Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, О нормальных ганкелевых матрицах малых порядков, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 2, 207–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4033>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:41:33

О нормальных ганкелевых матрицах малых порядков

Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов

В предыдущих работах авторов задача описания комплексных $(n \times n)$ -матриц, являющихся одновременно нормальными и ганкелевыми, сведена к системе $n-1$ вещественных уравнений относительно $2n$ неизвестных. Эти уравнения – квадратичные, и существование вещественных решений системы совсем не очевидно. Показано, что при $n = 3$ и $n = 4$ соответствующие системы разрешимы и имеют бесконечно много вещественных решений.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Задача об описании нормальных теплицевых матриц, поставленная и решенная авторами в [1]–[3], привлекла большое внимание в алгебраической литературе. На протяжении десяти лет был предложен ряд ее решений, отличающихся от первоначального (см. [4]–[8]). Само описание имеет замечательно простой вид и дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – комплексная матрица, одновременно нормальная и теплицева. Тогда справедливо хотя бы одно из двух утверждений:

- а) A – матрица вида $\alpha I + \beta H$, где α и β – комплексные числа, H – эрмитова теплицева матрица;
- б) A представляет собой ϕ -циркулянт для некоторого комплексного числа ϕ , по модулю равного единице.

Задача описания нормальных ганкелевых матриц, поставленная в [9], оказалась значительно труднее теплицевой задачи. Несмотря на некоторые продвижения, полученные в [8], [10], [11], она все еще далека от полного решения. Имеющиеся частичные результаты состоят, в основном, в указании конкретных подмножеств класса $\mathcal{NH}_n$ нормальных ганкелевых матриц порядка n . Перечислим эти подмножества.

1. Вещественные ганкелевы матрицы и произвольные их комплексные кратные.
2. Матрицы вида

$$\alpha \mathcal{P}_n + \beta H, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 04-07-90336 и 05-01-00721) и программы фундаментальных исследований отделения математических наук РАН “Вычислительные и информационные проблемы решения больших задач” по проекту “Матричные методы и технологии для задач со сверхбольшим числом неизвестных”.

где

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

есть перьединичная матрица порядка n , а H – произвольная вещественная центросимметричная ганкелева матрица.

3. Блочно-диагональные матрицы вида

$$\alpha H_1 + \beta H_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

где H_1 – верхнетреугольная вещественная ганкелева матрица порядка k , $0 < k < n$, а H_2 – нижнетреугольная вещественная ганкелева матрица порядка $l = n - k$. При этом мы называем H_1 и H_2 соответственно *верхнетреугольной* и *нижнетреугольной ганкелевыми матрицами*, если

$$\{H_1\}_{ij} = 0 \quad \text{при } i + j > k + 1 \quad \text{и} \quad \{H_2\}_{ij} = 0 \quad \text{при } i + j < l + 1.$$

Эти три класса матриц указаны в [9]. К ним в [11] добавлен еще один.

4. Матрицы вида

$$\alpha H + \beta H^{-1}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

где H – невырожденная вещественная верхнетреугольная (или нижнетреугольная) ганкелева матрица.

Все названные классы матриц были первоначально найдены из соображений, различных для каждого класса. Однако в [12] авторы описали новый подход к решению нормальной ганкелевой задачи, позволяющий получить эти классы как частные случаи единой схемы. Вкратце этот подход состоит в следующем.

Сопоставим ганкелевой $(n \times n)$ -матрице H теплицеву матрицу

$$T = H\mathcal{P}_n. \tag{1}$$

Комплексную матрицу T представим в “алгебраической форме”

$$T = \hat{T}_1 + i\hat{T}_2, \tag{2}$$

где

$$\hat{T}_1 = \frac{1}{2}(T + \bar{T}), \quad \hat{T}_2 = \frac{1}{2i}(T - \bar{T}). \tag{3}$$

Как обычно, черта над символом матрицы обозначает операцию поэлементного комплексного сопряжения.

Удобно выделить диагональные части вещественных теплицевых матриц $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$, записывая их в виде

$$\hat{T}_1 = a_0 I + T_1, \quad \hat{T}_2 = b_0 I + T_2. \tag{4}$$

Матрица T_1 имеет нулевую диагональ и полностью определяется внедиагональными элементами первой строки и первого столбца, которые мы обозначим соответственно $a_1, \dots, a_{n-1}$ и $a_{-1}, \dots, a_{-n+1}$. Аналогичные обозначения $b_1, \dots, b_{n-1}$ и $b_{-1}, \dots, b_{-n+1}$ примем для элементов первой строки и первого столбца матрицы T_2 .

ТЕОРЕМА 2. Ганкелева матрица H тогда и только тогда является нормальной, когда соответствующие ей вещественные теплицевы матрицы T_1 и T_2 удовлетворяют соотношению

$$T_2 T_1^t - T_1 T_2^t = a_0(T_2^t - T_2) - b_0(T_1^t - T_1). \quad (5)$$

Верхний индекс t обозначает операцию транспонирования.

Из элементов a_i и b_j , $-n+1 \leq i, j \leq n-1$, определяющих матрицы T_1 и T_2 , составим матрицы

$$F = \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_{n-2} & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$G = \begin{pmatrix} a_{-1} & b_{-1} \\ a_{-2} & b_{-2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{-n+1} & b_{-n+1} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Оказывается, что описанные выше классы 1–4 соответствуют решениям уравнения (5) при дополнительном предположении, что ранг каждой из матриц F и G не превосходит единицы.

Предположим теперь, что хотя бы одна из матриц (6) и (7) имеет ранг 2. Пусть, для определенности,

$$\text{rank } F = 2. \quad (8)$$

Очевидно, что правая часть соотношения (5) является теплицевой матрицей. Поэтому и левая часть, т.е. матрица

$$T_2 T_1^t - T_1 T_2^t, \quad (9)$$

обязана быть теплицевой. Уже это условие (вместо более сильного требования, чтобы T_1 и T_2 удовлетворяли равенству (5)) приводит к соотношению

$$G = FW, \quad (10)$$

где

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (11)$$

есть вещественная (2×2) -матрица с определителем 1:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (12)$$

Таким образом, F и G могут иметь ранг два только одновременно.

Матричное равенство (10) в силу определений (6) и (7) эквивалентно скалярным соотношениям

$$a_{-i} = \alpha a_{n-i} + \gamma b_{n-i}, \quad b_{-i} = \beta a_{n-i} + \delta b_{n-i}, \quad 1 \leq i \leq n-1. \quad (13)$$

Записывая теплицеву матрицу (1) в виде

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

можем заменить вещественные соотношения (13) комплексными формулами

$$t_{-i} = \phi t_{n-i} + \psi \bar{t}_{n-i}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad (15)$$

где

$$\phi = \frac{\alpha + \delta}{2} + i \frac{\beta - \gamma}{2}, \quad \psi = \frac{\alpha - \delta}{2} + i \frac{\beta + \gamma}{2}. \quad (16)$$

Условие (12) приобретает при этом комплексную форму

$$|\phi|^2 - |\psi|^2 = 1. \quad (17)$$

При $\psi = 0$, $|\phi| = 1$ формулы (15) описывают хорошо известный класс ϕ -циркулянтных матриц (или, короче, класс ϕ -циркулянтов). По этой причине матрицы, определяемые соотношением (15) для фиксированной пары (ϕ, ψ) , были названы в [12] (ϕ, ψ) -циркулянтами.

Статья [12] заканчивалась констатацией того факта, что новые классы нормальных ганкелевых матриц или, точнее, соответствующие им теплицевы матрицы нужно искать среди (ϕ, ψ) -циркулянтов, для которых $\psi \neq 0$.

Хорошо известно, что ϕ -циркулянты, отвечающие фиксированному числу ϕ с модулем единица, образуют унитарную коммутативную алгебру, диагонализуемую общим унитарным подобием. Можно предположить, что при $\psi \neq 0$ класс (ϕ, ψ) -циркулянтов сохраняет хотя бы некоторые из этих замечательных свойств. Однако в п. 2 мы показываем, что никакой класс (ϕ, ψ) -циркулянтов с $\psi \neq 0$ не имеет нетривиального общего инвариантного подпространства и, следовательно, не может быть разложен посредством подобий.

Возвращаясь к соотношениям (13), заметим, что при фиксированных ϕ и ψ (т.е. при фиксированных α , β , γ и δ) эти соотношения снижают число вещественных неизвестных нормальной ганкелевой задачи до $2n$. Вспомним, что (13) есть следствие требования, чтобы матрица (9) была теплицевой, и что это требование есть ослабление необходимого и достаточного условия (5). Поскольку обе части в (5) суть кососимметричные теплицевы матрицы, для выполнения этого условия достаточно обеспечить равенство внедиагональных элементов в первых строках. Это приводит к системе $n-1$ уравнений относительно $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ и $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$. Из-за присутствия в (5) матричных произведений $T_2 T_1^t$ и $T_1 T_2^t$ соответствующие скалярные уравнения являются квадратичными и, вообще говоря, не обязаны иметь вещественные решения. Не располагая пока доказательством вещественной разрешимости этой системы при произвольном n , мы показываем однако, что она разрешима и имеет бесконечное число решений для $n = 3$ (см. п. 3) и $n = 4$ (п. 4). Это доказывает существование решений нормальной ганкелевой задачи, не входящих в перечисленные выше классы 1–4.

2. Отсутствие общих инвариантных подпространств. Фиксируем пару чисел (ϕ, ψ) и обозначим через $\mathcal{C}(\phi, \psi)$ соответствующий класс (ϕ, ψ) -циркулянтов. В частности, класс $\mathcal{C}(\phi, 0)$ образован обычными ϕ -циркулянтами.

ТЕОРЕМА 3. *Матрицы из класса $\mathcal{C}(\phi, \psi)$, где $\psi \neq 0$, не имеют нетривиального общего инвариантного подпространства.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вначале класс $\mathcal{C}(0, 1)$. Пусть $\mathcal{A}$ – комплексная алгебра, порожденная матрицами этого класса. Поскольку инвариантные подпространства для $\mathcal{C}(0, 1)$ и $\mathcal{A}$ одни и те же, мы будем в дальнейшем рассматривать только $\mathcal{A}$. Покажем, что в $\mathcal{A}$ имеется система двух образующих. Действительно, из соотношений (см. (15))

$$t_{-i} = \bar{t}_{n-i}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

вытекает, что $(0, 1)$ -циркулянт T может быть записан в виде суммы

$$T = T_1 + iT_2, \quad (18)$$

где T_1 – обычный вещественный циркулянт, а T_2 – вещественный косой циркулянт. Обратно, всякая сумма указанного вида принадлежит классу $\mathcal{C}(0, 1)$. Поскольку циркулянты являются многочленами от матрицы

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

а косые циркулянты – многочленами от матрицы

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то в качестве искоемых образующих можно взять пару (F, G) . Однако нам будет удобнее заменить G диагональной матрицей

$$D = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1).$$

Ее принадлежность алгебре $\mathcal{A}$ вытекает из равенства $G = DF$.

Итак, чтобы доказать неприводимость $\mathcal{A}$, достаточно показать, что у F и G нет нетривиальных общих инвариантных подпространств.

Хорошо известно, что матрица F имеет n различных собственных значений (именно, корни n -й степени из единицы) и, следовательно, ровно n (с точностью до умножения на ненулевые константы) собственных векторов $v_1, \dots, v_n$. Можно считать, что

$$v_j = (1, \varepsilon_j, \varepsilon_j^2, \dots, \varepsilon_j^{n-1})^t, \quad j = 1, \dots, n, \quad (20)$$

где $\varepsilon_j = e^{2\pi i(j-1)/n}$. Инвариантными подпространствами матрицы F являются линейные оболочки всевозможных подсистем системы (20).

Нетривиальные подпространства матрицы D – это $(n - 1)$ -мерное подпространство E_{n-1} , натянутое на первые $n - 1$ координатных векторов, любое ненулевое подпространство из E_{n-1} , одномерное подпространство E_n , натянутое на n -й координатный вектор e_n , и всевозможные прямые суммы вида

$$\mathcal{L} \oplus E_n, \quad (21)$$

где $\mathcal{L} \subset E_{n-1}$.

Линейная оболочка любой нетривиальной подсистемы векторов (20) не может совпадать с E_{n-1} или его частью. Действительно, E_{n-1} ортогонально координатному вектору e_n , а векторы v_j , у которых все компоненты имеют модуль 1, не ортогональны никакому координатному вектору.

Линейная оболочка $\mathcal{M}$ любой нетривиальной системы векторов (20) не может иметь вид прямой суммы (21), так как в противном случае было бы $e_n \in \mathcal{M}$. Пусть

$$\mathcal{M} = \text{span}\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}, \quad k < n.$$

Тогда

$$e_n = \alpha_1 v_{i_1} + \dots + \alpha_k v_{i_k}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}. \quad (22)$$

Если это векторное равенство расписать покомпонентно, то первые k из полученных скалярных равенств представляют собой систему однородных линейных уравнений относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, матрица которой является вандермондовой. Поэтому $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, что противоречит (22).

Итак, F и D не имеют нетривиальных общих инвариантных подпространств, что верно и для всего класса $\mathcal{C}(0, 1)$.

Пусть теперь (ϕ, ψ) – произвольная пара, удовлетворяющая равенству (17) и условию $\psi \neq 0$. Иначе говоря, пусть фиксированы α, β, γ и δ такие, что выполняется (12) и хотя бы одно из чисел $\alpha - \delta$ и $\beta + \gamma$ отлично от нуля. Алгебру, натянутую на класс $\mathcal{C}(\phi, \psi)$, будем по-прежнему обозначать символом $\mathcal{A}$.

Полагая в соотношениях (13)

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \dots = a_{n-1} = 0, \quad b_1 = \dots = b_{n-1} = 0,$$

а также принимая дополнительные условия

$$a_0 = b_0 = 0, \quad (23)$$

заключаем, что в классе $\mathcal{C}(\phi, \psi)$ содержится простейший $(\alpha + i\beta)$ -циркулянт

$$T_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \alpha + i\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

(Заметим, что, в отличие от ϕ -циркулянтов с $|\phi| = 1$, матрица (24) не обязана быть нормальной.) Аналогично, полагая в (13)

$$b_1 = 1, \quad b_2 = \dots = b_{n-1} = 0, \quad a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$$

и добавляя условия (23), найдем в $\mathcal{C}(\phi, \psi)$ $(\gamma + i\delta)$ -циркулянт

$$T_{\gamma, \delta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ \gamma + i\delta & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу равенства (12) числа $\alpha + i\beta$ и $\gamma + i\delta$ отличны от нуля и не равны между собой. Отсюда следует, что система линейных уравнений

$$c_1 + c_2 = 1, \quad c_1(\alpha + i\beta) + c_2(\gamma + i\delta) = 1 \quad (25)$$

относительно c_1 и c_2 однозначно разрешима. Линейная комбинация

$$c_1 T_{\alpha, \beta} + c_2 T_{\gamma, \delta}$$

с коэффициентами, определяемыми системой (25), есть не что иное, как матрица F . Итак, $F \in \mathcal{A}$.

Поскольку

$$T_{\alpha, \beta} = D_{\alpha, \beta} F, \quad \text{где } D_{\alpha, \beta} = \text{diag}(1, \dots, 1, \alpha + i\beta),$$

имеем $D_{\alpha, \beta} \in \mathcal{A}$. Аналогично показываем, что $D_{\gamma, \delta} \in \mathcal{A}$, где

$$D_{\gamma, \delta} = \text{diag}(1, \dots, 1, \gamma + i\delta).$$

Но в таком случае алгебре $\mathcal{A}$ принадлежат все матрицы вида

$$D_z = \text{diag}(1, \dots, 1, z).$$

В частности, $D = D_{-1} \in \mathcal{A}$.

Как показано выше, F и D не имеют нетривиальных общих инвариантных подпространств. Следовательно, алгебра $\mathcal{A}$ неприводима, и это же верно для класса $\mathcal{C}(\phi, \psi)$.

3. Матрицы порядка 3. Откажемся от индексной записи и будем обозначать элементы первых строк в матрицах $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ соответственно через x, y, z и e, f, g . Учитывая соотношения (13), сами $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ имеют вид

$$\hat{T}_1 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ \alpha z + \gamma g & x & y \\ \alpha y + \gamma f & \alpha z + \gamma g & x \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$\hat{T}_2 = \begin{pmatrix} e & f & g \\ \beta z + \delta g & e & f \\ \beta y + \delta f & \beta z + \delta g & e \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Эти матрицы должны удовлетворять соотношению (5) с a_0 и b_0 , замененными соответственно на x и e , или, что то же самое, соотношению

$$\hat{T}_2 \hat{T}_1^t = \hat{T}_1 \hat{T}_2^t.$$

Как объяснено во введении, матричное соотношение (5) эквивалентно $n - 1 = 2$ скалярным соотношениям, получаемым приравниванием элементов левой и правой части в позициях (1, 2) и (1, 3):

$$(\beta z + \delta g - f)x + (y - \alpha z - \gamma g)e + zf - yg = 0, \quad (28)$$

$$(\beta y + \delta f - g)x + (z - \alpha y - \gamma y)e + \beta yz + \delta yg - \alpha zf - \gamma fg = 0. \quad (29)$$

Хотя каждое из уравнений (28) и (29) является квадратичным, эти уравнения не содержат квадратов неизвестных и произведения xe . Это значит, что (28) и (29) можно рассматривать как линейную систему относительно неизвестных x и e . Определитель этой системы есть следующая квадратичная форма от внедиагональных переменных y, z, f, g :

$$F_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}(y, z, f, g) = -\beta y^2 + \beta z^2 + \gamma f^2 - \gamma g^2 + (\alpha - \delta)yf + (1 - \alpha\delta)yg + (\alpha\delta - 1)zf + (\delta - \alpha)zg. \quad (30)$$

Эта форма вырождается в тождественный нуль, только если

$$\beta = \gamma = 0, \quad \alpha = \delta, \quad \alpha\delta = 1, \quad (31)$$

т.е. при

$$\alpha = \delta = 1 \quad \text{или} \quad \alpha = \delta = -1. \quad (32)$$

Предположим, что для выбранной четверки $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ соотношения (31), (32) не имеют места. Зададим произвольные значения для свободных неизвестных y, z, f, g . Если в точке $(y, z, f, g) \in \mathbb{R}^4$ форма $F_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ не обращается в нуль, то система (28), (29) разрешима относительно (вещественных) переменных x, e и имеет единственное решение. Если к тому же матрица

$$\begin{pmatrix} z & g \\ y & f \end{pmatrix} \quad (33)$$

(см. (6)) невырождена, то матрица H , соответствующая найденной шестерке x, y, z, e, f, g , не может принадлежать указанным во введении классам 1–4. Например, при

$$z = f = 1, \quad y = g = 0, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1$$

получим

$$x = 0, \quad e = 1, \quad T = \begin{pmatrix} i & i & 1 \\ 1+i & i & i \\ i & 1+i & i \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & i & i \\ i & i & 1+i \\ i & 1+i & i \end{pmatrix}.$$

Понятно, что указанным выше способом можно построить бесконечное число нормальных ганкелевых матриц для всякой четверки $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, не подчиняющейся равенствам (31), (32).

Однако система (28), (29) разрешима и в случае, если

$$\alpha = \delta = 1, \quad \beta = \gamma = 0 \quad (34)$$

или

$$\alpha = \delta = -1, \quad \beta = \gamma = 0. \quad (35)$$

Пусть, например, выполнены равенства (34). Тогда оба уравнения системы (28), (29) эквивалентны единственному уравнению

$$(f - g)x + (z - y)e = zf - yg. \quad (36)$$

Поскольку матрица (33) невырождена, хотя бы одна из разностей $f - g$ и $z - y$ должна быть отлична от нуля. Итак, задавая значения для внедиагональных переменных так, чтобы $zf \neq yg$ и, например, $f \neq g$, а затем выбирая произвольное значение для диагональной переменной e , найдем единственное значение оставшейся переменной x из уравнения (36).

С очевидными изменениями все сказанное справедливо и в случае, если имеют место равенства (35).

Заметим, что теплицевы решения, соответствующие параметрам (34), являются циркулянтами, а решения, соответствующие параметрам (35), – косыми циркулянтами. Получаемые из них нормальные ганкелевы матрицы называются ганкелевыми циркулянтами и косыми циркулянтами.

4. Матрицы порядка 4. С учетом соотношений (13) примем для матриц $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ запись

$$\hat{T}_1 = \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ \alpha w + \gamma h & x & y & z \\ \alpha z + \gamma g & \alpha w + \gamma h & x & y \\ \alpha y + \gamma f & \alpha z + \gamma g & \alpha w + \gamma h & x \end{pmatrix},$$

$$\hat{T}_2 = \begin{pmatrix} e & f & g & h \\ \beta w + \delta h & e & f & g \\ \beta z + \delta g & \beta w + \delta h & e & f \\ \beta y + \delta f & \beta z + \delta g & \beta w + \delta h & e \end{pmatrix}.$$

Матричное соотношение

$$\hat{T}_2 \hat{T}_1^t = \hat{T}_1 \hat{T}_2^t$$

заменяем тремя скалярными уравнениями, получаемыми приравниванием элементов в позициях (1, 2), (1, 3) и (1, 4):

$$(\beta w + \delta h - f)x + (y - \alpha w - \gamma g)e + z(f - h) + wf - yg = 0, \quad (37)$$

$$(\beta z + (\delta - 1)g)x + ((1 - \alpha)z - \gamma g)e + y(\beta w + (\delta - 1)h) + ((1 - \alpha)w - \gamma h)f = 0, \quad (38)$$

$$(\beta y + \delta f - h)x + (w - \alpha y - \gamma f)e + y(\beta z + \delta g) + z(\beta w + \delta h - \alpha f) - \alpha wg - \gamma fg - \gamma gh = 0. \quad (39)$$

Снова имеем систему вещественных квадратичных уравнений относительно восьми вещественных неизвестных x, y, z, w, e, f, g, h . Покажем, что эта система имеет бесконечно много решений.

Форма записи уравнений (37)–(39) умышленно была выбрана так, чтобы подчеркнуть их линейность по отношению к диагональным элементам x и e . Выбрав какие-либо два уравнения, например, первое и второе, выразим из них x и e через

прочие неизвестные. При фиксированных $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ определитель системы (37), (38) является квадратичной формой от внедиагональных переменных:

$$F_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}(y, z, w, f, g, h) = -\beta yz + (1 - \delta)yg + \beta zw + (\alpha - 1)zf + [\delta(1 - \alpha) + \beta\gamma]zh + [\alpha(\delta - 1) - \beta\gamma]wg + \gamma fg - \gamma gh. \quad (40)$$

Эта форма вырождается в тождественный нуль только, если

$$\alpha = 1, \quad \beta = \gamma = 0, \quad \delta = 1. \quad (41)$$

К обсуждению этого специального случая мы вернемся позже, а пока будем считать, что для выбранной четверки $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ условия (41) не выполняются. Тогда уравнения (37) и (38) можно разрешить относительно x и e , пользуясь, например, формулами Крамера. Подставляя полученные выражения в (39) и избавляясь от знаменателя (которым будет форма (40)), приходим к уравнению четвертой степени относительно внедиагональных элементов y, z, w, f, g, h :

$$G(y, z, w, f, g, h) = 0. \quad (42)$$

Мы не приводим точный вид этого уравнения, поскольку его распечатка из Maple занимает приблизительно страницу формата А4. Существенно лишь то, что при общей четвертой степени данное уравнение является не более чем кубическим по отношению к каждой неизвестной. Более точно, максимальная степень вхождения равна двум для неизвестных z и g и трем для прочих неизвестных. При этом коэффициенты при y^3, w^3, f^3 и h^3 равны соответственно

$$-\beta[(\delta - 1)h + \beta w], \quad \beta[\beta y + (1 - \alpha)f], \quad -\gamma[\gamma h + (\alpha - 1)w] \quad \text{и} \quad -\gamma[(\delta - 1)y - \gamma f]. \quad (43)$$

Тождественное обращение в нуль всех четырех коэффициентов возможно лишь при $\beta = \gamma = 0$, что в силу (12) дает

$$\delta = \frac{1}{\alpha}.$$

Заметим, что эта ситуация включает в себя случай (41); мы вернемся к ее разбору позже. Сейчас же предположим, что для выбранной четверки $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ хотя бы один из коэффициентов (43) не обращается в нуль тождественно. Пусть, например, это будет коэффициент при y^3 . Стратегия построения вещественных решений системы (37)–(39) может быть теперь сформулирована следующим образом.

1. Выбрать значения неизвестных h и w так, чтобы

$$(\delta - 1)h + \beta w \neq 0.$$

Подобный выбор гарантирует, что уравнение (42) действительно является кубическим относительно y .

2. Выбрать произвольные значения для неизвестных f и g .

Теперь (42) превращается в уравнение вида

$$\tilde{G}(y, z) = 0, \quad (44)$$

в котором z рассматривается как параметр. При фиксированном значении z уравнение (44) имеет один либо три вещественных корня y . Однако конкретная пара (y, z) устраивает нас только в случае, если ее подстановка в (40) вместе с ранее выбранными значениями для h, w, f и g дает ненулевое число. Заметим, что при фиксированных h, w, f, g форма (40) превращается в функцию от y и z следующего вида:

$$\tilde{F}(y, z) = -\beta yz + ay + bz + c.$$

Уравнение (44), содержащее член вида dy^3 , $d = \text{const}$, и не содержащее монома y^3z , не может быть алгебраически зависимым с уравнением

$$\tilde{F}(y, z) = 0, \quad (45)$$

поэтому на поверхности (44) имеется бесконечно много точек (y, z) , не принадлежащих ее пересечению с поверхностью (45). Следовательно, пункт 3 нашей стратегии может быть сформулирован так.

3. Выбрать значения для y и z , удовлетворяющие уравнению (44), но не удовлетворяющие (45).

Построение решения заканчивается пунктом

4. Найти значения неизвестных x и e подстановкой выбранных значений внедиагональных переменных в формулы Крамера, к которым свелись уравнения (37) и (38).

Нам остается рассмотреть случай, когда

$$\beta = \gamma = 0, \quad \delta = \frac{1}{\alpha}. \quad (46)$$

Если $\alpha \neq 1$, то форма (40) не обращается в нуль тождественно и система (37)–(39), как и раньше, может быть сведена к единственному уравнению (42). При условиях (46) это уравнение сильно упрощается и имеет вид

$$(1 - \alpha^2)(-\alpha f^2 yw + \alpha f h w^2 + \alpha f^2 z^2 - \alpha g^2 w^2 + y^2 g^2 - z^2 h^2 - f h y^2 + h^2 y w) = 0. \quad (47)$$

Многочлен G по-прежнему имеет четвертую степень, но теперь является квадратичным по отношению к каждой отдельной переменной. Тем не менее, вещественные решения существуют и их снова бесконечно много. Применение к (47) Maple-процедуры *solve* выявляет, например, серию решений, в которых при произвольном выборе *ненулевых* значений для g, h и w оставшиеся переменные выражаются формулами

$$y = 0, \quad z = 0, \quad f = \frac{g^2}{h}.$$

При этом условия $g \neq 0$ и $w \neq 0$ необходимы для того, чтобы ранг матрицы F (см. (6)) был равен двум. Есть и еще несколько серий решений. Выбрав конкретное решение, заканчиваем построение матриц $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ как в приведенном выше алгоритме.

Пусть, наконец, выполнены условия (41). В этом случае уравнение (38) удовлетворяется тождественно, а уравнения (37) и (39) превращаются в единственное уравнение

$$(f - h)x + (w - y)e + yg + z(h - f) - wg = 0.$$

Будучи линейным относительно каждого неизвестного, это уравнение имеет бесконечно много вещественных решений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х. Д. Икрамов, “Об описании нормальных теплицевых матриц”, *ЖВМ и МФ*, **34**:3 (1994), 473–479.
- [2] Х. Д. Икрамов, “О классификации нормальных теплицевых матриц с вещественными элементами”, *Матем. заметки*, **57**:5 (1995), 670–680.
- [3] Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, “Критерий нормальности комплексной теплицевой матрицы”, *ЖВМ и МФ*, **36**:2 (1996), 3–10.
- [4] В. И. Гельфгат, “Критерий нормальности теплицевой матрицы”, *ЖВМ и МФ*, **35** (1995), 1428–1432.
- [5] D. R. Farenick, M. Krupnik, N. Krupnik, W. Y. Lee, “Normal Toeplitz matrices”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **17**:4 (1996), 1037–1043.
- [6] K. Ito, “Every normal Toeplitz matrix is either of type I or of type II”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **17**:4 (1996), 998–1006.
- [7] A. Arimoto, “A simple proof of the classification of normal Toeplitz matrices”, *Electron. J. Linear Algebra*, **9** (2002), 108–111.
- [8] G. Gu, L. Patton, “Commutation relations for Toeplitz and Hankel matrices”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **24**:3 (2003), 728–746.
- [9] Х. Д. Икрамов, “К вопросу об описании нормальных ганкелевых матриц”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **3**:3 (1997), 809–819.
- [10] Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, “О кососимметричной части произведения теплицевых матриц”, *Матем. заметки*, **63**:1 (1998), 138–141.
- [11] Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, “Об одном новом классе нормальных ганкелевых матриц”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем., кибернет.*, 2007, № 1, 10–13.
- [12] Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, “О нормальных ганкелевых матрицах”, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **346** (2007), 63–80.

Х. Д. Икрамов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило

20.07.2007

В. Н. Чугунов

Институт вычислительной математики РАН

E-mail: vadim@bach.inm.ras.ru