Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Демин, А. В. Лобода, Пример 2-параметрического семейства аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 5, 791–794

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4035>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 10:02:18

Пример 2-параметрического семейства аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$

А. М. Демин, А. В. Лобода

Настоящая заметка посвящена изучению вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств, однородных относительно голоморфных преобразований. Для случая пространств двух комплексных переменных такая задача была полностью решена в явной форме еще в 1932 г. Картаном [1].

Но уже в задаче описания голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерных комплексных пространств остается много нерешенных до настоящего времени вопросов. Естественно поэтому в качестве более простой задачи изучить сначала аффинно-однородные гиперповерхности комплексного пространства $\mathbb{C}^3$.

Подчеркнем, что семейство однородных вещественных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$ весьма обширно (см. [2], [3]). В связи с этим важную часть поставленных задач представляет не только нахождение новых семейств однородных многообразий, но и определение их места в какой-либо (желательно полной) классификации.

Как видно из упомянутых работ [2], [3], изучение как голоморфной, так и аффинной однородности гиперповерхностей многомерных пространств можно вести в рамках единого подхода, связанного с локальными каноническими уравнениями изучаемых многообразий.

Например, по аналогии с широко известной (голоморфной) нормальной формой Мозера [4] в [3] предложено понятие аффинного канонического уравнения вещественной гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$.

Согласно [3] вблизи произвольной точки уравнение строго псевдо-выпуклой (СПВ) вещественно-аналитической (не обязательно однородной) гиперповерхности в этом пространстве можно привести аффинными преобразованиями к виду

$$\operatorname{Im} z_3 = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \varepsilon_1(z_1^2 + \bar{z}_1^2) + \varepsilon_2(z_2^2 + \bar{z}_2^2) + \sum_{k+l \geq 3} F_{klm}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)(\operatorname{Re} z_3)^m. \quad (1)$$

Здесь индексы k, l у слагаемого $F_{klm}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ означают его степени соответственно по голоморфным (z_1, z_2) и антиголоморфным $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ переменным; пара $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ неотрицательных вещественных чисел является аффинным инвариантом рассматриваемой поверхности.

Изучение свойства однородности поверхностей, задаваемых уравнениями типа (1), в зависимости от входящих в эти уравнения коэффициентов позволяет получать интересные результаты (см. [2], [3], [5], [6]). Например, в [3] построены несколько однопараметрических семейств аффинно-различных однородных поверхностей, в канонических уравнениях которых один из параметров пары $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ равен нулю. После публикации работы [3] возникли естественные вопросы:

- 1) существуют ли аффинно-однородные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$, для которых оба параметра $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ отличны от нуля?
- 2) насколько свободны “младшие” параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ канонических уравнений (1) в классе аффинно-однородных гиперповерхностей?

Основной результат данного краткого сообщения составляет следующее (анонсированное в [7]) утверждение.

ТЕОРЕМА 1. В плоскости $\mathbb{R}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^2$ существует открытое множество, точкам которого соответствуют попарно различные аффинно-однородные поверхности вида (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00630).

ЗАМЕЧАНИЕ. Построенные нами однородные поверхности различны с точки зрения аффинной эквивалентности. Вопрос о возможной голоморфной эквивалентности друг другу многообразий из этого семейства является отдельной задачей. В настоящей заметке мы его не обсуждаем.

Доказательство теоремы 1 основано на технике продолжения матричных подалгебр малой размерности алгебры Ли $M(2, \mathbb{C})$ (см. [5], [6]).

Напомним, что группе Ли аффинных преобразований, транзитивно действующей на некотором однородном подмногообразии пространства $\mathbb{C}^3$, соответствует алгебра Ли линейных векторных полей вида

$$(A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3 + p) \frac{\partial}{\partial z_1} + (B_1 z_1 + B_2 z_2 + B_3 z_3 + s) \frac{\partial}{\partial z_2} + (C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + q) \frac{\partial}{\partial z_3} \quad (2)$$

с комплексными коэффициентами.

Везде ниже мы будем рассматривать *жесткие* (цилиндрические) гиперповерхности, для которых канонические уравнения вида (1) свободны от переменной $\operatorname{Re} z_3$. Кроме того, удобно считать выполненным для изучаемых поверхностей условие общности положения

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot (2\varepsilon_1 - 1) \cdot (2\varepsilon_2 - 1) \neq 0. \quad (3)$$

Согласно [3] набор коэффициентов линейного векторного поля (2), касательного к жесткой поверхности общего положения вида (1), может быть представлен квадратной матрицей 4-го порядка специального вида

$$H = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 & p \\ B_1 & B_2 & 0 & s \\ a & b & c & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Соответственно, алгебру линейных векторных полей на любой из обсуждаемых однородных поверхностей можно считать матричной алгеброй Ли, состоящей из матриц вида (4). Антикоммутативное умножение в этой алгебре задается стандартной формулой $[H_1, H_2] = H_1 H_2 - H_2 H_1$.

Простым вычислением матричных скобок проверяется справедливость следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть пара $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ расположена вблизи точки $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$,

$$t = \sqrt{\frac{2\varepsilon_1 + 1}{2\varepsilon_2 - 1}}, \quad T = \sqrt{(2\varepsilon_1 + 1)(2\varepsilon_2 - 1)}.$$

Тогда 5-мерное линейное вещественное пространство матриц $\mathfrak{h}_\varepsilon$ с базисом

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i(1 - 4\varepsilon_2^2) \\ it/2 & 1/2 & 0 & T(1 - 2\varepsilon_2) \\ 2(2\varepsilon_1 - 1)(1 - 4\varepsilon_2^2) & 2iT(1 - 4\varepsilon_2^2) & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} -it & 1 & 0 & 4T \\ t^2 & it & 0 & 4i(1 + 2\varepsilon_2) \\ 8iT(1 + 2\varepsilon_1) & 8(1 - 4\varepsilon_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} t & i & 0 & 4iT \\ it^2 & -t & 0 & 4(1 - 2\varepsilon_2) \\ 8T(1 - 2\varepsilon_1) & 8i(1 - 4\varepsilon_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & it \\ 2i(1 + 2\varepsilon_1) & -2T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

замкнуто относительно матричной скобки (и, тем самым, образует матричную алгебру $\mathcal{L}\mathfrak{u}$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Все алгебры из приведенного 2-мерного семейства $\mathfrak{h}_\varepsilon$ являются разрешимыми в силу следующих коммутационных соотношений:

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= \frac{1}{2} E_2 + \alpha_{12} E_5, & [E_1, E_3] &= \frac{1}{2} E_3, & [E_2, E_3] &= 8E_4 + \alpha_{23} E_5, \\ [E_1, E_4] &= E_4 + \alpha_{14} E_5, & [E_2, E_4] &= 0, & [E_3, E_4] &= \alpha_{34} E_5, \\ [E_k, E_5] &= 0, & k &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{14}, \alpha_{34}$ – некоторые легко вычисляемые вещественные коэффициенты.

Интегрируя построенные алгебры $\mathcal{L}\mathfrak{u}$ $\mathfrak{h}_\varepsilon$, можно получить соответствующие им подгруппы аффинных преобразований пространства $\mathbb{C}^3$.

Орбитой любой такой группы, содержащей начало координат в $\mathbb{C}^3$, является некоторое аффинно-однородное подмногообразие в этом пространстве (определенное, по крайней мере, вблизи нуля). Так как “сдвиговые” столбцы $(p, s, q, 0)^T$ произвольной алгебры $\mathfrak{h}_\varepsilon$ заматают 5-мерное вещественное пространство, полученные однородные многообразия являются вещественными гиперповерхностями в $\mathbb{C}^3$. Это и есть заявленные в теореме 1 однородные поверхности, составляющие в совокупности 2-параметрическое семейство.

Коэффициентами 2-го порядка в каноническом аффинном уравнении каждой такой поверхности являются именно $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, что следует из вида базисных матриц алгебр $\mathfrak{h}_\varepsilon$, удовлетворяющих условиям

$$a = 2i(\bar{p} + 2\varepsilon_1 p), \quad b = 2i(\bar{s} + 2\varepsilon_2 s).$$

Естественный интерес представляет более наглядное описание построенных однородных поверхностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Все поверхности из построенного семейства являются алгебраическими и имеют (с точностью до аффинных преобразований) уравнения

$$P_4(\operatorname{Im} z_3, \operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2) = 0$$

при условии $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 1$, и

$$(\operatorname{Im} z_3 - P_3(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2))^2 = (P_2(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2))^3 \quad (5)$$

в противном случае.

Здесь P_2, P_3, P_4 – некоторые многочлены (степеней 2, 3 и 4 соответственно) от своих переменных.

Доказательство предложения 2 получается за счет непосредственного интегрирования систем уравнений в частных производных, отвечающих алгебрам $\mathfrak{h}_\varepsilon$. При этом произвольной матрице вида (4) из алгебры $\mathfrak{h}_\varepsilon$ соответствует уравнение

$$\operatorname{Re} \left((A_1 z_1 + A_2 z_2 + p) \frac{\partial}{\partial z_1} + (B_1 z_1 + B_2 z_2 + s) \frac{\partial}{\partial z_2} + (a z_1 + b z_2 + c z_3 + q) \frac{\partial}{\partial z_3} \right) \Big|_M = 0.$$

Отметим, что при интегрировании удобно перейти от алгебры $\mathfrak{h}_\varepsilon$ к подобной ей алгебре $\hat{\mathfrak{h}}_\varepsilon = C^{-1} \mathfrak{h}_\varepsilon C$, где

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ it & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При таком подобии матрица E_5 сохранится, а у 4-х первых матриц базиса $\mathfrak{h}_\varepsilon$ более простой вид примут их левые верхние (2×2) -блоки. Алгебра $\mathfrak{g}$, составленная из таких блоков (одна и та же для всех $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$), имеет базисом набор

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Другие технические детали интегрирования алгебр $\mathfrak{h}_\varepsilon$ мы здесь не приводим.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В действительности алгебра $\mathfrak{h}_\varepsilon$ построена путем *продолжения* (см. [5], [6]) алгебры (6) до некоторой алгебры Ли, состоящей из квадратных комплексных матриц 4-го порядка. Такое продолжение, составляющее идейный стержень нашей работы, является весьма тонким и трудоемким занятием.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Алгебра (6) имеет вещественную размерность 3. Можно показать, что при такой исходной размерности продолжения, отвечающие аффинно-однородным поверхностям, возможны лишь для алгебр, подобных $\mathfrak{g}$. В этом смысле (а также в сравнении с результатами [5]) семейство алгебр $\mathfrak{h}_\varepsilon$ является уникальным.

Отметим для сравнения, что в [8] получено 1-параметрическое семейство голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$, уравнения которых также являются полиномиальными 6-й степени и напоминают (5). При этом поверхности Белошапки инвариантны относительно квадратичных преобразований.

В заключение упомянем еще большую недавнюю статью [9], в которой изучены голоморфно-однородные вырожденные по Леви гиперповерхности 3-мерных комплексных пространств. В связи с нашей работой интересно отметить следующее:

- 1) вырожденных голоморфно-однородных поверхностей существует “достаточно мало”;
- 2) все они голоморфно эквивалентны аффинно-однородным многообразиям.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Cartan, *Ann. Math. Pura Appl.* (4), **11**:1 (1932), 17–90. [2] А. В. Лобода, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сб. статей, Тр. МИАН, **235**, Наука, М., 2001, 114–142. [3] А. В. Лобода, А. С. Ходарев, *Изв. вузов. Матем.*, 2003, № 10, 38–50. [4] S. S. Chern, J. K. Moser, *Acta Math.*, **133** (1974), 219–271. [5] А. В. Лобода, *Комплексный анализ и приложения*, Сб. статей, Тр. МИАН, **253**, 2006, 111–126. [6] О. А. Болдырева, А. В. Лобода, *Черноземный альманах научных исследований*, 2007, № 1 (5), 89–102. [7] А. М. Демин, А. В. Лобода, *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы*, Материалы VIII междунар. Казанской летней науч. школы-конференции, Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского, **35**, Изд-во Казанск. матем. общ-ва, Казань, 2007, 98–99. [8] V. K. Beloshapka, *Russ. J. Math. Phys.* (to appear). [9] G. Fels, W. Kaup, *Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5*, [arXiv: math.CV/0610375](https://arxiv.org/abs/math.CV/0610375).

А. М. Демин

Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступило
22.02.2008

А. В. Лобода

Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет