Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Карпенков, О нахождении периодов геометрических цепных дробей двумерных алгебраических гиперболических операторов, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 1, 30–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4045>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 12:31:18

УДК 511.48

О нахождении периодов геометрических цепных дробей двумерных алгебраических гиперболических операторов

О. Н. Карпенков

В работе приводится явное построение по последовательности положительных целых чисел целочисленного приведенного гиперболического оператора из группы $SL(2, \mathbb{Z})$, обладающего указанным периодом для геометрической цепной дроби в смысле Клейна. Далее экспериментально исследуется алгоритм построения периода для произвольного оператора $SL(2, \mathbb{Z})$ (теория приведения Гаусса).

Библиография: 18 названий.

Введение

Двумерный алгебраический оператор A из группы $SL(2, \mathbb{Z})$ называется *гиперболическим*, если его собственные значения вещественны и различны. В настоящей работе изучается связь между периодами геометрической цепной дроби по Клейну и приведенными операторами, описанными Левисом и Загиром в [1]. Фактически нахождение периода геометрической цепной дроби оператора A эквивалентно нахождению периода обыкновенной цепной дроби для тангенса угла наклона любой из двух собственных прямых оператора A к горизонтальной оси.

В настоящей работе мы приводим явное построение по периоду геометрической цепной дроби в смысле Клейна целочисленного приведенного гиперболического оператора из группы $SL(2, \mathbb{Z})$, обладающего указанным периодом для геометрической цепной дроби (теорема 6). Оказывается, приведенные операторы образуют естественные однопараметрические семейства. Далее мы описываем алгоритм построения периода для произвольного оператора $SL(2, \mathbb{Z})$. Алгоритм основан на нахождении приведенного оператора, сопряженного с данным (теория приведения Гаусса).

В 1993 г. Арнольд сформулировал несколько вопросов о периодах цепных дробей, связанных с собственными векторами операторов $SL(2, \mathbb{Z})$, в частности, см. [2; задача 1993-11] и [3]. Первые исследования поставленных задач приведены в статье Павловской [4], в которой автор экспериментально изучает статистические вопросы геометрических цепных дробей (например, нахождение средней длины периода). Вопросы о распределении положительных целых чисел в периодах квадратичных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-01012а, 05-01-02805-CNRS а, 05-02-89000-NWO а), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1972.2003.1) и NWO-DIAMANT (грант № 613.009.001).

цепных дробей были изучены Авдеевой и Быковским в работах [5] и [6]. В работе [7] Арнольд исследует палиндромные свойства периодов цепных дробей, а также их связь с целочисленными формами (полное доказательство палиндромности дано Ф. Аикарди и Павловской). О связи “—”-цепных дробей гиперболических операторов и фуксовых групп, а также об алгоритме проверки целочисленной сопряженности операторов $SL(2, \mathbb{Z})$ см. работу Катка [8]. Оценки периодов обыкновенных цепных дробей для $\sqrt{d}$ приведены в работе Хикерсона [9].

В работах [10] и [11] Клейн обобщил геометрические цепные дроби на случай многомерных операторов группы $SL(n, \mathbb{Z})$. Более подробно см. в работах Арнольда [3], Коркиной [12], Муссафира [13], автора [14] и др.

Работа организована следующим образом. В первом разделе даны определения обыкновенных цепных дробей и геометрических цепных дробей по Клейну, показана двойственность парусов геометрической цепной дроби. Далее во втором разделе построены семейства операторов, геометрические цепные дроби которых (точнее соответствующие LLS-последовательности) обладают периодом $(a_1, \dots, a_{2n-1}, t)$, где t — параметр в семействах. Далее приводится алгоритм вычисления периода геометрических цепных дробей. В третьем разделе сформулировано несколько вопросов и приведены результаты некоторых экспериментов, связанных с этим алгоритмом.

1. Геометрические цепные дроби по Клейну

Обыкновенная цепная дробь. Рассмотрим произвольную конечную последовательность целых чисел $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, где a_0 — любое, и $a_i > 0$ при $i > 0$. Рациональное число

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

называется *обыкновенной цепной дробью* и обозначается $[a_0 : a_1; \dots; a_n]$.

Цепная дробь с четным (нечетным) числом элементов называется соответственно *четной* (*нечетной*) *обыкновенной цепной дробью*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для любого рационального числа существуют и единственны четная и нечетная обыкновенные цепные дроби.*

Например, четная и нечетная обыкновенные цепные дроби для рационального числа $47/39$ равны $[1 : 4; 1; 7]$ и $[1 : 4; 1; 6; 1]$ соответственно.

Паруса гиперболического оператора. Через $[[a, c][b, d]]$ обозначим оператор

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Оператор группы $SL(2, \mathbb{R})$, обладающий парой различных вещественных собственных значений, называется *гиперболическим*.

Вектор (отрезок) называется *целочисленным*, если он (его концы) имеет целые координаты.

Рассмотрим гиперболический оператор A , не имеющий целочисленных собственных векторов. Оператор A имеет ровно две различные собственные прямые. Эти

прямые не содержат целых точек решетки, отличных от начала координат. Дополнение к объединению прямых состоит из четырех компонент связности, каждая из которых является открытым октантом. Рассмотрим один из октантов. Граница выпуклой оболочки всех целых точек, за исключением начала координат замыкания октанта, называется *парусом* оператора A . Набор всех парусов называется *геометрической цепной дробью по Клейну* оператора A (см. также работы Клейна [10], Лапо [15], Коркиной [12] и Арнольда [3]). Два паруса называются *эквивалентными*, если существует линейное преобразование, сохраняющее решетку и переводящее один из этих парусов в другой. Геометрические цепные дроби с эквивалентными парусами называются *эквивалентными*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Большинство описываемых конструкций обобщается на случай операторов, имеющих целочисленные собственные векторы. Для простоты изложения в настоящей работе мы их не рассматриваем.

LLS-последовательность. *Целочисленной длиной* целочисленного отрезка PQ называется количество целых внутренних точек отрезка плюс один и обозначается $\ell(PQ)$. Пусть целочисленные отрезки PQ и PR не лежат на одной прямой. *Целочисленным синусом* угла QPR называется индекс подрешетки, порожденной целыми векторами прямых PQ и PR , в решетке всех целых векторов (обозначение $\text{lsin}(QPR)$). Целочисленный синус угла, содержащегося в одной прямой, по определению полагается равным нулю.

Каждый парус гиперболического оператора A без целочисленных собственных векторов представляет собой ломаную с бесконечным числом в обе стороны отрезков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\dots V_{-2}V_{-1}V_0V_1V_2\dots$ – парус некоторого оператора. Бесконечная в обе стороны последовательность положительных целых чисел

$$(\dots, \ell(V_{-2}V_{-1}), \text{lsin} \angle V_{-2}V_{-1}V_0, \ell(V_{-1}V_0), \text{lsin} \angle V_{-1}V_0V_1, \ell(V_0V_1), \text{lsin} \angle V_0V_1V_2, \dots)$$

называется *LLS-последовательностью* паруса (см. также [16]).

Две LLS-последовательности называются *эквивалентными*, если одна получается из другой сдвигом на конечное число элементов и/или обращением порядка всех элементов. LLS-последовательности эквивалентных парусов эквивалентны, поскольку все целочисленные длины и синусы инвариантны относительно целочисленно-линейных преобразований.

На рис. 1 изображена геометрическая цепная дробь оператора $[[7, 18][5, 13]]$. Целочисленные длины ребер обозначены черными цифрами, а целочисленные синусы соответствующих углов – белыми. LLS-последовательности всех четырех парусов эквивалентны $(\dots, 2, 1, 1, 3, 2, 1, 1, \dots)$.

Двойственные паруса. Два паруса называются *двойственными* по отношению друг к другу, если их LLS-последовательности совпадают, при этом последовательность целочисленных длин первого паруса совпадает с последовательностью целочисленных синусов второго, а последовательность целочисленных синусов первого совпадает с последовательностью целочисленных длин второго. (О двойственности многомерных цепных дробей по Клейну см. в книге Лапо [15].)

Рис. 1. Геометрическая цепная дробь оператора $[[7, 18][5, 13]]$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть A – гиперболический оператор, не имеющий целочисленных собственных векторов. Тогда LLS-последовательности всех четырех его парусов совпадают, причем паруса противоположных октантов эквивалентны. Паруса смежных октантов двойственны.

В доказательстве предложения 3 используются следующие свойства целочисленного синуса (более подробно в [16]):

$$\text{lsin}(PQR) = \text{lsin}(RQP), \quad \text{lsin}(PQR) = \text{lsin}(\pi - PQR);$$

здесь через $\pi - PQR$ обозначен угол, смежный с углом PQR .

Утверждение предложения 3 известно автору от Арнольда и Коркиной и предполагается классическим, однако формулировка и доказательство, по всей видимости, отсутствуют в литературе. Чтобы избежать дальнейших вопросов, мы приводим здесь доказательство утверждения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Паруса противоположных октантов (а следовательно, и их LLS-последовательности) эквивалентны, поскольку они симметричны относительно начала координат.

Рассмотрим теперь случай смежных парусов. Пусть теперь S и S' – смежные паруса оператора A , причем S' лежит против хода часовой стрелки относительно S при обходе вокруг начала координат O . Пусть S – ломаная $\dots V_{-1}V_0V_1\dots$ с упорядоченными вершинами против часовой стрелки при обходе вокруг начала координат.

Установим естественную биекцию между ребрами паруса S и вершинами паруса S' . Рассмотрим ребро V_iV_{i+1} паруса S . Обозначим через V ближайшую целую точку отрезка V_iV_{i+1} к вершине V_{i+1} , отличную от V_{i+1} . Обозначим целую точку $O + \overline{VV_{i+1}}$ через V'_i . Отметим, что точка V'_i лежит в выпуклой оболочке S' .

Поскольку треугольник OVV_{i+1} не содержит целых точек внутри, треугольник OV'_iV_{i+1} тоже не содержит целых точек внутри. Следовательно, между параллельными прямыми OV и V'_iV_{i+1} нет целых точек. Следовательно, V'_i – вершина паруса S' (см. рис. 2, а)).

Рис. 2. Двойственность смежных парусов

С другой стороны, пусть V' – вершина паруса S' . Обозначим через l ближайшую к прямой OV' параллельную прямую, содержащую целые точки и пересекающую S . Прямая l пересекается с октантом, содержащим S' по лучу. Обозначим через W' ближайшую к вершине этого луча целую точку луча. Тогда точка $V' + \overline{W'V'}$ лежит в октанте, противоположном октанту с парусом S (иначе V' не является вершиной). Следовательно, точка $W' + 2\overline{V'O}$, симметричная относительно начала координат точке $V' + \overline{W'V'}$, лежит в октанте паруса S . Следовательно, целые точки $W' + \overline{V'O}$ и $W' + 2\overline{V'O}$ лежат в октанте, содержащем S . Поскольку l – ближайшая к прямой OV' параллельная прямая, содержащая целые точки и пересекающая S , отрезок с вершинами в точках $W' + \overline{V'O}$ и $W' + 2\overline{V'O}$ входит в парус (см. рис. 2, b)).

Таким образом, построенное выше соответствие между ребрами V_iV_{i+1} паруса S и вершинами V'_i паруса S' является биекцией. При этом вершины V'_i имеют порядок ломаной, проходимой по часовой стрелке.

Докажем теперь, что $l(V_iV_{i+1}) = l\sin(V'_{i-1}V'_iV'_{i+1})$. Обозначим точку $V_i + \overline{OV'_i}$ через W . По построению точка W принадлежит отрезку V_iV_{i+1} (см. рис. 2, c)). Тогда

$$l\sin(V'_{i-1}V'_iV'_{i+1}) = l\sin(\pi - WV'_iV'_{i+1}) = l\sin(WV'_iV'_{i+1}) = l(WV'_{i+1}) = l(V_iV_{i+1}).$$

Аналогично доказываются равенства

$$l(V'_iV'_{i+1}) = l\sin(V_{i-1}V_iV_{i+1}).$$

Таким образом, LLS-последовательности парусов S и S' совпадают, причем последовательность целочисленных длин (синусов) S совпадает с последовательностью целочисленных синусов (длин) S' . Следовательно, S и S' двойственны. Предложение 3 доказано.

Существование и единственность классов эквивалентных цепных дробей с заданными LLS-последовательностями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. LLS-Последовательностью оператора A называется LLS-последовательность любого из его парусов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. i) Для любой бесконечной в две стороны последовательности целых чисел существует гиперболический оператор, LLS-последовательность которого совпадает с данной.

ii) Два паруса, LLS-последовательности которых совпадают, либо эквивалентны, либо двойственны. Все паруса, двойственные данному, эквивалентны между собой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба утверждения вытекают из следствия 5.11 работы [16] (см. также работу Коркиной [12]).

2. Алгебраические паруса

Построение оператора с заданным периодом. Рассмотрим теперь алгебраический случай гиперболических операторов группы $SL(2, \mathbb{Z})$ с неприводимыми характеристическими многочленами над полем рациональных чисел. Пусть A – целочисленный гиперболический оператор группы $SL(2, \mathbb{Z})$. Обозначим через $\Xi(A)$ группу всех операторов $SL(2, \mathbb{Z})$, коммутирующих с A и обладающих положительными вещественными собственными значениями. По теореме Дирихле об единицах [17] группа $\Xi(A)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$. Каждый парус оператора A инвариантен относительно действия группы $\Xi(A)$, причем операторы группы $\Xi(A)$ действуют сдвигом ребер ломаной паруса вдоль ломаной. Паруса оператора A называются *алгебраическими*.

Таким образом, LLS-последовательности гиперболических алгебраических операторов являются периодическими. Верно и обратное утверждение (см. следствие 7 ниже).

ЗАМЕЧАНИЕ. На рисунке 1 изображены паруса гиперболического алгебраического оператора $[[7, 18][5, 13]]$, период LLS-последовательности которого равен $(2, 1, 1, 3)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть A – $SL(2, \mathbb{Z})$ -оператор $[[a, c + \lambda a][b, d + \lambda b]]$.

i) Пусть $a = 0, b = 1, d = 1$. При $\lambda \geq 2$ оператор A гиперболический, а его паруса алгебраические. При этом LLS-последовательность оператора A обладает периодом

$$(1, \lambda - 1).$$

ii) Пусть $b > a \geq 1, 0 < d \leq b, \lambda \geq 1$. Пусть нечетная обыкновенная цепная дробь b/a равна

$$[a_0 : a_1; \dots; a_{2n}].$$

Тогда оператор A гиперболический, а его паруса алгебраические. При этом LLS-последовательность оператора A обладает периодом

$$(a_0, a_1, \dots, a_{2n}, \lambda).$$

Отметим, что для любой пары взаимнопростых целых чисел (a, b) , где $b > a \geq 0$, существует пара целых (c, d) , удовлетворяющих $0 < d \leq b$ и $ad - bc = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При отрицательных значениях λ в случае $a = 0$ периоды равны $(1, |\lambda| - 3)$. В случае $a > 0$ периоды равны

$$(a'_{2m}, a'_{2m-1}, \dots, a'_0, |\lambda| - 2),$$

где $[a'_0 : a'_1; \dots; a'_{2m}]$ – нечетная обыкновенная цепная дробь для $b/(b - a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дискриминант характеристического многочлена оператора A равен $((a + \lambda b + d)^2 - 4)$. Поскольку $\lambda \geq 1, b \geq 1, d \geq 1$ и $a \geq 0$, дискриминант неотрицателен. Кроме того, он обращается в нуль в исключенном случае $a = 0, b = 1, \lambda = 1, d = 1$. Следовательно, оператор A во всех случаях гиперболический.

Поскольку $t^2 - 4$ при целых $t > 2$ не является полными квадратами целых чисел, оператор A обладает алгебраическими парусами.

Построим теперь период LLS-последовательности. Отметим, что оба собственных значения оператора A

$$\frac{a + \lambda b + d \pm \sqrt{(a + \lambda b + d)^2 - 4}}{2}$$

положительны, поэтому оператор A переводит каждый парус в себя. Рассмотрим парус S , выпуклая оболочка которого содержит точку $P = (1, 0)$.

Предположим, A – оператор из серии i). Тогда множество вершин одного из его парусов совпадает со множеством точек вида $A^n(1, 0)$ с целым параметром n . Несложные вычисления приводят к результату теоремы.

Рассмотрим теперь оператор A из серии ii), т.е. $b > a > 0$.

Обозначим через α замкнутый выпуклый угол с вершиной в начале координат и со сторонами, проходящими через точки P и $A(P)$. Рассмотрим границу выпуклой оболочки всех целых точек, кроме начала координат, лежащих внутри α . Граница состоит из пары лучей и конечной ломаной. Назовем конечную ломаную, входящую в границу, *парусом угла* α и обозначим через S_α .

Покажем теперь, что парус угла α целиком содержится в одном из парусов оператора A . Обозначим через S_α^∞ следующую бесконечную ломаную:

$$\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} (A^i(S_\alpha)).$$

По построению выпуклая оболочка S_α^∞ совпадает с выпуклой оболочкой паруса S . Остается проверить, совпадает ли S_α^∞ с границей своей выпуклой оболочки. Ломаная S_α^∞ является границей выпуклой оболочки, если выпуклые углы, образованные соседними ребрами ломаной, не содержат начала координат. Для проверки достаточно просмотреть все углы одного из периодов ломаной S_α^∞ , например, все углы при вершинах ломаной S_α , кроме точки $A(P)$. Все выпуклые углы, образованные парами ребер при внутренних вершинах паруса S_α , не содержат начала координат по определению. Остается проверить только угол при вершине $P = (1, 0)$.

Поскольку $b/a > 1$, первое ребро параллельно вектору $(0, 1)$. Рассмотрим второе ребро PQ . Поскольку треугольник OPQ не содержит целых точек, отличных от целых точек отрезка PQ и вершины O , отрезок PQ содержит точку с координатами $(x, -1)$. Из выпуклости конечной ломаной $A^{-1}(S_\alpha)$ величина x определяется собственным направлением

$$\left(\frac{-a + \lambda b + d + \sqrt{(a + \lambda b + d)^2 - 4}}{2b}, -1 \right),$$

а именно,

$$x = \left\lfloor \frac{-a + \lambda b + d + \sqrt{(a + \lambda b + d)^2 - 4}}{2b} \right\rfloor + 1,$$

где $[t]$ обозначает максимальное целое число, не превосходящее t . Как несложно убедиться, x расположен в открытом интервале $(\lambda + 1 + (d - 1)/b, \lambda + 1 + d/b)$. По

условию $b \geq d > 0$; следовательно,

$$x = \lambda + 1.$$

Таким образом, при $\lambda > 1$ выпуклый угол при вершине P не содержит начала координат. Следовательно, ломаная S_α^∞ совпадает с парусом.

В работе [16] показано, что парус S_α состоит из $n + 1$ отрезков. При этом целочисленные длины последовательных отрезков равны $a_0, a_2, \dots, a_{2n}$, а целочисленные синусы соответствующих углов равны $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}$. Заметим теперь, что из явного вида координаты x следует, что целочисленный синус угла с вершиной в P равен λ . Следовательно, LLS-последовательность паруса S обладает периодом

$$(a_0, a_1, \dots, a_{2n}, \lambda).$$

Следовательно, LLS-последовательность оператора A обладает указанным периодом.

СЛЕДСТВИЕ 7. *Парус с периодической LLS-последовательностью является алгебраическим (т.е. парусом некоторого алгебраического гиперболического оператора).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В теореме 6 мы построили алгебраические операторы со всевозможными конечными последовательностями в качестве периодов. Далее, в предложении 5 мы показали, что паруса с эквивалентными LLS-последовательностями либо эквивалентны, либо двойственны. Следовательно, парус с периодической LLS-последовательностью алгебраический.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим некоторый парус с периодической LLS-последовательностью. Пусть минимальный период LLS-последовательности четный и состоит из $2n$ элементов. Тогда существует $SL(2, \mathbb{Z})$ -оператор A с положительными собственными значениями, который осуществляет сдвиг вдоль паруса на n ребер. Именно этот оператор и порождает группу $\Xi(A)$ сдвигов паруса (см. выше). Пусть минимальный период LLS-последовательности нечетный и состоит из $2n + 1$ элементов (из этого, в частности, следует, что парус эквивалентен двойственному). Тогда существует $GL(2, \mathbb{Z})$ -оператор B с отрицательным дискриминантом, квадрат которого осуществляет сдвиг вдоль паруса на $2n + 1$ ребер. При этом оператор B^2 порождает группу $\Xi(B)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Скажем пару слов о негиперболических операторах группы $SL(2, \mathbb{Z})$. Оказывается любой из таких операторов эквивалентен ровно одному оператору следующего списка:

- $[[1, 1] [-1, 0]]$;
- $[[0, 1] [-1, 0]]$;
- $[[0, 1] [-1, -1]]$;
- $[[1, n] [0, 1]]$, где n – произвольное целое.

Алгоритм нахождения периода LLS-последовательности гиперболического алгебраического оператора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Назовем оператор $[[a, c] [b, d]]$ группы $SL(2, \mathbb{Z})$ *приведенным*, если выполняется $d > b \geq a \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение приведенного оператора немного отличается от определения, данного в работах [1] и [18]: оператор называется *приведенным*, если все его элементы неотрицательные и не уменьшаются сверху вниз и слева направо.

Основная идея построения периода заключается в нахождении приведенного оператора, паруса которого эквивалентны парусам исходного. В итоге остается вычислить период приведенного оператора по теореме 6. Альтернативный подход описан в работе Павловской [4], период находится при помощи разложения тангенса наклона одного из собственных направлений в цепную дробь.

Данные. Предположим заданы целочисленные элементы оператора $[[a, c][b, d]]$, с единичным определителем, дискриминант которого положителен. Пусть, кроме того, ± 1 не являются корнями характеристического многочлена. Из перечисленных условий следует, что оператор $[[a, c][b, d]]$ – гиперболический оператор из $SL(2, \mathbb{Z})$ с неприводимым характеристическим многочленом.

Требуется построить один из периодов LLS-последовательности гиперболического алгебраического оператора $[[a, c][b, d]]$.

Описание алгоритма.

Шаг 1. Если $b < 0$, домножим оператор $[[a, c][b, d]]$ на $[-1, 0][0, -1]$. При этом LLS-последовательность не изменится.

Шаг 2. Итак, элемент b теперь положителен. Сопряжем оператор $[[a, c][b, d]]$ оператором $[[1, -\lfloor a/b \rfloor][0, 1]]$. При этом получится оператор $[[a', b'][c', d']]$, где $0 \leq a' \leq b'$.

Шаг 3.1. Предположим, что $b' = 1$; тогда $a' = 0$, $c' = -1$. При этом $|d| > 2$, поскольку иначе исходный оператор не является алгебраическим. Следовательно, период LLS-последовательности оператора равен $(1, |d| - 2)$.

Шаг 3.2.1. Предположим, что $b' > 1$. Если $d' > b'$, то мы нашли приведенный оператор; переходим к шагу 4.

Шаг 3.2.2. Предположим, что $b' > 1$. Если $d' < -b'$, то сопрягаем оператором $[-1, 1][0, 1]$. В результате получается оператор $[[a'', c'']][b'', d'']]$, где $b'' = b'$, $a'' = b' - a'$ и $d'' = -b' - d' > 0$; далее следует переходить к шагу 3.2.1 или к шагу 3.2.3.

Шаг 3.2.3. Предположим, что $b' > 1$. Рассмотрим случай $|d'| \leq |b'|$. Отметим, что абсолютные значения b' и d' не совпадают, поскольку определитель оператора не имеет делителей, отличных от единицы. Таким образом, остается случай $|d| < |b|$. В этом случае мы получаем

$$|c'| = \left| \frac{a'd' - 1}{b'} \right| \leq \frac{(b' - 1)^2 + 1}{b'} \leq b' - 1.$$

Сопрягаем оператор $[[a', c'][b', d']]$ оператором $[[0, -1][-1, 0]]$ и получаем оператор $[[d', b'][c', a']]$, где $|c'| < |b'|$. Возвращаемся обратно к шагу 1 с полученным оператором $[[d', b'][c', a']]$.

Шаг 4. Получен приведенный оператор $[[\tilde{a}, \tilde{c}][\tilde{b}, \tilde{d}]]$, $\tilde{b} > 1$, LLS-последовательность которого эквивалентна LLS-последовательности исходного. По теореме 6 для построения одного из периодов LLS-последовательности необходимо разложить $\tilde{b}/\tilde{a}$ в обыкновенную нечетную цепную дробь, а также найти целое число $\lfloor (\tilde{d} - 1)/\tilde{b} \rfloor$.

3. Некоторые вопросы и примеры

Вопрос о сложности минимального периода. Отметим, что для каждого оператора существует лишь конечное число приведенных операторов, обладающих таким же характеристическим многочленом и эквивалентной LLS-последовательностью. При условии, что мы изучаем операторы сдвига паруса на минимальный период, число таких операторов совпадает с длиной периода (см. также в [1]). Пусть $[[a, c][b, d]]$ – приведенный оператор. Назовем b его *сложностью*.

ПРОБЛЕМА 1. Исследовать минимальную сложность для приведенных операторов, LLS-последовательность которых обладает периодом длины n : $(a_1, \dots, a_n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Минимальная сложность минимального периода совпадает с минимальным положительным значением целочисленных синусов углов POQ , где O – начало координат, $P = (x, y)$ – произвольная отличная от O целая точка, а $Q = A(P)$. Таким образом, минимальная сложность, заданная как минимальное значение целочисленного синуса, определена для всех операторов и инвариантна относительно сопряжений.

Если n – четно, то проблема равносильна нахождению максимального числителя из несократимых рациональных чисел:

$$[a_1 : \dots; a_{n-1}], \quad [a_2 : \dots; a_n], \quad [a_3 : \dots; a_n; a_1], \quad \dots, \quad [a_n : a_1; \dots; a_{n-2}].$$

ПРИМЕР 1. Пусть период состоит из двух элементов: (a, b) , где $a < b$; тогда минимальная сложность равна a .

ПРИМЕР 2. Пусть период состоит из четырех элементов: (a, b, c, d) . Пусть, кроме того, d не меньше остальных элементов периода, а также $d > a$, кроме случая $a = b = c = d$. Тогда рациональное число с наименьшим числителем находится из следующей таблицы.

(a, b, c, d) $d \geq a, b, c$	Рациональное число с наименьшим числителем
$d > a, b, c$	$[a : b; c]$
$d = c, b < a < d$	$[d : a; b]$
$d = c, a < b < d$	$[a : b; c]$
$d = c, a = b < d$	$[a : b; c]$ и $[d : a; b]$
$d = b, d > a, c$	$[a : b; c]$ и $[c : d; a]$
$d = c = b, d > a$	$[a : b; c]$ и $[c : d; a]$
$d = c = b = a$	все

Если n нечетно, то проблема равносильна нахождению максимального числителя из рациональных чисел (мы полагаем $a_{n+k} = a_k$):

$$[a_1 : \dots; a_{2n-1}], \quad [a_2 : \dots; a_{2n}], \quad [a_3 : \dots; a_{2n}; a_1], \quad \dots, \quad [a_{2n} : a_1; \dots; a_{2n-2}].$$

ПРИМЕР 3. Пусть период состоит из трех элементов: (a, b, c) , причем $c \geq a, b$. Тогда дробь $[a : b; c; a; b]$ будет обладать наименьшим числителем (либо одним из равных наименьших, если $a = c$ или $b = c$).

Предположение о том, что следует выкидывать один из максимальных элементов периода, неверно уже для последовательностей из шести элементов: $(1, 4, 5, 4, 1, 4)$. Минимум числителя достигается у дроби $[1 : 4; 5; 4; 1]$, а не у дроби $[4 : 1; 4; 1; 4]$.

О частотах появления приведенных операторов. Опишем сначала подходящее вероятностное пространство. Пусть $P = (a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}, a_{2n})$ – некоторый период. Обозначим через $\#_N(P)$ количество всех операторов, удовлетворяющих следующим условиям:

- i) элементы оператора не превосходят по модулю N ;
- ii) последовательность P является одним из периодов LLS-последовательности оператора;
- iii) алгоритм предыдущего раздела строит по такому оператору приведенный оператор $[[a, b][c, d]]$, где $(a, b) = (0, 1)$ для случая $P = (1, a_2)$ и

$$\frac{b}{a} = [a_1 : a_2; \dots; a_{2n-1}]$$

в остальных случаях.

Далее следует изучать относительные статистики $\#_N(P)$ при N стремящемся к бесконечности. Представляет также интерес следующие вопросы.

ПРОБЛЕМА 2. а) Какой из приведенных операторов среди операторов с фиксированным следом (или с фиксированной LLS-последовательностью) чаще всего получается в результате применения алгоритма из предыдущего раздела?

б) С какой вероятностью это происходит?

с) Верно ли, что максимальная вероятность достигается на приведенных операторах минимальной сложности?

В табл. 1 приведены результаты вычисления $\#_{25\,000}(P)$ для операторов с небольшим абсолютным значением следа. Напомним, что минимальное абсолютное значение следа гиперболического оператора из $SL(2, \mathbb{Z})$ равно 3.

Интересно отметить, что чаще всего встречаются $SL(2, \mathbb{Z})$ операторы, отвечающие $P = (1, 2)$, а не $P = (1, 1)$. Это происходит из-за того, что паруса, LLS-последовательности которых обладают периодом $(1, 1)$, эквивалентны своим двойственным. Если же мы будем считать операторы с кратностями, равными количеству эквивалентных парусов, то мы получим

$$4\#_{25\,000}(1, 1) > 2\#_{25\,000}(1, 2) + 2\#_{25\,000}(2, 1).$$

В завершение работы сформулируем следующий вопрос. Обозначим через $GK(P)$ вероятность последовательности $P = (a_1, a_2, \dots, a_{2n-1})$ по Гауссу–Кузьмину:

$$GK(P) = \frac{1}{\ln(2)} \ln \left(\frac{(\alpha_1 + 1)\alpha_2}{\alpha_1(\alpha_2 + 1)} \right),$$

где

$$\alpha_1 = [a_1 : a_2; \dots; a_{2n-2}; a_{2n-1}], \quad \alpha_2 = [a_1 : a_2; \dots; a_{2n-2}; a_{2n-1} + 1].$$

ПРОБЛЕМА 3. Пусть

$$\begin{aligned} P_1 &= (a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}), & P'_1 &= (a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}), \\ P_2 &= (a_2, a_3, \dots, a_{2n}, a_1), & P'_2 &= (a_2, a_3, \dots, a_{2n}). \end{aligned}$$

Таблица 1. Значения $\#_{25\,000}(P)$ для операторов с небольшим абсолютным значением следа

Модуль следа	Условное обозначение класса эквивалентных операторов	Период P	Оператор $[[a, b][c, d]]$	Значение $\#_{25\,000}(P)$
3	L_3	(1, 1)	$[[0, 1][-1, 3]]$	663 160
4	L_4	(1, 2)	$[[0, 1][-1, 4]]$	834 328
		(2, 1)	$[[1, 2][1, 3]]$	304 776
5	L_5	(1, 3)	$[[0, 1][-1, 5]]$	818 200
		(3, 1)	$[[1, 3][1, 4]]$	194 528
6	$L_{6,1}$	(1, 4)	$[[0, 1][-1, 6]]$	777 128
		(4, 1)	$[[1, 4][1, 5]]$	141 784
	$L_{6,2}$	(2, 2)	$[[1, 2][2, 5]]$	446 432
7	$L_{7,1}$	(1, 5)	$[[0, 1][-1, 7]]$	734 904
		(5, 1)	$[[1, 5][1, 6]]$	110 848
	$L_{7,2}$	(1, 1, 1, 1)	$[[2, 3][3, 5]]$	201 744
8	$L_{8,1}$	(1, 6)	$[[0, 1][-1, 8]]$	695 560
		(6, 1)	$[[1, 6][1, 7]]$	90 688
	$L_{8,2}$	(2, 3)	$[[1, 2][3, 7]]$	435 472
		(3, 2)	$[[1, 3][2, 7]]$	310 872
9	L_9	(1, 7)	$[[0, 1][-1, 9]]$	660 984
		(7, 1)	$[[1, 7][1, 8]]$	76552
10	$L_{10,1}$	(1, 8)	$[[0, 1][-1, 10]]$	630 592
		(8, 1)	$[[1, 8][1, 9]]$	66 064
	$L_{10,2}$	(2, 4)	$[[1, 2][4, 9]]$	408 216
		(4, 2)	$[[1, 4][2, 9]]$	239 712
	$L_{10,3}$	(1, 1, 1, 2)	$[[2, 3][5, 8]]$	260 872
		(2, 1, 1, 1)	$[[2, 5][3, 8]]$	114 084
		(1, 2, 1, 1)	$[[3, 4][5, 7]]$	149 832
		(1, 1, 2, 1)	$[[3, 5][4, 7]]$	114 084

Верно ли следующее:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#_n(P_1)}{\#_n(P_2)} = \frac{GK(P'_1)}{GK(P'_2)}?$$

Автор благодарен Арнольду за постоянный интерес к этой работе, Павловской за полезные замечания, а также Математическому институту университета Лейдена за гостеприимство и отличные рабочие условия.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Lewis, D. Zagier, “Period functions and the Selberg zeta function for the modular group”, *The Mathematical Beauty of Physics*, Adv. Ser. Math. Phys., **24**, World Sci., Singapore, 1997, 83–97.
- [2] В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, Фазис, М., 2000.
- [3] В. И. Арнольд, *Цепные дроби*, МЦНМО, М., 2002.
- [4] M. Pavlovskaya, *Continued Fraction Expansions of Matrix Eigenvectors*, preprint, 2007.

- [5] М. О. Авдеева, В. А. Быковский, *Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса–Кузьмина*, Препринт ДВО РАН по. 08, Дальнаука, Владивосток, 2002.
- [6] М. О. Авдеева, “О статистиках неполных частных конечных цепных дробей”, *Функц. анализ и его прил.*, **38:2** (2004), 1–11.
- [7] В. И. Арнольд, “Арифметика совершенных квадратичных форм, симметрия их непрерывных дробей и геометрия их мира де Ситтера”, *Материалы летней школы “Современная Математика”* (16–28 июля 2002 г., Дубна), Общие лекции, <http://www.mccme.ru/dubna/2002/material.htm>.
- [8] S. Katok, *Continued fractions, Hyperbolic Geometry and Quadratic Forms Course Notes for MATH 497A REU Program, Summer 2001*, <http://www.math.psu.edu/katok.s/pub/reu-book.ps>.
- [9] D. R. Hickerson, “Length of period of simple continued fraction expansion of $\sqrt{d}$ ”, *Pacific J. Math.*, **46:2** (1973), 429–432.
- [10] F. Klein, “Ueber eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung”, *Gott. Nachr.*, **3** (1895), 357–359.
- [11] F. Klein, “Sur une représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire”, *Nouv. Ann.* (3), **15** (1896), 327–331.
- [12] Е. И. Коркина, “Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры”, *Особенности гладких отображений с дополнительными структурами*, Сборник статей, Тр. МИАН, **209**, Наука, М., 1995, 143–166.
- [13] J.-O. Moussaïf, *Voiles et Polyèdres de Klein. Géométrie, Algorithmes et Statistiques*, Docteur en sciences thèse, Université Paris IX, Dauphine, 2000, <http://www.ceremade.dauphine.fr/~msfr/>.
- [14] О. Н. Карпенков, “О триангуляциях торов, связанных с двумерными цепными дробями кубических иррациональностей”, *Функц. анализ и его прил.*, **38:2** (2004), 28–37.
- [15] G. Lachaud, *Voiles et Polyèdres de Klein*, Preprint no. 95-22, Laboratoire de Mathématiques Discrètes du C.N.R.S., Luminy, 1995.
- [16] O. Karpenkov, *Elementary notions of lattice trigonometry*, arXiv: [math.CO/0604129](https://arxiv.org/abs/math.CO/0604129).
- [17] З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, М., 1985.
- [18] Yu. I. Manin, M. Marcolli, *Continued fractions, modular symbols, and non-commutative geometry*, arXiv: [math.NT/0102006](https://arxiv.org/abs/math.NT/0102006).

О. Н. Карпенков

Mathematical Institute, Leiden University, Нидерланды

E-mail: karpenk@mccme.ru, karpenk@math.leidenuniv.nl

Поступило

26.09.2007