Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Романов, О погрешности многомерных квадратурных формул на некоторых классах функций, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 3, 433–439

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4043>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:18:52

О погрешности многомерных квадратурных формул на некоторых классах функций

М. А. Романов

Получены правильные относительно степенной шкалы оценки погрешностей многомерных оптимальных квадратурных формул на пространствах периодических функций с ограничениями на коэффициенты Фурье в ℓ_p -норме для $1 < p < 2$.

Библиография: 12 названий.

Введение. Пусть $\mathbb{T}^s = [0, 1]^s$ – подмножество в s -мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^s$. Обозначим через $\mathfrak{S}_s(N)$ множество всех сеток

$$\Omega = (x^{(1)}, \dots, x^{(N)}; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

с N узлами $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ из $\mathbb{T}^s$ и соответствующими им весами $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ с условием нормировки $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$.

Напомним, что формальное равенство

$$\int_{\mathbb{T}^s} f(x) dx = \sum_{k=1}^N \lambda_k f(x^{(k)}) + R(\Omega; f)$$

называется *квадратурной формулой* для сетки Ω на некотором пространстве $\mathfrak{M}$, состоящем из интегрируемых по Риману функций $f: \mathbb{T}^s \rightarrow \mathbb{C}$ с конечной полунормой $\|f\|$. Ее погрешность $R(\Omega; f)$ – линейный функционал на $\mathfrak{M}$ с нормой

$$R(\Omega; \mathfrak{M}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}: \|f\|=1} |R(\Omega; f)|,$$

которая называется *погрешностью* сетки Ω на $\mathfrak{M}$. По сложившейся традиции, восходящей к А. Н. Колмогорову, одной из важнейших задач теории квадратурных формул является изучение поведения оптимальной погрешности

$$R_N(\mathfrak{M}) = \inf_{\Omega \in \mathfrak{S}_s(N)} R(\Omega; \mathfrak{M})$$

в зависимости от N .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00306) и ДВО РАН (грант № 06-I-П-13-047).

С этого момента везде далее $p \in (1, \infty)$, а $q \in (1, \infty)$ определяется из равенства $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Для $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{T}^s$ и $n = (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{Z}^s$ положим

$$\langle n, x \rangle = n_1 x_1 + \dots + n_s x_s, \\ \bar{n}_j = \max\{1, |n_j|\}, \quad H(n) = H(n_1, \dots, n_s) = \bar{n}_1 \cdots \bar{n}_s.$$

Нас будут интересовать два класса $W_p^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)$ и $E_p^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)$ с $\alpha > q^{-1}$. Первый класс состоит из функций вида

$$f(x) = \int_{\mathbb{T}^s} \varphi(y) F_\alpha(x - y) dy,$$

где

$$F_\alpha(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} \frac{\exp(2\pi i \langle n, x \rangle)}{H^\alpha(n)},$$

$\varphi \in L_p(\mathbb{T}^s)$ и $\|f\| = \|\varphi\|_p$, а второй – из функций

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} c(n) \frac{\exp(2\pi i \langle n, x \rangle)}{H^\alpha(n)}$$

с $c(\cdot) \in \ell_p$ и

$$\|f\| = \left(\sum'_{n \in \mathbb{Z}^s} |c(n)|^p \right)^{1/p}$$

(здесь и далее штрих над знаком суммы означает, что значение $n = (0, \dots, 0)$ при суммировании пропускается).

Наиболее хорошо изучен класс $W_p^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)$, для которого при $p \in (1, \infty)$ и $\alpha > \max\{1/p, 1/2\}$ получена двусторонняя оценка

$$R_N(W_p^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)) \underset{\alpha, p, s}{\asymp} \frac{(\log N)^{(s-1)/2}}{N^\alpha}. \quad (0.1)$$

Верхняя оценка непосредственно следует из результатов Фролова [1] при $2 \leq p < \infty$ и Скриганова [2] при $1 < p < 2$. По поводу нижней оценки см. [3] при $1 < p \leq 2$ и [4] для любого $p \in (1, \infty)$.

Класс $E_p^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)$ при $p = \infty$ введен Коробовым в [5], получившим для него верхнюю оценку оптимальной погрешности

$$R_N(E_\infty^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)) \underset{\alpha, s}{\ll} \frac{(\log N)^{\alpha s}}{N^\alpha}. \quad (0.2)$$

Ее уточнил Бахвалов [6], доказав, что показатель логарифма в (0.2) можно заменить на $\alpha(s-1)$. С другой стороны, Шарыгин [7] доказал нижнюю оценку

$$\frac{(\log N)^{s-1}}{N^\alpha} \underset{\alpha, s}{\ll} R_N(E_\infty^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)).$$

Фролов в [1] разработал метод, позволивший получить оценку вида (0.2) с показателем логарифма $s-1$. Тем самым был установлен правильный (с точностью

до констант) порядок величины $R_N(E_\infty^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s))$. Позднее Лев [8] распространил этот результат на все $p \in [2, \infty]$ в виде соотношения

$$R_N(E_p^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)) \underset{\alpha, p, s}{\asymp} \frac{(\log N)^{(s-1)q}}{N^\alpha}. \quad (0.3)$$

Опираясь на технику, развитую в работах [9], [10] и дополненную конструкцией Смоляка [11], мы устанавливаем при $p \in (1, 2)$ следующий результат.

ТЕОРЕМА. Пусть $1 < p < 2$. Тогда для любого натурального N

$$\frac{(\log N)^{(s-1)/q}}{N^{\alpha+1/2-1/q}} \underset{\alpha, p, s}{\ll} R_N(E_p^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)) \underset{\alpha, p, s}{\ll} \frac{(\log N)^{(s-1)(\alpha+3/2-1/q)}}{N^{\alpha+1/2-1/q}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для случая $s = 1$ теорема доказана в работе [10].

Известно, что на классе $E_p^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)$ с $p \in (1, 2)$ сетки Коробова и алгебраические сетки Фролова дают такую же по порядку верхнюю оценку погрешности, как и в (0.3). В связи с этим, принимая во внимание нижнюю оценку из сформулированной теоремы, заключаем, что для случая $p \in (1, 2)$ эти сетки не являются оптимальными в степенной шкале.

1. Нижняя оценка. Для вещественного $M > 1$ положим

$$\mathcal{B}_s(M) = \{(2^{k_1}, \dots, 2^{k_s}) \mid M \leq 2^{k_1+\dots+k_s} < 2M, k_1, \dots, k_s - \text{неотрицательные целые}\}.$$

Множество $\mathcal{B}_s(M)$, состоящее из наборов неотрицательных степеней двойки, конечно и при $m = \lfloor \log_2 M \rfloor$

$$\#\mathcal{B}_s(M) = C_{m+s-1}^m \underset{s}{\asymp} (\log M)^{s-1}. \quad (1.1)$$

Пусть для $n \in \mathbb{Z}^s$

$$S_\Omega(n) = \sum_{k=1}^N \lambda_k e^{2\pi i \langle n, x^{(k)} \rangle}$$

– тригонометрическая сумма сетки $\Omega \in \mathfrak{S}_s(N)$. Главным инструментом в этом пункте будет следующая (см. [12])

ЛЕММА 1. Пусть $\beta \in (1, \infty)$ и $b = (b_1, \dots, b_s) \in \mathcal{B}_s(2N)$. Тогда для любой сетки Ω из $\mathfrak{S}_s(N)$ выполняется оценка

$$\sum'_{n \in \mathbb{Z}^s} |S_\Omega(n)|^2 \prod_{j=1}^s \min_{\beta} \left\{ 1, \frac{b_j}{\bar{n}_j} \right\} \underset{\beta, s}{\gg} 1.$$

Нам потребуется неравенство

$$(\log 2N)^{s-1} \underset{\beta, s}{\ll} \sum_{b \in \mathcal{B}_s(2N)} \sum'_{n \in \mathbb{Z}^s} |S_\Omega(n)|^2 \prod_{j=1}^s \min_{\beta} \left\{ 1, \frac{b_j}{\bar{n}_j} \right\}, \quad (1.2)$$

вытекающее с учетом (1.1) из утверждения леммы 1, а также следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 2. Для любых $M > 1$, $\gamma > 0$ и $t_j > 0$, $j = 1, \dots, s$,

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_s(M)} \prod_{j=1}^s \min_{\gamma} \left\{ \frac{t_j}{b_j}, \frac{b_j}{t_j} \right\} \ll_{\gamma, s} 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t > 0$. Поскольку $t/2 < 2^l \leq t$ при $l = [\log_2 t]$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \min_{\gamma} \left\{ \frac{t}{2^k}, \frac{2^k}{t} \right\} &= \sum_{k=0}^l \frac{2^{\gamma k}}{t^{\gamma}} + \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{t^{\gamma}}{2^{\gamma k}} = \frac{1}{t^{\gamma}} \frac{2^{\gamma(l+1)} - 1}{2^{\gamma} - 1} + t^{\gamma} \frac{2^{-\gamma(l+1)}}{1 - 2^{-\gamma}} \\ &\leq \frac{2^{\gamma}}{2^{\gamma} - 1} + \frac{1}{1 - 2^{-\gamma}} = \frac{2^{\gamma+1}}{2^{\gamma} - 1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{b \in \mathcal{B}_s(M)} \prod_{j=1}^s \min_{\gamma} \left\{ \frac{t_j}{b_j}, \frac{b_j}{t_j} \right\} &\leq \sum_{k_1, \dots, k_s=0}^{\infty} \prod_{j=1}^s \min_{\gamma} \left\{ \frac{t_j}{2^{k_j}}, \frac{2^{k_j}}{t_j} \right\} \\ &= \prod_{j=1}^s \sum_{k=0}^{\infty} \min_{\gamma} \left\{ \frac{t_j}{2^k}, \frac{2^k}{t_j} \right\} \leq \left(\frac{2^{\gamma+1}}{2^{\gamma} - 1} \right)^s. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Для любых $\delta, M \in (1, \infty)$

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_s(M)} \sum'_{n \in \mathbb{Z}^s} \prod_{j=1}^s \min_{\delta} \left\{ 1, \frac{b_j}{n_j} \right\} \ll_{\delta, s} M(\log M)^{s-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при $t \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n_j \in \mathbb{Z}} \min_{\delta} \left\{ 1, \frac{t}{n_j} \right\} &= 1 + 2 \sum_{n_j=1}^{\infty} \min_{\delta} \left\{ 1, \frac{t}{n_j} \right\} \leq t + 2 \int_0^{\infty} \min_{\delta} \left\{ 1, \frac{t}{x} \right\} dx \\ &= t + 2 \int_0^t dx + 2t^{\delta} \int_t^{\infty} \frac{dx}{x^{\delta}} = \frac{3\delta - 1}{\delta - 1} t, \end{aligned}$$

в силу (1.1)

$$\begin{aligned} \sum_{b \in \mathcal{B}_s(M)} \sum'_{n \in \mathbb{Z}^s} \prod_{j=1}^s \min_{\delta} \left\{ 1, \frac{b_j}{n_j} \right\} &\leq \sum_{b \in \mathcal{B}_s(M)} \prod_{j=1}^s \sum_{n_j \in \mathbb{Z}} \min_{\delta} \left\{ 1, \frac{b_j}{n_j} \right\} \\ &\leq \left(\frac{3\delta - 1}{\delta - 1} \right)^s \sum_{b \in \mathcal{B}_s(M)} b_1 \cdots b_s \ll_{\delta, s} M(\log M)^{s-1}. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Теперь у нас есть все необходимое для доказательства нижней оценки, сформулированной во введении теоремы. Действуя стандартным способом, с помощью неравенства Гёльдера получим

$$R(\Omega; E_p^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)) = \left(\sum'_{n \in \mathbb{Z}^s} \frac{|S_{\Omega}(n)|^q}{H^{\alpha q}(n)} \right)^{1/q}. \quad (1.3)$$

Далее, положим $r = q/2$ и определим r' из равенства $1/r + 1/r' = 1$. Пользуясь соотношением (1.2) с $\beta = 4\alpha + 1$, неравенством Гёльдера, леммами 2, 3 и учитывая (1.3), приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
 (\log 2N)^{s-1} &\ll_{\alpha, s} \sum_{b \in \mathcal{B}_s(2N)} \sum'_{n \in \mathbb{Z}^s} |S_\Omega(n)|^2 \prod_{j=1}^s \min \left\{ 1, \frac{b_j}{\bar{n}_j} \right\} \\
 &= \sum_{b \in \mathcal{B}_s(2N)} \sum'_{n \in \mathbb{Z}^s} (b_1 \cdots b_s)^{2\alpha} \frac{|S_\Omega(n)|^2}{(\bar{n}_1 \cdots \bar{n}_s)^{2\alpha}} \prod_{j=1}^s \min \left\{ \frac{\bar{n}_j}{b_j}, \frac{b_j}{\bar{n}_j} \right\} \prod_{j=1}^s \min \left\{ 1, \frac{b_j}{\bar{n}_j} \right\} \\
 &\leq \left((4N)^{\alpha q} \sum'_{n \in \mathbb{Z}^s} \frac{|S_\Omega(n)|^q}{H^{\alpha q}(n)} \sum_{b \in \mathcal{B}_s(2N)} \prod_{j=1}^s \min \left\{ \frac{\bar{n}_j}{b_j}, \frac{b_j}{\bar{n}_j} \right\} \right)^{2/q} \\
 &\quad \times \left(\sum_{b \in \mathcal{B}_s(2N)} \sum'_{n \in \mathbb{Z}^s} \prod_{j=1}^s \min \left\{ 1, \frac{b_j}{\bar{n}_j} \right\} \right)^{1/r'} \\
 &\ll_{\alpha, p, s} \left((4N)^{\alpha q} R^q(\Omega; E_p^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)) \right)^{2/q} \left(2N (\log 2N)^{s-1} \right)^{1/r'},
 \end{aligned}$$

из которого следует требуемая оценка.

2. Верхняя оценка. Пусть для целого $\nu_j \geq 0$, $j = 1, \dots, s$,

$$\Omega_{\nu_j} = (\xi_1, \dots, \xi_{2^{\nu_j}}; \lambda_1, \dots, \lambda_{2^{\nu_j}})$$

– сетка из $\mathfrak{S}_1(2^{\nu_j})$, погрешность которой

$$R(\Omega_{\nu_j}; E_p^{(\alpha)}(\mathbb{T})) \ll_{\alpha, p} 2^{-\gamma \nu_j} \quad (2.1)$$

с $\gamma = \gamma(\alpha, p) > 0$. Следуя [11], для целого $\nu \geq s - 1$ рассмотрим сетку $\tilde{\Omega}_\nu \in \mathfrak{S}_s(N)$ с $N \asymp_s \nu^{s-1} 2^\nu$ узлами

$$X^{(k_1, \dots, k_s)} = (\xi_{k_1}, \dots, \xi_{k_s})$$

и соответствующими им весами

$$\Lambda_{k_1, \dots, k_s}(\nu_1, \dots, \nu_s) = (-1)^{\nu - (\nu_1 + \dots + \nu_s)} C_{s-1}^{\nu - (\nu_1 + \dots + \nu_s)} \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_s},$$

где $k_j = 1, \dots, 2^{\nu_j}$ и $\nu - s < \nu_1 + \dots + \nu_s \leq \nu$. Тригонометрическая сумма этой сетки определяется равенством

$$S_{\tilde{\Omega}_\nu}(n) = S_{\tilde{\Omega}_\nu}(n_1, \dots, n_s) = \Delta^{s-1} T_\nu^{(s)}(n_1, \dots, n_s) = \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^j C_{s-1}^j T_{\nu-j}^{(s)}(n_1, \dots, n_s),$$

в котором

$$T_l^{(s)}(n_1, \dots, n_s) = \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_s = l} S_{\Omega_{\nu_1}}(n_1) \cdots S_{\Omega_{\nu_s}}(n_s)$$

и $S_{\Omega_{\nu_j}}(n_j)$ – тригонометрическая сумма сетки Ω_{ν_j} (здесь и далее $\Delta^k z_\nu$ – конечная разность порядка k величины z_ν , $\Delta z_\nu = z_\nu - z_{\nu-1}$, $\Delta^0 z_\nu = z_\nu$).

Из определения суммы $S_{\tilde{\Omega}_\nu}(n)$ вытекают следующие ее свойства:

- 1) величина $S_{\tilde{\Omega}_\nu}(n_1, \dots, n_s)$ не меняется при любой перестановке аргументов $n_1, \dots, n_s$;
- 2) Для $k = 1, \dots, s$ и $n_1 \neq 0, \dots, n_k \neq 0$

$$S_{\tilde{\Omega}_\nu}(n_1, \dots, n_k, 0, \dots, 0) = \Delta^{k-1} T_\nu^{(k)}(n_1, \dots, n_k).$$

Первое свойство очевидно, второе доказывается индукцией по s на основании равенств

$$T_\nu^{(s)}(n_1, \dots, n_{s-1}, n_s) = \sum_{l=0}^{\nu} S_{\Omega_{\nu-l}}(n_s) T_l^{(s-1)}(n_1, \dots, n_{s-1}),$$

$$S_{\Omega_\nu}(0) = 1, \quad \Delta T_\nu^{(s)}(n_1, \dots, n_{s-1}, 0) = T_\nu^{(s-1)}(n_1, \dots, n_{s-1}).$$

Далее, для $k = 1, \dots, s$ положим

$$R_k(\tilde{\Omega}_\nu; E_p^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)) = \left(\sum_{n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{|S_{\tilde{\Omega}_\nu}(n_1, \dots, n_k, 0, \dots, 0)|^q}{H^{\alpha q}(n_1, \dots, n_k, 0, \dots, 0)} \right)^{1/q}.$$

Пользуясь свойством 2) и оценкой (2.1), получим

$$\begin{aligned} R_k(\tilde{\Omega}_\nu; E_p^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)) &= \left(\sum_{n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \frac{\Delta^{k-1} T_\nu^{(k)}(n_1, \dots, n_k)}{|n_1|^\alpha \dots |n_k|^\alpha} \right|^q \right)^{1/q} \\ &\ll_k \sum_{\nu-k < \nu_1 + \dots + \nu_k \leq \nu} \left(\sum_{n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{|S_{\Omega_{\nu_1}}(n_1)|^q \dots |S_{\Omega_{\nu_k}}(n_k)|^q}{|n_1|^{\alpha q} \dots |n_k|^{\alpha q}} \right)^{1/q} \\ &= \sum_{\nu-k < \nu_1 + \dots + \nu_k \leq \nu} \prod_{j=1}^k R(\Omega_{\nu_j}; E_p^{(\alpha)}(\mathbb{T})) \\ &\ll_{\alpha, p, k} \sum_{\nu-k < \nu_1 + \dots + \nu_k \leq \nu} 2^{-(\nu_1 + \dots + \nu_k)\gamma} \ll_{\alpha, p, k} \nu^{k-1} 2^{-\gamma\nu}. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу равенства (1.3) и свойства 1)

$$R(\tilde{\Omega}_\nu; E_p^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)) = \left(\sum_{k=1}^s C_s^k R_k^q(\tilde{\Omega}_\nu; E_p^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)) \right)^{1/q} \ll_{\alpha, p, s} \nu^{s-1} 2^{-\gamma\nu}.$$

Переходя в полученном неравенстве от параметра ν к числу узлов N , приходим к оценке

$$R(\tilde{\Omega}_\nu; E_p^{(\alpha)}(\mathbb{T}^s)) \ll_{\alpha, p, s} \frac{(\log N)^{(s-1)(\gamma+1)}}{N^\gamma}.$$

Осталось лишь выбрать в качестве Ω_{ν_j} сетку, рассмотренную в [10] при выводе верхней оценки, для которой выполняется (2.1) с $\gamma = \alpha + 1/2 - 1/q$.

Автор благодарен В. А. Быковскому за постановку задачи и множество полезных советов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. К. Фролов, *Квадратурные формулы на классах функций*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, ВЦ АН СССР, М., 1979.
- [2] М. М. Skriganov, "Constructions of uniform distributions in terms of geometry of numbers", *Алгебра и анализ*, **6**:3 (1994), 200–230.
- [3] В. А. Быковский, *Оценки отклонений оптимальных сеток в L_p -норме и теория квадратурных формул*, ИПМ ДВО РАН, Владивосток–Хабаровск, 1995.
- [4] В. Н. Темляков, "Об одном приеме получения оценок снизу погрешностей квадратурных формул", *Матем. сб.*, **181**:10 (1990), 1403–1413.
- [5] Н. М. Коробов, "О приближенном вычислении кратных интегралов с помощью методов теории чисел", *Докл. АН СССР*, **115**:6 (1957), 1062–1065.
- [6] Н. С. Бахвалов, "О приближенном вычислении кратных интегралов", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем., мех., astron., физ., хим.*, 1959, № 4, 3–18.
- [7] И. Ф. Шарыгин, "Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций", *ЖВМ и МФ*, **3** (1963), 370–376.
- [8] В. Ф. Лев, *О квадратурных формулах для классов с ограничениями на коэффициенты Фурье*, деп. в ВИНТИ 6294–В87.
- [9] В. А. Быковский, *О правильном порядке погрешности оптимальных кубатурных формул в пространствах с доминирующей производной и квадратичных отклонениях сеток*, ДВНЦ АН СССР, Владивосток, 1985.
- [10] В. А. Быковский, М. А. Романов, "Квадратурный фазовый переход", *Докл. РАН*, **416**:6 (2007), 727–731.
- [11] С. А. Смоляк, "Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций", *Докл. АН СССР*, **148**:5 (1963), 1042–1045.
- [12] В. А. Быковский, *Теоретико-числовые решетки в евклидовых пространствах и их приложения*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск, 1989.

М. А. Романов

Хабаровское отделение Института прикладной математики
ДВО РАН

E-mail: romanov@iam.khv.ru

Поступило

17.09.2007