Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Карасёв, Е. М. Новикова, Нелинейные перестановочные соотношения: представления точечными операторами, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 1, 54–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm404>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:43:33

УДК 517.48

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ: ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТОЧЕЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

М. В. Карасев, Е. М. Новикова

Выделен класс нелиевских перестановочных соотношений, допускающих представления точечными операторами (т.е. операторами, интегральные ядра которых являются обобщенными функциями с точечными носителями). Для таких соотношений построены все операторно неприводимые представления (с точностью до эквивалентных). Каждое представление реализовано точечными операторами в гильбертовом пространстве антиголоморфных функций. Показано, что воспроизводящие ядра этих пространств могут быть представлены через гипергеометрические ряды, зэта-функцию, а также их модификации. Построены когерентные состояния, сплетающие абстрактные представления соотношений с неприводимыми.

Библиография: 44 названия.

1. Алгебра с нелинейными перестановочными соотношениями. В изучении алгебр с нелинейными перестановочными соотношениями (термин “нелинейные” означает отличные от стандартного случая алгебр Ли) главный интерес представляют примеры из теории q -деформаций и квантовой обратной задачи рассеяния. Основания этих теорий можно найти в [1]–[7], некоторые интересные примеры – в [8]–[10] и обзор этих тем – в книге [11]. Мы также сошлемся на ряд интересных физических работ [12]–[26], где появляются варианты нелинейных соотношений и описываются их представления.

Одно из важных направлений исследования алгебр с нелинейными перестановочными соотношениями основывается на понятии когерентных состояний, введенном на заре квантовой механики Шрёдингером и Гейзенбергом, затем в оптике Глаубером (где впервые было введено название “когерентные состояния”) и определенном в общей форме Клаудером. С точки зрения теории представлений основное свойство когерентных состояний – это возможность задавать неприводимые представления данной алгебры с помощью дифференциальных (или псевдодифференциальных) операторов, действующих в пространстве параметров этих состояний. Для алгебры Гейзенберга данный факт был осознан уже Фоком [27], [28] и Дираком [29] (см. также [30]) и далее был обобщен на широкий класс алгебр Ли [31]–[33] и некоторые их q -аналоги (см., например, [34]–[36]). В рамках общей процедуры квантования когерентные состояния впервые были использованы в [37]–[41] и далее были глубоко вовлечены в эту теорию, в особенности, в контексте геометрического квантования. Но нужно отметить, что в этой области есть еще

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-01047 и № 01-01-06130.

множество важных вопросов, которые до сих пор остаются открытыми. Мы затрагиваем в данной работе один из таких вопросов.

Рассмотрим алгебру с образующими $A_1, \dots, A_k, B, C$, подчиненными следующим перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} A_\mu A_\nu &= A_\nu A_\mu, & CB &= qBC + Q(A_1, \dots, A_k), \\ A_\mu B &= B(q_\mu A_\mu + Q_\mu(A_{\mu+1}, \dots, A_k)), & CA_\mu &= (q_\mu A_\mu + Q_\mu(A_{\mu+1}, \dots, A_k))C, \end{aligned} \quad (1)$$

и следующим условиям эрмитовости:

$$A_\mu^* = A_\mu, \quad B^* = C. \quad (2)$$

Здесь $\mu, \nu \in \{1, \dots, k\}$; $q, q_\mu \in \mathbb{R}$ – ненулевые константы; $Q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ и $Q_\mu: \mathbb{R}^{k-\mu} \rightarrow \mathbb{R}$ – полиномы, причем $Q_k \equiv \text{const}$.

Отметим, что перестановочные соотношения (1) являются частным случаем нелинейных перестановочных соотношений

$$\begin{aligned} A_\mu A_\nu &= A_\nu A_\mu, & CB &= B\omega(A_1, \dots, A_k)C + f(A_1, \dots, A_k), \\ A_\mu B &= B\varphi_\mu(A_1, \dots, A_k), & CA_\mu &= \varphi_\mu(A_1, \dots, A_k)C, \end{aligned} \quad (3)$$

рассмотренных авторами ранее в [42], [43]. В этих работах были построены все операторно неприводимые¹ представления алгебры (3), (2), в которых коммутативная подалгебра с генераторами

$$A_1, \dots, A_k, BC \quad (4)$$

имеет непустой точечный спектр. Все представления были реализованы псевдодифференциальными операторами в гильбертовых пространствах антиголоморфных функций.

В данной работе выделен специальный частный случай (1), (2), который обладает следующим замечательным свойством: *каждое неприводимое представление, в котором коммутативная подалгебра (4) имеет непустой точечный спектр, может быть реализовано в гильбертовом пространстве антиголоморфных функций точечными операторами (а не псевдодифференциальными операторами общего положения).*

Кроме того, для этих неприводимых представлений ниже дана конструкция когерентных состояний.

2. Точечные операторы. Приведем определение и примеры точечных операторов.

¹Напомним, что представление называется *операторно неприводимым*, если любой оператор, перестановочный с данным представлением, является скалярным. Ниже, говоря о неприводимости представления, мы всегда будем иметь в виду операторную, а не векторную, неприводимость. Под *векторной неприводимостью* понимается отсутствие в пространстве представления нетривиальных инвариантных подпространств. Отметим, что из операторной неприводимости представления алгебры (3), (2) следует векторная неприводимость, а обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейный интегральный оператор, определяемый равенством

$$\tilde{e}(x) = \int_D K(x, y) e(y) dy,$$

назовем *точечным*, если его ядро K является обобщенной функцией с точечным носителем, т.е. если K представима в виде (конечной) линейной комбинации δ -функции и ее производных $\delta^{(m)}$:

$$K(x, y) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=0}^M k_{lm}(x) \delta^{(m)}(y - r_l(x))$$

с гладкими коэффициентами $k_{lm} \in C^\infty(D)$; здесь $r_l \in C^\infty(D)$.

ПРИМЕРЫ ТОЧЕЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ.

- 1) Пусть $k \in C^\infty(D)$ – любая гладкая функция. Тогда оператор умножения на функцию k является точечным.
- 2) Напомним, что функция P называется *квазиполиномом*, если она представима в виде

$$P(t) = \sum_{n=1}^N \exp\{\lambda_n t\} p_n(t),$$

где p_n – полиномы, $\lambda_n \in \mathbb{C}$. Если P – квазиполином, то операторы $P(d/dx)$ и $P(x d/dx)$ точечные.

- 3) Композиция конечного числа точечных операторов является точечным оператором.

3. Спектр коммутативной подалгебры и серии представлений. В конструкции представлений алгебры (1), (2) будет использован спектр коммутативной подалгебры (4). Опишем его.

Пусть $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$, $a_0 \in \mathbb{R}_+$. Обозначим через $(\mathcal{A}_a)_\mu = (\mathcal{A}_a(n))_\mu$, где $\mu = 1, \dots, k$, и $\mathcal{F}_{a, a_0} = \mathcal{F}_{a, a_0}(n)$ решения следующих разностных задач:

$$\begin{cases} (\mathcal{A}_a(n+1))_\mu - q_\mu(\mathcal{A}_a(n))_\mu = Q_\mu((\mathcal{A}_a(n))_{\mu+1}, \dots, (\mathcal{A}_a(n))_k), & n \in \mathbb{Z}, \\ (\mathcal{A}_a(0))_\mu = a_\mu, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{a, a_0}(n+1) - q \mathcal{F}_{a, a_0}(n) = Q((\mathcal{A}_a(n))_1, \dots, (\mathcal{A}_a(n))_k), & n \in \mathbb{Z}, \\ \mathcal{F}_{a, a_0}(0) = a_0. \end{cases} \quad (6)$$

Явные формулы для функций $\mathcal{A}_a = ((\mathcal{A}_a)_1, \dots, (\mathcal{A}_a)_k)$ и $\mathcal{F}_{a, a_0}$ следующие:

$$\mathcal{A}_a(n) = \varphi^n(a) = \begin{cases} \underbrace{\varphi^{-1}(\dots(\varphi^{-1}(a))\dots)}_{-n}, & n \leq -1, \\ a, & n = 0, \\ \underbrace{\varphi(\dots(\varphi(a))\dots)}_n, & n \geq 1, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\varphi_\mu(A_1, \dots, A_k) \stackrel{\text{def}}{=} q_\mu A_\mu + Q_\mu(A_{\mu+1}, \dots, A_k), \quad (8)$$

$$\mathcal{F}_{a,a_0}(n) = \begin{cases} a_0 q^n - \sum_{j=n}^{-1} q^{n-j-1} Q(\mathcal{A}_a(j)), & n \leq -1, \\ a_0, & n = 0, \\ a_0 q^n + \sum_{j=0}^{n-1} q^{n-j-1} Q(\mathcal{A}_a(j)), & n \geq 1. \end{cases} \quad (9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функции $(\mathcal{A}_a)_\mu$, где $\mu = 1, \dots, k$, и $\mathcal{F}_{a,a_0}$ являются квазиполиномами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Квазиполиномиальная зависимость функций $(\mathcal{A}_a)_\mu$ и $\mathcal{F}_{a,a_0}$ вытекает из того, что при любых значениях параметров $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $l \in \mathbb{Z}_+$ функция

$$P(n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} - \sum_{m=n}^{-1} p^m m^l, & n \leq -1, \\ 0, & n = 0, \\ \sum_{m=0}^{n-1} p^m m^l, & n \geq 1, \end{cases}$$

является квазиполиномом от n . Действительно, в случае $p = 1$

$$P(n) = \frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^l \beta_j C_{l+1}^j n^{l+1-j},$$

где числа Бернулли β_j определяются по формуле

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta_j}{j!} x^j;$$

в случае $p \neq 1$

$$P(n) = \left[\left(x \frac{d}{dx} \right)^l \frac{x^n - 1}{x - 1} \right] \Big|_{x=p}.$$

Оказывается, что через квазиполиномы $(\mathcal{A}_a)_\mu$ и $\mathcal{F}_{a,a_0}$ выражается спектр подалгебры (4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если в некотором неприводимом представлении $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ алгебры (1), (2) спектр генераторов $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ коммутативной подалгебры (4) содержит собственное значение (a, a_0) , то этот спектр совпадает с замыканием множества чисел*

$$\{(\mathcal{A}_a(n), \mathcal{F}_{a,a_0}(n)) \mid L \leq n < M\}.$$

Здесь $\mathcal{A}_a$ и $\mathcal{F}_{a,a_0}$ – функции (7) и (9); через L и M обозначены соответственно наибольший неположительный и наименьший положительный корни уравнения

$$\mathcal{F}_{a,a_0}(n) = 0;$$

если это уравнение не имеет неположительных (положительных) корней, то $L \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$ ($M \stackrel{\text{def}}{=} +\infty$).

Если функции $\mathcal{A}_a$ и $\mathcal{F}_{a,a_0}$ периодичны по n с периодом N , то операторы $\hat{B}^N$ и $\hat{C}^N$ коммутируют с данным представлением и, следовательно, скалярны:

$$\hat{B}^N = \left(\prod_{n=1}^N \mathcal{F}_{a,a_0}(n) \right)^{1/2} e^{i\alpha}, \quad \hat{C}^N = \left(\prod_{n=1}^N \mathcal{F}_{a,a_0}(n) \right)^{1/2} e^{-i\alpha}. \quad (10)$$

Здесь $\alpha \in [0, 2\pi)$ – дополнительный параметр представления.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию в пространстве данного представления $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ алгебры (1), (2) имеется вектор p_0 , удовлетворяющий условиям

$$\hat{A}p_0 = ap_0, \quad \hat{B}\hat{C}p_0 = a_0p_0, \quad \|p_0\| = 1. \quad (11)$$

Обозначим

$$p_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \hat{C}^{-n}p_0, & n < 0, \\ \hat{B}^np_0, & n \geq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Тогда из перестановочных соотношений (1) и уравнений (5), (6) получим следующие формулы:

$$\hat{A}p_n = \mathcal{A}_a(n)p_n, \quad (13)$$

$$\hat{B}p_n = \begin{cases} \mathcal{F}_{a,a_0}(n+1)p_{n+1}, & n < 0, \\ p_{n+1}, & n \geq 0, \end{cases} \quad \hat{C}p_n = \begin{cases} p_{n-1}, & n \leq 0, \\ \mathcal{F}_{a,a_0}(n)p_{n-1}, & n > 0. \end{cases} \quad (14)$$

Каждая из этих формул легко проверяется индукцией по $|n|$. Например, при $n > 0$

$$\begin{aligned} \hat{C}p_{n+1} &= \hat{C}\hat{B}p_n = (q\hat{B}\hat{C} + Q(\hat{A}))p_n = q\mathcal{F}_{a,a_0}(n)\hat{B}p_{n-1} + Q(\mathcal{A}_a(n))p_n \\ &= (q\mathcal{F}_{a,a_0}(n) + Q(\mathcal{A}_a(n)))p_n = \mathcal{F}_{a,a_0}(n+1)p_n. \end{aligned}$$

Далее, используя условия эрмитовости (2), вычислим нормы векторов p_n :

$$\|p_n\|^2 = \begin{cases} \mathcal{F}_{a,a_0}(n+1) \cdots \mathcal{F}_{a,a_0}(0), & L \leq n \leq -1, \\ 1, & n = 0, \\ \mathcal{F}_{a,a_0}(1) \cdots \mathcal{F}_{a,a_0}(n), & 1 \leq n \leq M-1, \\ 0, & n \leq L-1 \text{ или } n \geq M. \end{cases} \quad (15)$$

Формулы для нормы также проверяются индукцией по $|n|$. Например, при $n \geq 1$

$$\|p_n\|^2 = (\hat{B}p_{n-1}, p_n) = (p_{n-1}, \hat{C}p_n) = \mathcal{F}_{a,a_0}(n)\|p_{n-1}\|^2.$$

Из формул (13)–(15) ясно, что, во-первых, пространство данного представления $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ является замыканием линейной оболочки векторов $p_L, \dots, p_{M-1}$ и, во-вторых, векторы $p_L, \dots, p_{M-1}$ являются собственными векторами образующих коммутативной подалгебры (4):

$$\hat{A}p_n = \mathcal{A}_a(n)p_n, \quad \hat{B}\hat{C}p_n = \mathcal{F}_{a,a_0}(n)p_n. \quad (16)$$

Если для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнены условия периодичности

$$\mathcal{A}_a(n+N) = \mathcal{A}_a(n), \quad \mathcal{F}_{a,a_0}(n+N) = \mathcal{F}_{a,a_0}(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

то оператор $\hat{B}^N$ коммутирует с данным представлением. Действительно, из соотношений (14) следует, что векторы $\hat{B}^N p_n$ и $\hat{B}^{N-1} p_n$ пропорциональны соответственно векторам p_{n+N} и p_{n+N-1} ; поэтому

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}^N]p_n &= \hat{A}(\hat{B}^N p_n) - \hat{B}^N \hat{A}p_n = (\mathcal{A}_a(n+N) - \mathcal{A}_a(n))\hat{B}^N p_n = 0, \\ [\hat{C}, \hat{B}^N]p_n &= (\hat{C}\hat{B})\hat{B}^{N-1}p_n - \hat{B}^{N-1}(\hat{B}\hat{C})p_n = (q\hat{B}\hat{C} + Q(\hat{A}) - \mathcal{F}_{a,a_0}(n))\hat{B}^{N-1}p_n \\ &= (q\mathcal{F}_{a,a_0}(n+N-1) + Q(\mathcal{A}_a(n+N-1)) - \mathcal{F}_{a,a_0}(n))\hat{B}^{N-1}p_n \\ &= (\mathcal{F}_{a,a_0}(n+N) - \mathcal{F}_{a,a_0}(n))\hat{B}^{N-1}p_n = 0. \end{aligned}$$

Поскольку представление $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ неприводимо, то оператор $\hat{B}^N$ скалярный: $\hat{B}^N = \text{const}$. Вычислим эту константу:

$$|\text{const}|^2 = \|\hat{B}^N p_0\|^2 = \|p_N\|^2 = \prod_{n=1}^N \mathcal{F}_{a,a_0}(n),$$

т.е.

$$\text{const} = \left(\prod_{n=1}^N \mathcal{F}_{a,a_0}(n) \right)^{1/2} e^{i\alpha},$$

где α – некоторое вещественное число. Так как $\hat{C}^N = (\hat{B}^N)^*$, то $\hat{C}^N = \overline{\text{const}}$.

Предложение 2 доказано.

Отметим, что в силу (2) спектры операторов $\hat{C}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{C}$ неотрицательны.

ЛЕММА. Множество всех неприводимых представлений $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ алгебры (1), (2) с непустым точечным спектром коммутативной подалгебры (4) разбивается на следующие серии.

- I. Представления, в которых оператор $\hat{C}\hat{B}$ строго положительный, а оператор $\hat{B}\hat{C}$ имеет нулевое собственное значение.
- II. Представления, в которых оператор $\hat{C}\hat{B}$ имеет нулевое собственное значение, а оператор $\hat{B}\hat{C}$ строго положительный.
- III(N). N-мерные представления, в которых оба оператора $\hat{C}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{C}$ имеют нулевые собственные значения; $N \in \mathbb{N}$.
- IV. Бесконечномерные представления, в которых оба оператора $\hat{C}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{C}$ строго положительны.
- V(N). N-мерные представления, в которых оба оператора $\hat{C}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{C}$ строго положительны; $N \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что если в данном представлении $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ алгебры (1), (2) оба оператора $\hat{C}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{C}$ имеют нулевые собственные значения, то это представление конечномерно. В доказательстве предложения 2 показано, что пространство неприводимого представления $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ с непустым точечным спектром коммутативной подалгебры натянуто на векторы $p_L, \dots, p_{M-1}$ (12), собственные для операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}\hat{C}$, а значит, и для оператора $\hat{C}\hat{B} = q\hat{B}\hat{C} + Q(\hat{A})$. Оператор $\hat{B}$ действует на векторы p_n как “повышающий” оператор ($\hat{B}p_n = \beta_n p_{n+1}$), аннулируя лишь вектор p_{M-1} ($\hat{B}p_{M-1} = 0$), причем только в случае $M < +\infty$. Оператор $\hat{C}$, напротив, “понижающий” ($\hat{C}p_n = \gamma_n p_{n-1}$) и аннулирует только вектор p_L ($\hat{C}p_L = 0$), если $L > -\infty$.

Если оператор $\hat{C}\hat{B}$ имеет в данном представлении нулевое собственное значение, то среди векторов $p_L, \dots, p_{M-1}$ найдется вектор p_m такой, что

$$\hat{C}\hat{B}p_m = 0.$$

Из условий эрмитовости (2) отсюда следует, что

$$\|\hat{B}p_m\|^2 = (\hat{B}p_m, \hat{B}p_m) = (\hat{C}\hat{B}p_m, p_m) = 0,$$

т.е.

$$\hat{B}p_m = 0,$$

и, значит, $M = m + 1 < +\infty$.

Аналогично, если оператор $\hat{B}\hat{C}$ имеет в данном представлении нулевое собственное значение, то $L > -\infty$.

Таким образом, в случае, когда оба оператора $\hat{C}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{C}$ имеют нулевые собственные значения, оба числа L и M конечны, а значит, и представление имеет конечную размерность.

4. Неприводимые представления, воспроизводящие ядра и когерентные состояния. Во избежание повторений, мы сформулируем одну общую теорему для всех серий представлений сразу. Те данные этой теоремы, которые меняются от серии к серии, систематизированы ниже в приложении. Для формул из приложения используем специальную нумерацию: (Т-1), ..., (Т-9). Доказательство теоремы помещено сразу после приложения.

ТЕОРЕМА. (А) Существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathcal{S}$ (Т-1а) и соответствующей серией неприводимых представлений $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ алгебры (1), (2), в которых коммутативная подалгебра (4) имеет непустой точечный спектр.

(В) Пусть $r \in \mathcal{R}$ (Т-1б). Предположим, что $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ – произвольные квазиполиномы, удовлетворяющие условию

$$\mathcal{B}(n)\mathcal{C}(n) = \mathcal{F}_{a, a_0}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (17)$$

а также дополнительным условиям (Т-2).

Тогда операторы $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ (Т-3) задают неприводимое d -мерное (Т-4) представление алгебры (1), (2) в гильбертовом пространстве антиголоморфных функций $\psi = \psi(\bar{z})$ от одной комплексной переменной $\bar{z}$ с нормой $\|\psi\|$ (Т-5).

Операторы $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ являются точечными.

(С) Воспроизводящее ядро $\mathcal{K}(\bar{z}|z)$ в гильбертовом пространстве антиголоморфного представления $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ задается формулой (Т-6); там же указана область сходимости ряда $\mathcal{K}$.

(D) Предположим, что в гильбертовом пространстве H некоторого абстрактного представления $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ алгебры (1), (2) имеется вектор $\mathcal{P}^0$, удовлетворяющий условиям (Т-7).

Тогда формула (Т-8) задает когерентные состояния $\mathcal{P}_z$, сплетающие данное представление $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ с антиголоморфным представлением $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, соответствующим набору r (Т-7) значений параметров.

Скалярное произведение двух когерентных состояний $\mathcal{P}_z$ дает воспроизводящее ядро

$$(\mathcal{P}_z, \mathcal{P}_z)_H = \mathcal{K}(\bar{z}|z).$$

Если данное представление $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ алгебры (1), (2) неприводимо в пространстве H , то вместо генераторов $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ можно ввести самосопряженные образующие $\hat{t} = \hat{t}^*$ и $\hat{s} = \hat{s}^*$, имеющие друг с другом каноническое коммутационное соотношение

$$[\hat{t}, \hat{s}] = -i \cdot I$$

и связанные с $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ формулами

$$\hat{A} = \mathcal{A}_a(\hat{t}), \quad \hat{B} = \mu(\hat{t}) \exp\{i\hat{s}\}, \quad \hat{C} = \exp\{-i\hat{s}\} \bar{\mu}(\hat{t}).$$

Здесь μ – любая комплексная функция, удовлетворяющая условиям² (Т-9), а (a, a_0) – значение операторов $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ на векторе $\mathcal{P}^0$ (см. (Т-7)). В терминах $\hat{t}$ и $\hat{s}$ оператор комплексной структуры³ задается формулой (Т-10).

Приложение к теореме. Во всех формулах этого приложения произведения вида $\prod_{j=1}^n$ и $\prod_{j=n+1}^0$ следует заменять на 1, если $n = 0$.

Представления серии I:

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} = \{r = (a, a_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+ \mid \mathcal{F}_{a, a_0}(0) = 0, \mathcal{F}_{a, a_0}(n) > 0 \text{ при } n > 0\}; \quad (\text{T-1a, b})$$

$$\mathcal{C}(0) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}(n)}{\overline{\mathcal{C}}(n)} < \infty; \quad (\text{T-2})$$

$$\hat{A} = \mathcal{A}_a\left(\bar{z} \frac{d}{dz}\right), \quad \hat{B} = \mathcal{B}\left(\bar{z} \frac{d}{dz}\right) \bar{z}, \quad \hat{C} = \frac{1}{\bar{z}} \mathcal{C}\left(\bar{z} \frac{d}{dz}\right); \quad (\text{T-3})$$

$$d = \infty; \quad (\text{T-4})$$

$$\psi(\bar{z}) = \sum_{n \geq 0} \psi_n \bar{z}^n, \quad \|\psi\| = \left(\sum_{n \geq 0} |\psi_n|^2 \prod_{j=1}^n \frac{\overline{\mathcal{C}}(j)}{\mathcal{B}(j)} \right)^{1/2}; \quad (\text{T-5})$$

²Чтобы определить операторы $\mu(\hat{t})$ и $\bar{\mu}(\hat{t})$ на H , достаточно знать функцию $\mu = \mu(n)$ в точках $\{n \in \mathbb{Z} \mid L \leq n \leq M\}$, где L и M – это соответственно наибольший неположительный и наименьший положительный корни уравнения $\mathcal{F}_{a, a_0}(n) = 0$.

³По определению оператор комплексной структуры $\hat{z}$ – это оператор, который в данном антиголоморфном представлении действует как умножение на $\bar{z}$; см. детали в [42].

$$\mathcal{K}(\bar{z}|z) = \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{j=1}^n \frac{\mathcal{B}(j)}{\overline{\mathcal{C}}(j)} \right) |z|^{2n}, \quad |z|^2 < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overline{\mathcal{C}}(n)}{\mathcal{B}(n)}; \quad (\text{T-6})$$

$$\hat{A}\mathcal{P}^0 = a\mathcal{P}^0, \quad \hat{C}\mathcal{P}^0 = 0, \quad \text{где}^4 r = (a, 0) \in \mathcal{R}, \quad \|\mathcal{P}^0\| = 1; \quad (\text{T-7})$$

$$\mathcal{P}_z = \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{j=1}^n \overline{\mathcal{C}}(j) \right)^{-1} z^n \hat{B}^n \mathcal{P}^0; \quad (\text{T-8})$$

$$|\mu(n)|^2 = \mathcal{F}_{a, a_0}(n) \quad \text{при } n \geq 0; \quad (\text{T-9})$$

$$\hat{z} = \frac{\mu}{\mathcal{B}}(\hat{t}) \exp\{i\hat{s}\}. \quad (\text{T-10})$$

Представления серии II:

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} = \{r = (a, a_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+ \mid \mathcal{F}_{a, a_0}(1) = 0, \mathcal{F}_{a, a_0}(n) > 0 \text{ при } n < 1\}; \quad (\text{T-1a,b})$$

$$\mathcal{B}(1) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\overline{\mathcal{C}}(n)}{\mathcal{B}(n)} < \infty; \quad (\text{T-2})$$

$$\mathring{A} = \mathcal{A}_a\left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}}\right), \quad \mathring{B} = \mathcal{B}\left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}}\right)\bar{z}, \quad \mathring{C} = \frac{1}{\bar{z}} \mathcal{C}\left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}}\right); \quad (\text{T-3})$$

$$d = \infty; \quad (\text{T-4})$$

$$\psi(\bar{z}) = \sum_{n \leq 0} \psi_n \bar{z}^n, \quad \|\psi\| = \left(\sum_{n \leq 0} |\psi_n|^2 \prod_{j=n+1}^0 \frac{\mathcal{B}(j)}{\overline{\mathcal{C}}(j)} \right)^{1/2}; \quad (\text{T-5})$$

$$\mathcal{K}(\bar{z}|z) = \sum_{n \leq 0} \left(\prod_{j=n+1}^0 \frac{\overline{\mathcal{C}}(j)}{\mathcal{B}(j)} \right) |z|^{2n}, \quad |z|^2 > \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\overline{\mathcal{C}}(n)}{\mathcal{B}(n)}; \quad (\text{T-6})$$

$$\hat{A}\mathcal{P}^0 = a\mathcal{P}^0, \quad \hat{B}\mathcal{P}^0 = 0, \quad \text{где}^5 r = (a, -Q(a)/q) \in \mathcal{R}, \quad \|\mathcal{P}^0\| = 1; \quad (\text{T-7})$$

$$\mathcal{P}_z = \sum_{n \leq 0} \left(\prod_{j=n+1}^0 \overline{\mathcal{B}}(j) \right)^{-1} z^n \hat{C}^{-n} \mathcal{P}^0; \quad (\text{T-8})$$

$$|\mu(n)|^2 = \mathcal{F}_{a, a_0}(n) \quad \text{при } n \leq 1; \quad (\text{T-9})$$

$$\hat{z} = \frac{\mu}{\mathcal{B}}(\hat{t}) \exp\{i\hat{s}\}. \quad (\text{T-10})$$

Представления серии III(N):

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} = \{r = (a, a_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+ \mid \mathcal{F}_{a, a_0}(0) = \mathcal{F}_{a, a_0}(N) = 0, \mathcal{F}_{a, a_0}(n) > 0 \text{ при } 0 < n < N\}; \quad (\text{T-1a,b})$$

⁴ Для представлений серий I и III(N) условие $\hat{C}\mathcal{P}^0 = 0$ равносильно условию $\hat{B}\hat{C}\mathcal{P}^0 = a_0\mathcal{P}^0$, где $a_0 = 0$.

⁵ Для представлений серии II (при условии $\hat{A}\mathcal{P}^0 = a\mathcal{P}^0$) равенство $\hat{B}\mathcal{P}^0 = 0$ равносильно равенству $\hat{B}\hat{C}\mathcal{P}^0 = a_0\mathcal{P}^0$, где $a_0 = -Q(a)/q$.

$$\mathcal{C}(0) = 0, \quad \mathcal{B}(N) = 0; \quad (\text{T-2})$$

$$\mathring{A} = \mathcal{A}_a \left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right), \quad \mathring{B} = \mathcal{B} \left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right) \bar{z}, \quad \mathring{C} = \frac{1}{\bar{z}} \mathcal{C} \left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right); \quad (\text{T-3})$$

$$d = N; \quad (\text{T-4})$$

$$\psi(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n \bar{z}^n, \quad \|\psi\| = \left(\sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^2 \prod_{j=1}^n \frac{\overline{\mathcal{C}(j)}}{\mathcal{B}(j)} \right)^{1/2}; \quad (\text{T-5})$$

$$\mathcal{K}(\bar{z}|z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\prod_{j=1}^n \frac{\mathcal{B}(j)}{\overline{\mathcal{C}(j)}} \right) |z|^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}; \quad (\text{T-6})$$

$$\hat{A} \mathcal{P}^0 = a \mathcal{P}^0, \quad \hat{C} \mathcal{P}^0 = 0, \quad \text{где } r = (a, 0) \in \mathcal{R}, \quad \|\mathcal{P}^0\| = 1; \quad (\text{T-7})$$

$$\mathcal{P}_z = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\prod_{j=1}^n \overline{\mathcal{C}(j)} \right)^{-1} z^n \hat{B}^n \mathcal{P}^0; \quad (\text{T-8})$$

$$|\mu(n)|^2 = \mathcal{F}_{a, a_0}(n) \quad \text{при } 0 \leq n \leq N; \quad (\text{T-9})$$

$$\hat{z} = \frac{\mu}{\mathcal{B}}(\hat{t}) \exp\{i\hat{s}\}. \quad (\text{T-10})$$

Представления серии IV:

$$\mathcal{S} = \mathcal{R}/R - \text{фактормножество множества} \quad (\text{T-1a})$$

$$\mathcal{R} = \{r = (a, a_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+ \mid$$

$$\mathcal{F}_{a, a_0}(n) > 0 \text{ при } n \in \mathbb{Z}, (\mathcal{A}_a(n), \mathcal{F}_{a, a_0}(n)) \neq (a, a_0) \text{ при } n \in \mathbb{N}\} \quad (\text{T-1b})$$

по отношению R эквивалентности

$$(a, a_0) \sim_R (a', a'_0) \iff \exists K \in \mathbb{Z} \quad (\mathcal{A}_a(K), \mathcal{F}_{a, a_0}(K)) = (a', a'_0);$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\overline{\mathcal{C}(n)}}{\mathcal{B}(n)} < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overline{\mathcal{C}(n)}}{\mathcal{B}(n)}; \quad (\text{T-2})$$

$$\mathring{A} = \mathcal{A}_a \left(\frac{d}{d\bar{z}} \right), \quad \mathring{B} = \mathcal{B} \left(\frac{d}{d\bar{z}} \right) e^{\bar{z}}, \quad \mathring{C} = e^{-\bar{z}} \mathcal{C} \left(\frac{d}{d\bar{z}} \right); \quad (\text{T-3})$$

$$d = \infty; \quad (\text{T-4})$$

$$\psi(\bar{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n e^{n\bar{z}}, \quad \|\psi\| = \left(\sum_{n \leq -1} |\psi_n|^2 \prod_{j=n+1}^0 \frac{\mathcal{B}(j)}{\overline{\mathcal{C}(j)}} + \sum_{n \geq 0} |\psi_n|^2 \prod_{j=1}^n \frac{\overline{\mathcal{C}(j)}}{\mathcal{B}(j)} \right)^{1/2}; \quad (\text{T-5})$$

$$\mathcal{K}(\bar{z}|z) = \sum_{n \leq -1} \left(\prod_{j=n+1}^0 \frac{\overline{\mathcal{C}(j)}}{\mathcal{B}(j)} \right) e^{n(\bar{z}+z)} + \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{j=1}^n \frac{\mathcal{B}(j)}{\overline{\mathcal{C}(j)}} \right) e^{n(\bar{z}+z)},$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\overline{\mathcal{C}(n)}}{\mathcal{B}(n)} < e^{\bar{z}+z} < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overline{\mathcal{C}(n)}}{\mathcal{B}(n)}; \quad (\text{T-6})$$

$$\hat{A} \mathcal{P}^0 = a \mathcal{P}^0, \quad \hat{B} \hat{C} \mathcal{P}^0 = a_0 \mathcal{P}^0, \quad \text{где } r = (a, a_0) \in \mathcal{R}, \quad \|\mathcal{P}^0\| = 1; \quad (\text{T-7})$$

$$\mathcal{P}_z = \sum_{n \leq -1} \left(\prod_{j=n+1}^0 \overline{\mathcal{B}(j)} \right)^{-1} e^{nz} \hat{C}^{-n} \mathcal{P}^0 + \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{j=1}^n \overline{\mathcal{C}(j)} \right)^{-1} e^{nz} \hat{B}^n \mathcal{P}^0; \quad (\text{T-8})$$

$$|\mu(n)|^2 = \mathcal{F}_{a, a_0}(n) \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}; \quad (\text{T-9})$$

$$\exp\{\widehat{z}\} = \frac{\mu}{\mathcal{B}}(\widehat{t}) \exp\{i\widehat{s}\}. \quad (\text{T-10})$$

Представления серии $\mathbf{V}(N)$:

$$\mathcal{S} = \mathcal{R}/R - \text{фактормножество множества} \quad (\text{T-1a})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \{r = (a, a_0, \alpha) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \mid \\ \mathcal{F}_{a, a_0}(n) > 0 \text{ при } n \in \mathbb{Z}, (\mathcal{A}_a(N), \mathcal{F}_{a, a_0}(N)) = (a, a_0), \\ (\mathcal{A}_a(n), \mathcal{F}_{a, a_0}(n)) \neq (a, a_0) \text{ при } 0 < n < N\} \end{aligned} \quad (\text{T-1b})$$

по отношению R эквивалентности

$$(a, a_0, \alpha) \sim_R (a', a'_0, \alpha') \iff \exists K \in \mathbb{Z} \quad (\mathcal{A}_a(K), \mathcal{F}_{a, a_0}(K), \alpha) = (a', a'_0, \alpha');$$

$$\exists \tau > 0 \quad \begin{cases} \mathcal{B}(n+N) = \mathcal{B}(n) \exp\{-\tau N\}, & n \in \mathbb{Z}, \\ \prod_{n=1}^N \frac{\overline{\mathcal{C}}(n)}{\mathcal{B}(n)} = \exp\{\tau N^2\}, \quad \sum_{n=1}^N \arg \mathcal{B}(n) = \alpha \pmod{2\pi}; \end{cases} \quad (\text{T-2})$$

$$\mathring{A} = \mathcal{A}_a\left(\frac{d}{d\bar{z}}\right), \quad \mathring{B} = \mathcal{B}\left(\frac{d}{d\bar{z}}\right)e^{\bar{z}}, \quad \mathring{C} = e^{-\bar{z}}\mathcal{C}\left(\frac{d}{d\bar{z}}\right); \quad (\text{T-3})$$

$$d = N; \quad (\text{T-4})$$

$$\psi(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n e^{n\bar{z}\theta} \left(\frac{N(\bar{z} - \tau n)}{i}, \frac{\tau N^2}{2} \right), \quad \|\psi\| = \left(\sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^2 \prod_{j=1}^n \frac{\overline{\mathcal{C}}(j)}{\mathcal{B}(j)} \right)^{1/2}; \quad (\text{T-5})$$

$$\mathcal{K}(\bar{z}|z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\prod_{j=1}^n \frac{\mathcal{B}(j)}{\overline{\mathcal{C}}(j)} \right) e^{n(\bar{z}+z)} \left| \theta \left(\frac{N(\bar{z} - \tau n)}{i}, \frac{\tau N^2}{2} \right) \right|^2, \quad z \in \mathbb{C}; \quad (\text{T-6})$$

$$\hat{A}\mathcal{P}^0 = a\mathcal{P}^0, \quad \hat{B}\hat{C}\mathcal{P}^0 = a_0\mathcal{P}^0, \quad \hat{B}^N\mathcal{P}^0 = \left(\prod_{n=1}^N \mathcal{F}_{a, a_0}(n) \right)^{1/2} e^{i\alpha} \mathcal{P}^0, \quad (\text{T-7})$$

$$\text{где } r = (a, a_0, \alpha) \in \mathcal{R}, \quad \|\mathcal{P}^0\| = 1;$$

$$\mathcal{P}_z = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\prod_{j=1}^n \overline{\mathcal{C}}(j) \right)^{-1} e^{nz\theta} \left(\frac{N(z - \tau n)}{i}, \frac{\tau N^2}{2} \right) \hat{B}^n \mathcal{P}^0; \quad (\text{T-8})$$

$$|\mu(n)|^2 = \mathcal{F}_{a, a_0}(n), \quad \mu(n+N) = \mu(n) \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}; \quad (\text{T-9})$$

$$\exp\{\widehat{z}\} = \frac{\mu}{\mathcal{B}}(\widehat{t}) \exp\{i\widehat{s}\}. \quad (\text{T-10})$$

Здесь тэта-функция θ определяется по формуле

$$\theta(\gamma, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\{-\varepsilon n^2 + in\gamma\}, \quad \varepsilon > 0. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Рассмотрим только случай представлений серии $\mathbf{V}(N)$. Остальные случаи разбираются аналогично.

(А) Мы знаем (см. доказательство предложения 2), что каждому неприводимому представлению $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ алгебры (1), (2), в котором коммутативная подалгебра (4) имеет непустой точечный спектр, соответствует какой-нибудь (хотя бы один) набор чисел $(a, a_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+$, а значит, и функция $\mathcal{F}_{a, a_0}$. Как и прежде, обозначим через L

и M соответственно наибольший неположительный и наименьший положительный корни функции $\mathcal{F}_{a,a_0}$. Если у функции $\mathcal{F}_{a,a_0}$ нет неположительных (положительных) корней, то положим $L = -\infty$ ($M = +\infty$).

В силу предложения 2 каждое значение $\mathcal{F}_{a,a_0}(n)$ при $n \in \{L, \dots, M-1\}$ является собственным значением неотрицательного оператора $\widehat{B}\widehat{C}$. Поэтому представлениям $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ соответствуют лишь такие значения параметров a, a_0 , для которых

$$\mathcal{F}_{a,a_0}(n) > 0 \quad \text{при } L < n < M.$$

Вспомним (см. доказательство леммы), что оператор $\widehat{B}\widehat{C}$ имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда $L > -\infty$, а оператор $\widehat{C}\widehat{B}$ имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда $M < +\infty$. Поскольку в представлениях серии $\mathbf{V}(N)$ операторы $\widehat{B}\widehat{C}$ и $\widehat{C}\widehat{B}$ строго положительны, то для таких представлений $L = -\infty$ и $M = +\infty$, т.е.

$$\mathcal{F}_{a,a_0}(n) > 0 \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}.$$

Согласно доказательству предложения 2 пространство данного представления натянуто на векторы p_n (12), $n \in \mathbb{Z}$, собственные для операторов $\widehat{A}, \widehat{B}\widehat{C}$ (см. (16)); соответствующие собственные значения равны $\mathcal{A}_a(n), \mathcal{F}_{a,a_0}(n)$. Если для некоторых целых чисел $n_1 < n_2$ имеют место равенства

$$\mathcal{A}_a(n_1) = \mathcal{A}_a(n_2) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_{a,a_0}(n_1) = \mathcal{F}_{a,a_0}(n_2),$$

то, как легко видеть из уравнений (5) и (6), функции $\mathcal{A}_a$ и $\mathcal{F}_{a,a_0}$ периодичны с периодом $n_2 - n_1$; тогда в силу предложения 2 операторы $\widehat{B}^{n_2-n_1}$ и $\widehat{C}^{n_2-n_1}$ скалярны, а значит, каждый вектор p_n при $n < n_1$ или $n \geq n_2$ пропорционален одному из векторов $p_{n_1}, \dots, p_{n_2-1}$. Напротив, разным наборам $(\mathcal{A}_a(m_1), \mathcal{F}_{a,a_0}(m_1)) \neq (\mathcal{A}_a(m_2), \mathcal{F}_{a,a_0}(m_2))$ собственных значений эрмитовых операторов $\widehat{A}, \widehat{B}\widehat{C}$ отвечают ортогональные собственные векторы p_{m_1} и p_{m_2} . Поэтому N -мерным представлениям серии $\mathbf{V}(N)$ соответствуют такие значения параметров (a, a_0) , для которых функции $\mathcal{A}_a$ и $\mathcal{F}_{a,a_0}$ обладают следующим свойством:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_a(N), \mathcal{F}_{a,a_0}(N)) &= (\mathcal{A}_a(0), \mathcal{F}_{a,a_0}(0)), \\ (\mathcal{A}_a(n), \mathcal{F}_{a,a_0}(n)) &\neq (\mathcal{A}_a(0), \mathcal{F}_{a,a_0}(0)) \quad \text{при } 0 < n < N. \end{aligned}$$

Каждое представление серии $\mathbf{V}(N)$ характеризуется также некоторым комплексным числом – значением (10) оператора $\widehat{B}^N$. Модуль этого числа зависит лишь от параметров a, a_0 , а его аргумент $\alpha \in [0, 2\pi)$ является дополнительным параметром представления.

Итак, каждому представлению серии $\mathbf{V}(N)$ соответствует какой-нибудь элемент $r = (a, a_0, \alpha)$ множества $\mathcal{R}$ (Т-1b). При этом ясно, что наряду с каждым своим элементом $r = (a, a_0, \alpha)$ множество $\mathcal{R}$ содержит также элементы

$$r_1 = (\mathcal{A}_a(1), \mathcal{F}_{a,a_0}(1), \alpha), \quad \dots, \quad r_{N-1} = (\mathcal{A}_a(N-1), \mathcal{F}_{a,a_0}(N-1), \alpha);$$

все они соответствуют тому же представлению, что и r , поскольку в пространстве представления в качестве “порождающего” вектора (11) вместо p_0 можно выбрать любой из векторов $p_1/\|p_1\|, \dots, p_{N-1}/\|p_{N-1}\|$. С другой стороны, если элемент $r' \in \mathcal{R}$ отличен от всех N элементов $r, r_1, \dots, r_{N-1}$, то r и r' соответствуют представлениям с разными спектрами образующих коммутативной подалгебры (4) или с разными значениями оператора $\hat{B}^N$, т.е. неэквивалентным представлениям.

Таким образом, имеет место инъективное отображение множества всех представлений серии $\mathbf{V}(N)$ в множество $\mathcal{S}(\text{T-1a})$. Чтобы доказать сюръективность этого отображения, достаточно для каждого $s \in \mathcal{S}$ построить представление серии $\mathbf{V}(N)$, которому отвечает s ; т.е. достаточно доказать пункт **(B)** теоремы.

(B) Пусть $r = (a, a_0, \alpha) \in \mathcal{R}$, а $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ – произвольные квазиполиномы, удовлетворяющие условиям (17) и (T-2). Рассмотрим операторы (T-3), действующие в гильбертовом пространстве (T-5).

Прежде всего, отметим, что функции

$$e^{(n)}(\bar{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\prod_{j=1}^n \frac{\sqrt{\mathcal{F}_{a,a_0}(j)}}{\mathcal{C}(j)} \right) e^{n\bar{z}\theta \left(\frac{N(\bar{z} - \tau n)}{i}, \frac{\tau N^2}{2} \right)}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (19)$$

образуют в этом пространстве ортонормированный базис. Операторы (T-3) в этом базисе имеют следующие матричные элементы:

$$\begin{aligned} \dot{A}e^{(n)} &= \mathcal{A}_a(n)e^{(n)}, \\ \dot{B}e^{(n)} &= \begin{cases} \sqrt{\mathcal{F}_{a,a_0}(n+1)}e^{(n+1)}, & 0 \leq n < N-1, \\ \sqrt{a_0}e^{i\alpha}e^{(0)}, & n = N-1, \end{cases} \\ \dot{C}e^{(n)} &= \begin{cases} \sqrt{a_0}e^{-i\alpha}e^{(N-1)}, & n = 0, \\ \sqrt{\mathcal{F}_{a,a_0}(n)}e^{(n-1)}, & 0 < n \leq N-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку функции $\mathcal{A}_a$ (7) и $\mathcal{F}_{a,a_0}$ (9) вещественны, отсюда следует, что операторы (T-3) удовлетворяют условиям эрмитовости (2):

$$(\dot{A}e^{(n)}, e^{(n)}) = (e^{(n)}, \dot{A}e^{(m)}), \quad (\dot{B}e^{(n)}, e^{(n)}) = (e^{(n)}, \dot{C}e^{(m)}).$$

Далее, используя перестановочное соотношение

$$\mathcal{D}\left(\frac{d}{d\bar{z}}\right) \cdot e^{\bar{z}} = e^{\bar{z}} \cdot \mathcal{D}\left(\frac{d}{d\bar{z}} + 1\right)$$

(справедливое для любого квазиполинома $\mathcal{D}$), а также уравнения (5) и (6), получим, что операторы (T-3) удовлетворяют перестановочным соотношениям (1). Проверим, например, что $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$ удовлетворяют второму соотношению (1):

$$\begin{aligned} \dot{C}\dot{B} &= e^{-\bar{z}}\mathcal{C}\left(\frac{d}{d\bar{z}}\right)\mathcal{B}\left(\frac{d}{d\bar{z}}\right)e^{\bar{z}} = e^{-\bar{z}}\mathcal{F}_{a,a_0}\left(\frac{d}{d\bar{z}}\right)e^{\bar{z}} = \mathcal{F}_{a,a_0}\left(\frac{d}{d\bar{z}} + 1\right) \\ &= q\mathcal{F}_{a,a_0}\left(\frac{d}{d\bar{z}}\right) + Q\left(\mathcal{A}_a\left(\frac{d}{d\bar{z}}\right)\right) = q\mathcal{B}\left(\frac{d}{d\bar{z}}\right)e^{\bar{z}}e^{-\bar{z}}\mathcal{C}\left(\frac{d}{d\bar{z}}\right) + Q(\dot{A}) = q\dot{B}\dot{C} + Q(\dot{A}). \end{aligned}$$

Таким образом, операторы (Т-3) в гильбертовом пространстве (Т-5) задают N -мерное представление алгебры (1), (2). Докажем, что оно неприводимо. С этой целью исследуем операторы $\mathring{K}$, перестановочные с этим представлением.

Сначала заметим, что в силу перестановочных соотношений (1) любую функцию от образующих $\mathring{A}, \mathring{B}, \mathring{C}$ можно представить в виде какой-нибудь функции от упорядоченного набора $\mathring{B}, \mathring{A}, \mathring{C}$. Поэтому $\mathring{K}$ можно искать в виде ряда

$$\mathring{K} = \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 0}} \mathring{B}^m f_{m,n}(\mathring{A}) \mathring{C}^n$$

с неопределенными коэффициентами $f_{m,n}$. Тогда из условия перестановочности $\mathring{K}$ с операторами $\mathring{A}$ получим, что $f_{m,n}(A) \equiv 0$, если $(m - n)/N \notin \mathbb{Z}$. Далее, заменяя скалярные операторы $\mathring{B}^N$ и $\mathring{C}^N$ их значениями, получим, что

$$\mathring{K} = \sum_{n \geq 0} \mathring{B}^n g_n(\mathring{A}) \mathring{C}^n,$$

где g_n – некоторые новые неопределенные коэффициенты. В силу (1) такой оператор $\mathring{K}$ можно записать как функцию от образующих $\mathring{A}$ и $\mathring{B}\mathring{C}$ коммутативной подалгебры:

$$\mathring{K} = \varkappa(\mathring{A}, \mathring{B}\mathring{C}).$$

Определим функции $\sigma \neq 0$ и ρ как произвольные решения системы уравнений

$$\begin{cases} q\sigma(\varphi(A)) = \sigma(A), \\ \rho(\varphi(A)) - \rho(A) = \sigma(A)Q(A), \end{cases}$$

где φ задается формулой (8). Эта система уравнений всегда имеет решения, по меньшей мере, на множестве собственных значений $a, \varphi(a), \dots, \varphi^{N-1}(a)$ операторов $\mathring{A}$. Поэтому всегда можно определить операторы $\sigma(\mathring{A}) \neq 0$ и $\rho(\mathring{A})$ и искать $\mathring{K}$ в виде

$$\mathring{K} = \varkappa_1(\mathring{A}, \mathring{B}\sigma(\mathring{A})\mathring{C} - \rho(\mathring{A})),$$

где $\varkappa_1$ – некоторый новый символ. Но оператор $\mathring{B}\sigma(\mathring{A})\mathring{C} - \rho(\mathring{A})$ скалярный. Заменяя этот оператор его значением $\mathring{B}\sigma(\mathring{A})\mathring{C} - \rho(\mathring{A}) = a_0\sigma(\varphi^{-1}(a)) - \rho(a)$, получим

$$\mathring{K} = \varkappa_2(\mathring{A}),$$

где $\varkappa_2$ – некоторая новая функция.

Наконец, из условия перестановочности $\mathring{K}$ с $\mathring{B}$ и $\mathring{C}$ получим, что $\varkappa_2$ удовлетворяет уравнению

$$\varkappa_2(\varphi(A)) = \varkappa_2(A)$$

и, следовательно, $\mathring{K} = \varkappa_2(\mathring{A})$ – скалярный оператор.

Таким образом, любой оператор, перестановочный с представлением (Т-3), является скалярным. Значит, это представление неприводимо.

Пункты (А) и (В) теоремы доказаны.

(С) Воспроизводящее ядро $\mathcal{K}(\bar{z}|z)$ в гильбертовом пространстве (Т-5) вычисляется по формуле

$$\mathcal{K}(\bar{z}|z) = \sum_{n=0}^{N-1} |e^{(n)}(\bar{z})|^2$$

с помощью любого ортонормированного базиса $e^{(n)}(\bar{z})$. Например, можно использовать базис (19). В результате придем к формуле (Т-6).

(D) Аналогичным образом строятся когерентные состояния:

$$\mathcal{P}_z = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{e^{(n)}(\bar{z})} \mathcal{P}^n.$$

Здесь

$$\mathcal{P}^n = \left(\prod_{j=1}^n \mathcal{F}_{a, a_0}(j) \right)^{-1/2} \hat{B}^n \mathcal{P}^0, \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

– ортонормированный базис в N -мерном подпространстве гильбертова пространства H , соответствующий ортонормированному базису (19)

$$e^{(n)}(\bar{z}) = \left(\prod_{j=1}^n \mathcal{F}_{a, a_0}(j) \right)^{-1/2} \hat{B}^n e^{(0)}(\bar{z}), \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

в гильбертовом пространстве (Т-5). Термин “соответствующий” означает, что образующие алгебры (1) имеют одинаковые матричные элементы в базисе $\{\mathcal{P}^n\}$ и в базисе $\{e^{(n)}\}$ пространства (Т-5).

Осталось доказать формулу (Т-10) для оператора комплексной структуры. Для этого вместо генераторов $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ введем самосопряженные образующие $\hat{t}$ и $\hat{s}$:

$$\hat{t} = \frac{d}{d\bar{z}}, \quad e^{i\hat{s}} = (\mu(\hat{t}))^{-1} \hat{B}.$$

Тогда из второй формулы (Т-3) имеем

$$e^{\bar{z}} = \left(\mathcal{B} \left(\frac{d}{d\bar{z}} \right) \right)^{-1} \hat{B} = (\mathcal{B}(\hat{t}))^{-1} \mu(\hat{t}) e^{i\hat{s}}.$$

Переписав эту формулу в представлении $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, получим (Т-10).

Теорема доказана.

5. О существовании квазиполиномов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ из теоремы. Для представлений серий I, II, IV и V(N) задача о нахождении квазиполиномов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, удовлетворяющих условиям (17), (Т-2), всегда имеет решения. Действительно, так как $\mathcal{F}_{a,a_0}$ – квазиполином, то при $|n| \rightarrow \infty$ $\mathcal{F}_{a,a_0}$ имеет асимптотику вида

$$\mathcal{F}_{a,a_0} \approx \gamma_{\pm} e^{\lambda_{\pm} n} n^{l_{\pm}}, \quad n \rightarrow \pm\infty,$$

где $\gamma_{\pm}, \lambda_{\pm} \in \mathbb{R}$, $l_{\pm} \in \mathbb{Z}$ – некоторые константы. Поэтому в качестве $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ можно, например, выбрать следующие квазиполиномы:

$$\begin{aligned} \text{серия I} \quad \mathcal{B}(n) &= e^{\mu n}, \quad \mathcal{C}(n) = e^{-\mu n} \mathcal{F}_{a,a_0}(n), \quad \text{где } 2 \operatorname{Re} \mu < \lambda_+; \\ \text{серия II} \quad \mathcal{B}(n) &= e^{-\mu n} \mathcal{F}_{a,a_0}(n), \quad \mathcal{C}(n) = e^{\mu n}, \quad \text{где } 2 \operatorname{Re} \mu < \lambda_-; \\ \text{серия IV} \quad \mathcal{B}(n) &= e^{\mu n}, \quad \mathcal{C}(n) = e^{-\mu n} \mathcal{F}_{a,a_0}(n), \quad \text{где } 2 \operatorname{Re} \mu < \min\{\lambda_-, \lambda_+\}; \\ \text{серия V}(N) \quad \mathcal{B}(n) &= \left(\prod_{j=1}^N \mathcal{F}_{a,a_0}(j) \right)^{-1/(2N)} e^{i\alpha/N - \tau n + \tau/2} \mathcal{F}_{a,a_0}(n), \\ \mathcal{C}(n) &= \left(\prod_{j=1}^N \mathcal{F}_{a,a_0}(j) \right)^{1/(2N)} e^{-i\alpha/N + \tau n - \tau/2}, \quad \text{где } \tau \text{ задано в (Т-2)}. \end{aligned}$$

Что касается представлений серии III(N), то здесь задача о нахождении квазиполиномов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, факторизующих функцию $\mathcal{F}_{a,a_0}$ на всем множестве целых чисел (см. (17)) и одновременно удовлетворяющих обоим условиям (Т-2), может не иметь решений. Например, для перестановочных соотношений

$$CB = \sqrt[N]{N+1} (BC-1) + A, \quad AB = B(A+1 - \sqrt[N]{N+1}), \quad CA = (A+1 - \sqrt[N]{N+1})C$$

(с параметром N) спектр коммутативной подалгебры (4) задается квазиполиномами

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a(n) &= a + \left(1 - \sqrt[N]{N+1}\right)n, \\ \mathcal{F}_{a,a_0}(n) &= a_0(N+1)^{n/N} + n + \frac{a-1 - \sqrt[N]{N+1}}{1 - \sqrt[N]{N+1}} \left(1 - (N+1)^{n/N}\right). \end{aligned}$$

Собственному значению $r = (a, a_0) = (2, 0)$ отвечает квазиполином $\mathcal{F}_{2,0}(n) = n+1 - (N+1)^{n/N}$. Легко проверить, что указанное значение $r \in \mathcal{R}$ соответствует представлению серии III(N). С другой стороны, ясно, что $\mathcal{F}_{2,0}$ нельзя разложить на квазиполиномиальные сомножители, удовлетворяющие условиям (Т-2).

Тем не менее, все утверждения теоремы имеют смысл и в этом случае. Дело в том, что для построения представлений серии III(N), а также соответствующих воспроизводящих ядер и когерентных состояний достаточно иметь квазиполиномы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, удовлетворяющие условиям (Т-2) и факторизующие функцию $\mathcal{F}_{a,a_0}$ лишь при $0 \leq n \leq N$. Поэтому вместо квазиполинома $\mathcal{F}_{a,a_0}$ на множители можно разлагать полином Лагранжа

$$P(n) = \sum_{m=0}^N \mathcal{F}_{a,a_0}(m) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^N \frac{n-l}{m-l},$$

совпадающий с $\mathcal{F}_{a,a_0}$ во всех точках $n \in \{0, \dots, N\}$. Поскольку $P(0) = P(N) = 0$, то, очевидно, найдутся полиномы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, обладающие всеми требуемыми свойствами.

6. Частные случаи соотношений (1). Связь со специальными функциями.

Представления серий I, II, III(N). Если в соотношениях (1) все структурные константы $q, q_1, \dots, q_k$ равны 1, то $(\mathcal{A}_a)_\mu$, $\mu = 1, \dots, k$, и $\mathcal{F}_{a,a_0}$ – полиномы. Тогда для представлений серий I, II, III(N) в качестве $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ можно выбрать не квазиполиномы, а полиномы. В результате получатся представления алгебры (1), (2) не просто точечными, а дифференциальными операторами (Т-3).

Воспроизводящие ядра (Т-6) и когерентные состояния (Т-8) в этом случае задаются гипергеометрическими рядами (для представлений серий I, II) или гипергеометрическими полиномами (для серии III(N)).

Например, для представлений серии I полином $\mathcal{F}_{a,a_0}$ имеет вид

$$\mathcal{F}_{a,a_0}(n) = \gamma n(n - \gamma_1) \cdots (n - \gamma_p) > 0 \quad \text{при } n \in \mathbb{N},$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_p \in \mathbb{C}$ – некоторые константы. Тогда, разбив множество корней $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ на две группы $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ и $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, где $m + 1 \geq l$, можно выбрать в качестве $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ следующие полиномы:

$$\mathcal{B}(n) = \gamma(n - \alpha_1) \cdots (n - \alpha_l), \quad \mathcal{C}(n) = n(n - \beta_1) \cdots (n - \beta_m).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\bar{z}|z) &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left(\prod_{j=1}^n \frac{(j - \alpha_1) \cdots (j - \alpha_l)}{(j - \beta_1) \cdots (j - \beta_m)} \right) (\gamma|z|^2)^n \\ &= {}_lF_m(-\alpha_1, \dots, -\alpha_l; -\bar{\beta}_1, \dots, -\bar{\beta}_m; \gamma|z|^2), \\ \mathcal{P}_z &= \mathcal{P}^0 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n! \prod_{j=1}^n (j - \beta_1) \cdots (j - \beta_m)} z^n \hat{B}^n \mathcal{P}^0 \\ &= {}_0F_m(-\bar{\beta}_1, \dots, -\bar{\beta}_m; z\hat{B}) \mathcal{P}^0, \end{aligned}$$

где ${}_lF_m(x_1, \dots, x_l; y_1, \dots, y_m; z)$ – обобщенный гипергеометрический ряд [44] от переменной z с двумя группами параметров $x_1, \dots, x_l$ и $y_1, \dots, y_m$. Если $l = 0$ или $m = 0$, то одна из этих групп параметров отсутствует.

В общем случае, когда $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ – не полиномы, а квазиполиномы, формулы (Т-6), (Т-8) для $\mathcal{K}$ и $\mathcal{P}_z$ дают некоторое интересное обобщение гипергеометрической функции (см. [43]).

Представления серии IV. Иногда квазиполином $\mathcal{F}_{a,a_0}$ можно разложить на комплексно сопряженные друг другу квазиполиномиальные сомножители:

$$\mathcal{F}_{a,a_0} = |\nu(n)|^2, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Если значение (a, a_0) параметров соответствует представлениям серии IV, то такая ситуация возникает, например, когда все структурные константы $q, q_1, \dots, q_k$ в соотношениях (1) единичные и, следовательно, $\mathcal{F}_{a,a_0}$ – полином⁶ или когда структурный многочлен Q – тождественно нулевой и тогда $\mathcal{F}_{a,a_0}(n) = a_0 q^n$ – экспонента. В этом случае для представлений серии IV в качестве $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ можно выбрать квазиполиномы

$$\mathcal{B}(n) = e^{-\tau n + \tau/2} \nu(n), \quad \mathcal{C}(n) = e^{\tau n - \tau/2} \bar{\nu}(n),$$

⁶Так как $\mathcal{F}_{a,a_0}(n) > 0$ при $n \in \mathbb{Z}$, то множество корней $\mathcal{F}_{a,a_0}$ состоит из комплексно сопряженных пар.

где τ – любое положительное число. Тогда ряды (Т-6) и (Т-8) для воспроизводящего ядра и когерентных состояний можно записать через θ -функцию (18):

$$\mathcal{K}(\bar{z}|z) = \theta\left(\frac{\bar{z}+z}{i}, \tau\right), \quad \mathcal{P}_z = \theta\left(\frac{z}{i} + \hat{s}, \frac{\tau}{2}\right) \mathcal{P}^0. \quad (21)$$

Норму (Т-5) в гильбертовом пространстве антиголоморфного представления (Т-3) в этом случае можно задать в интегральной форме

$$\|\psi\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{0 \leq \text{Im } z \leq 2\pi} |\psi(\bar{z})|^2 \frac{\exp\{-(\bar{z}+z)^2/4\tau\}}{\sqrt{4\pi\tau}} d\bar{z} dz.$$

Представления серии $\mathbf{V}(N)$. Если существует N -периодический квазиполином ν , удовлетворяющий условию (20), то для представлений серии $\mathbf{V}(N)$ в качестве $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ можно выбрать квазиполиномы

$$\mathcal{B}(n) = e^{i\beta/N - \tau n + \tau/2} \nu(n), \quad \mathcal{C}(n) = e^{-i\beta/N + \tau n - \tau/2} \bar{\nu}(n),$$

где

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \alpha - \sum_{n=1}^N \arg \nu(n).$$

Тогда получим, что воспроизводящее ядро (Т-6) в гильбертовом пространстве антиголоморфного представления (Т-3) записывается как произведение двух θ -функций:

$$\mathcal{K}(\bar{z}|z) = \theta\left(\frac{\bar{z}+z}{i}, \tau\right) \theta\left(\frac{N(\bar{z}-z)}{2i}, \frac{\tau N^2}{4}\right),$$

если N четное, и

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\bar{z}|z) &= \theta\left(\frac{\bar{z}+z}{i}, \tau\right) \theta\left(\frac{N(\bar{z}-z)}{i}, \tau N^2\right) + \theta^\# \left(\frac{\bar{z}+z}{i}, \tau\right) \theta^\# \left(\frac{N(\bar{z}-z)}{i}, \tau N^2\right), \\ \theta^\#(\alpha, \varepsilon) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in 1/2 + \mathbb{Z}} \exp\{-\varepsilon n^2 + i n \alpha\}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

если N нечетное. Для когерентных состояний (Т-8) работает формула (21). Норма (Т-5) в гильбертовом пространстве (Т-3) может быть записана в следующей интегральной форме:

$$\|\psi\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{0 \leq \text{Im } z \leq 2\pi \\ 0 \leq \text{Re } z \leq \tau}} |\psi(\bar{z})|^2 \frac{\exp\{-(\bar{z}+z)^2/(4\tau)\}}{\sqrt{4\pi\tau}} d\bar{z} dz.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Biedenharn L. C. The quantum group $SU_q(2)$ and a q -analogue of the boson operators // J. Phys. A. 1989. V. 22. P. L873–L878.
- [2] Drinfeld V. G. Quantum groups // Proc. of Intern. Congress of Math. (Berkeley). Providence: Amer. Math. Soc., 1987. P. 789–820.
- [3] Фаддеев Л. Д., Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л. А. Квантование групп Ли и алгебр Ли // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. С. 178–206.
- [4] Gelfand I. M., Fairlie D. B. The algebra of Weyl symmetrized polynomials and its quantum extension // Comm. Math. Phys. 1991. V. 136. P. 487–499.
- [5] Jimbo M. A q -difference analog of Ug and the Yang–Baxter equation // Lett. Math. Phys. 1985. V. 10. P. 63–69.
- [6] Kulish P. P., Reshetikhin N. Yu. Universal R -matrix of the quantum superalgebra $osp(2|1)$ // Lett. Math. Phys. 1989. V. 18. № 2. P. 143–149.
- [7] Склянин Е. К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера // Функцион. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 4. С. 34–48.
- [8] Granovskii Ya. I., Lutzenko I. M., Zhedanov A. S. Mutual integrability, quadratic algebras, and dynamical symmetry // Ann. Phys. 1992. V. 217. P. 1–20.
- [9] Granovskii Ya. I., Zhedanov A. S., Lutzenko I. M. Quadratic algebra as a “hidden” symmetry of the Hartmann potential // J. Phys. A. 1991. V. 24. P. 3887–3894.
- [10] Маслов В. П. Применение метода упорядоченных операторов для получения точных решений // ТМФ. 1977. Т. 33. № 2. С. 185–209.
- [11] Карасев М. В., Маслов В. П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [12] de Azcarraga J. A., Ellinas D. Complex analytic realizations for quantum algebras // J. Math. Phys. 1994. V. 35. № 3. P. 1322–1333.
- [13] Bonatsos D., Daskaloyannis C. General deformation schemes and $N = 2$ supersymmetric quantum mechanics // Phys. Lett. B. 1993. V. 307. P. 100–105.
- [14] Chaichian M., Ellinas D., Kulish P. Quantum algebra as the dynamical symmetry of the deformed Jaynes–Cummings model // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. № 8. P. 980–983.
- [15] Daskaloyannis S. Generalized deformed oscillator and nonlinear algebras // J. Phys. A. 1991. V. 24. P. L789–L794.
- [16] Delbecq C., Quesne C. Representation theory and q -boson realizations of Witten’s $su(2)$ and $su(1, 1)$ deformations // Phys. Lett. B. 1993. V. 300. P. 227–233.
- [17] Delbecq C., Quesne C. Nonlinear deformations of $su(2)$ and $su(1, 1)$ generalizing Witten’s algebra // J. Phys. A. 1993. V. 26. P. L127–L134.
- [18] Gray R. W., Nelson C. A. A completeness relation for the q -analogue coherent states by q -integration // J. Phys. A. 1990. V. 23. P. L945–L950.
- [19] Jannussis A. New deformed Heisenberg oscillator // J. Phys. A. 1993. V. 26. P. L233–L237.
- [20] Katriel J., Quesne C. Recursively minimal-deformed oscillators // J. Math. Phys. 1996. V. 37. № 4. P. 1650–1661.
- [21] Maximov V., Odziejewicz A. The q -deformation of quantum mechanics of one degree of freedom // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 4. P. 1681–1690.
- [22] Meljanac S., Milekovic M., Pallua S. Unified view of deformed single-mode oscillator algebras // Phys. Lett. B. 1994. V. 328. P. 55–59.
- [23] Odaka K., Kishi T., Kamefuchi S. On quantization of simple harmonic oscillators // J. Phys. A: Math. Geom. 1991. V. 24. P. L591–L596.
- [24] Quesne C. Coherent states, K -matrix theory, and q -boson realizations of the quantum algebra $su_q(2)$ // Phys. Lett. A. 1991. V. 153. P. 303–307.
- [25] Roček M. Representation theory of the nonlinear $su(2)$ algebra // Phys. Lett. B. 1991. V. 255. № 4. P. 554–557.
- [26] Witten E. Gauge theories, vertex models, and quantum groups // Nuclear Phys. B. 1990. V. 30. P. 285–346.

- [27] Fock V. A. Verallgemeinerung und Lösung der Diracschen statistischen Gleichung // Z. Phys. 1928. V. 49. P. 339–357.
- [28] Fock V. A. Konfigurationsraum und zweite Quantelung // Z. Phys. 1932. V. 75. P. 622–647.
- [29] Dirac P. A. M. Quantum electrodynamics // Comm. Dublin Inst. Adv. Stud. Ser. A. 1943. V. 1. P. 1–36.
- [30] Cook J. M. The mathematics of second quantization // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 74. P. 222–245.
- [31] Onofri E. A note on coherent state representation of Lie group // J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 1087–1089.
- [32] Perelomov A. M. Coherent states for arbitrary Lie groups // Comm. Math. Phys. 1972. V. 26. № 3. P. 222–236.
- [33] Perelomov A. M. Generalized Coherent States and Their Applications. Berlin–New York: Springer Verlag, 1986.
- [34] Arik M., Coon D. Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states // J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 524–527.
- [35] Кулиш П. П. Контракция квантовых алгебр и q -осцилляторы // ТМФ. 1991. Т. 86. № 1. С. 157–160.
- [36] Macfarlane A. F. On q -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)_q$ // J. Phys. A. 1989. V. 22. P. 4581–4588.
- [37] Березин Ф. А. Ковариантные и контравариантные символы операторов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 5. С. 1134–1167.
- [38] Березин Ф. А. Квантование // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. С. 1116–1175.
- [39] Березин Ф. А. Квантование в комплексных симметрических пространствах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. С. 363–402.
- [40] Berezin F. A. General concept of quantization // Comm. Math. Phys. 1975. V. 40. P. 153–174.
- [41] Klauder J. R. Continuous representation theory // J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 1055–1073.
- [42] Karasev M. V., Novikova E. M. Non-Lie permutation relations, coherent states, and quantum embedding // Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry, / ed. M. V. Karasev. Providence (RI): Publ. AMS, 1998. P. 1–202.
- [43] Карасев М. В., Новикова Е. М. Когерентные преобразования и неприводимые представления, соответствующие комплексным структурам на цилиндре и торе // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 6. С. 854–874.
- [44] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1974.