналогичные нашему. Поскольку рациональные точки плотны в открытом множестве в вещественной топологии множества, утверждение теоремы 1.2 справедливо также для полей $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}(t)$.

Автор выражает благодарность С. Галкину, С. Горчинскому, Ф. Л. Заку, В. А. Исковских, Ю. Г. Прохорову и К. Шрамову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Harris, Y. Tschinkel, “Rational points on quartics”, *Duke Math. J.*, **104**:3 (2000), 477–500.
- [2] Ю. И. Манин, М. А. Цфасман, “Рациональные многообразия: алгебра, геометрия, арифметика”, *УМН*, **41**:2 (1986), 43–94.

- [3] J. Harris, B. Mazur, R. Pandharipande, “Hypersurfaces of Low Degree”, *Duke Math. J.*, **95**:1 (1998), 125–160.
- [4] U. Morin, “Sull’unirationalità dell’ipersuperficie algebrica di qualunque ordine e dimensione sufficientemente alta”, *Atti Secondo Congresso Un. Mat. Ital.* (Bologna, 1940), Rome, Edizioni Cremonense, 1942, 298–302.
- [5] M. Marchisio, “The unirationality of some quartic 4-folds”, *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **136** (2002), 17–22.
- [6] B. Segre, “Variazione continua ed omotopia in geometria algebrica”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **50**:1 (1960), 149–186.
- [7] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov, *Algebraic Geometry*, V. Fano Varieties, Encyclopaedia Math. Sci., **47**, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [8] B. Segre, “Sulle V_n contenenti $\infty^{n-k} S_k$. I”, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8), **5** (1948), 193–197; “Sulle V_n contenenti $\infty^{n-k} S_k$. II”, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8), **5** (1948), 275–280.
- [9] F. L. Zak, *Tangents and Secants of Algebraic Varieties*, Transl. Math. Monogr., **127**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

Н. Ф. Зак

Центральный банк РФ

E-mail: mak@mccme.ru

Поступило

18.07.2007

Исправленный вариант

03.02.2008