Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Терехин, О сходимости биортогональных рядов по системе сжатий и сдвигов функций в пространствах $L^p[0, 1]$, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 722–740

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4046>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:47:41

УДК 517.51

О сходимости биортогональных рядов по системе сжатий и сдвигов функций в пространствах $L^p[0, 1]$

П. А. Терехин

Получены условия сходимости в пространствах $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, биортогональных рядов вида

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \psi_n) \varphi_n$$

по системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ сжатий и сдвигов функции φ . Предложенные условия формулируются в терминах принадлежности функций пространству $\mathfrak{L}^p$ абсолютно сходящихся по пачкам рядов Фурье–Хаара с нормой

$$\|f\|_p^* = |(f, \chi_0)| + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \chi_n)|^p \right)^{1/p},$$

где (f, χ_n) , $n = 0, 1, \dots$, – коэффициенты Фурье функции $f \in L^p[0, 1]$ по системе Хаара $\{\chi_n\}_{n \geq 0}$. В частности, даны условия базисности системы $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ сжатий и сдвигов функции φ в пространствах $L^p[0, 1]$ и $\mathfrak{L}^p$.

Библиография: 30 названий.

1. Введение. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $L^p = L^p[0, 1]$ – пространство Лебега всех измеримых на отрезке $[0, 1]$ функций $f(t)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Обозначим $\{\chi_n\}_{n \geq 0}$ систему функций Хаара [1]. Именно, $\chi_0(t) \equiv 1$ и для любого натурального $n \in \mathbb{N}$

$$\chi_n(t) = \begin{cases} 2^{k/2}, & \text{при } t \in [j2^{-k}, (j+1/2)2^{-k}), \\ -2^{k/2}, & \text{при } t \in [(j+1/2)2^{-k}, (j+1)2^{-k}), \\ 0, & \text{при } t \notin [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}), \end{cases}$$

где $k = k(n)$ и $j = j(n)$ определяются из стандартного представления $n = 2^k + j$, в котором $k = 0, 1, \dots$ и $j = 0, \dots, 2^k - 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2970.2008.1).

Известно, что система Хаара $\{\chi_n\}_{n \geq 0}$ образует базис пространства L^p (см. Шаудер [2]), т.е. для любой функции $f \in L^p$ справедливо представление

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \chi_n) \chi_n,$$

ряд в правой части которого сходится по норме пространства L^p . Здесь

$$(f, \chi_n) = \int_0^1 f(t) \chi_n(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots,$$

– коэффициенты Фурье функции f по ортонормированной системе Хаара.

Пусть функция $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, имеет носитель $\text{supp } \varphi \subset [0, 1]$. Для $n \in \mathbb{N}$ по стандартному представлению $n = 2^k + j$ положим

$$\varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = 2^{k/2} \varphi(2^k t - j), \quad k = 0, 1, \dots, \quad j = 0, \dots, 2^k - 1.$$

Кроме того, пусть $\varphi_0(t) \equiv 1$. Система функций $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ называется *системой сжатий и сдвигов функции φ* .

Нетрудно видеть, что система Хаара $\{\chi_n\}_{n \geq 0}$ является системой сжатий и сдвигов функции $\chi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1]}$, где $\chi_{[a,b)}$ – характеристическая функция полуинтервала $[a, b)$.

Рассмотрим *пространство $\mathfrak{L}^p$ абсолютно сходящихся по пачкам рядов Фурье–Хаара*. По определению функция f принадлежит пространству $\mathfrak{L}^p$, если $f \in L^p$ и ее коэффициенты Фурье–Хаара удовлетворяют условию

$$\|f\|_p^* = |(f, \chi_0)| + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \chi_n)|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Далее, пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных чисел $\lambda_k \geq 0$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty.$$

Скажем, что функция f принадлежит классу $\mathfrak{L}^p(\Lambda)$, если для ее коэффициентов Фурье–Хаара, во-первых, выполняются условия нормировки

$$(f, \chi_0) = 0, \quad (f, \chi_1) = 1, \quad (1)$$

и, во-вторых, выполняются неравенства

$$2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \chi_n)|^p \right)^{1/p} \leq \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Сразу заметим, что $\mathfrak{L}^p(\Lambda) \subset \mathfrak{L}^p \subset L^p$ и $\|f\|_p \leq \|f\|_p^*$. Кроме того, условия нормировки (1) для порождающей функции φ системы сжатий и сдвигов означают, что

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = 0, \quad 2 \int_0^{1/2} \varphi(t) dt = 1.$$

Можно показать, что если $\varphi \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, и $\varphi \neq 0$, то условие $\int_0^1 \varphi(t) dt = 0$ равносильно минимальности системы $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$, а условие $\int_0^{1/2} \varphi(t) dt \neq 0$ необходимо для полноты системы $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$, поскольку в противном случае функция Хаара χ ортогональна всем функциям системы сжатий и сдвигов.

Предположим, что порождающая функция $\varphi \in L^p$ системы сжатий и сдвигов $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ удовлетворяет условиям нормировки (1). Рассмотрим биортогональное разложение

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} (f, \psi_n) \varphi_n \quad (3)$$

функции $f \in L^p$ по системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$. Явный вид биортогонально сопряженной системы $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ будет указан в пункте 2, лемма 2. Следует отметить, что система $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ не является системой сжатий и сдвигов за исключением того единственного случая, при котором $\varphi = \psi = \chi$ и разложение (3) является ортогональным рядом Фурье–Хаара.

Основной вопрос данной работы заключается в нахождении условий, обеспечивающих сходимость биортогонального ряда (3) как по норме пространства L^p , так и по норме пространства $\mathfrak{L}^p$. Ответ на основной вопрос будет дан в терминах принадлежности порождающей функции φ классу $\mathfrak{L}^p(\Lambda)$.

В связи с постановкой основного вопроса нельзя не упомянуть, в первую очередь, классические работы Хаара [1], Шаудера [2], [3] и Фабера [4], посвященные рядам по системе Хаара и Фабера–Шаудера, а также работы Чантурия [5] и Сабуровой [6] о базисности систем типа Фабера–Шаудера в пространстве $C[0, 1]$ непрерывных функций. Рассматриваемый основной вопрос тесно связан с теорией всплесков, в особенности, с периодическими всплесками. Задача построения всплескоподобного семейства функций в пространствах функций, заданных на отрезке, обсуждалась многими авторами. В классических монографиях Добеши [7] и Мейера [8] построены периодические всплески как периодизированные всплески в $L^2(\mathbb{R})$. Другой подход к построению всплесков на интервале и вообще, всплесков на замкнутом множестве, предложен в работах [9]–[11]. Общие периодические всплески и периодический кратно-масштабный анализ определены и изучены в работах Чуи, Вонга [12], Петухова [13], Скопиной [14]. Подробную библиографию по данному вопросу можно найти, например, в книгах Кашина, Саакяна [15] и Новикова, Протасова, Скопиной [16]. Здесь же заметим, что периодические всплески, всплески на интервале, всплески на замкнутом множестве и т.п. не являются системами сжатий и сдвигов, за единственным исключением, системы функций Хаара. Однако, рассматриваемый основной вопрос непосредственно мотивирован теорией всплесков. Наконец, заметим, что некоторые результаты о полноте и базисности системы сжатий и сдвигов функции в пространствах L^p имеются в работах автора [17]–[21].

2. Обозначения и вспомогательные утверждения. Условимся о следующих обозначениях:

- $\mathcal{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0, 1\}^k$ – семейство всех конечных последовательностей $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, состоящих из нулей и единиц (включая при $k = 0$ пустую последовательность);

- $|\alpha|$ – длина последовательности $\alpha \in \mathcal{A}$, т.е. $|\alpha| = k$ для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, длину пустой последовательности полагаем равной нулю;
- $\alpha\beta$ – конкатенация последовательностей $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$: если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$, то $\alpha\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l)$.

Укажем на естественное взаимнооднозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и семейством $\mathcal{A}$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n = 2^k + j$ – стандартное представление. Рассмотрим двоичное разложение $j = \sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu 2^{k-\nu}$ числа $j = 0, \dots, 2^k - 1$. Набор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}$ поставим в соответствие натуральному числу n .

В дальнейшем мы будем использовать указанное взаимнооднозначное соответствие для замены индекса $c_n = c_{k,j} = c(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = c_\alpha$, где на месте семейства c может оказаться как числовая последовательность, так и система функций.

Введем в рассмотрение, следуя работе [22], операторную *структуру мультидвиги* $\{V_0, V_1\}$, полагая

$$V_0 f(t) = 2^{1/2} f(2t), \quad V_1 f(t) = 2^{1/2} f(2t - 1),$$

где для удобства определения считаем, что функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, имеет носитель $\text{supp } f \subset [0, 1]$. Далее, обозначим

$$V^\alpha = V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_k}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A},$$

произведение операторов: первым действует оператор V_{α_k} , последним – V_{α_1} , пустое произведение полагаем равным тождественному оператору I . В принятых обозначениях имеем $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty = \{V^\alpha \varphi\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ – система сжатий и сдвигов функции φ без постоянной $\varphi_0(t) \equiv 1$. В самом деле, вычислим

$$\begin{aligned} V^\alpha \varphi(t) &= V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_k} \varphi(t) = 2^{1/2} \cdots 2^{1/2} \varphi(2(2 \cdots (2t - \alpha_1) - \cdots - \alpha_{k-1}) - \alpha_k) \\ &= 2^{k/2} \varphi(2^k t - 2^{k-1} \alpha_1 - \cdots - 2 \alpha_{k-1} - \alpha_k) = 2^{k/2} \varphi(2^k t - j) = \varphi_n(t). \end{aligned}$$

Пусть, по-прежнему, функция $\varphi \in L^p$ удовлетворяет нормировке (1).

ЛЕММА 1. Для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ имеем

$$(\chi_\alpha, \varphi_\beta) = \begin{cases} (\chi_\gamma, \varphi), & \text{если } \alpha = \beta\gamma, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем ряд Фурье–Хаара функции φ в виде

$$\varphi = \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} (\varphi, \chi_\gamma) \chi_\gamma.$$

Отсюда находим

$$\varphi_\beta = V^\beta \varphi = \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} (\varphi, \chi_\gamma) V^\beta \chi_\gamma = \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} (\varphi, \chi_\gamma) \chi_{\beta\gamma}.$$

С другой стороны, имеем

$$\varphi_\beta = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} (\varphi_\beta, \chi_\alpha) \chi_\alpha.$$

Сравнивая два последних разложения с учетом единственности коэффициентов ряда Фурье–Хаара видим, что если $\alpha = \beta\gamma$ для некоторого $\gamma \in \mathcal{A}$ (такой набор γ единствен согласно определению конкатенации), то $(\varphi_\beta, \chi_\alpha) = (\varphi, \chi_\gamma)$. Если же α не представим в виде $\beta\gamma$ ни при каком $\gamma \in \mathcal{A}$, то $(\varphi_\beta, \chi_\alpha) = 0$.

Обозначим $\{x_n\}_{n \geq 0}$ последовательность коэффициентов Фурье–Хаара функции φ . Ввиду нормировки (1) имеем $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$. Построим новую числовую последовательность $\{y_n\}_{n \geq 0}$ с той же нормировкой $y_0 = 0$ и $y_1 = 1$ следующим образом. Для натуральных n воспользуемся заменой индекса $x_n = x_\alpha$ и $y_n = y_\alpha$, так что для пустой последовательности α имеем $x_\alpha = y_\alpha = 1$. Остальные y_α определяем последовательно из рекуррентных соотношений

$$\sum_{\nu=0}^k x(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Теперь определим систему функций $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ посредством равенств

$$\psi_n = \psi_\alpha = \sum_{\nu=0}^k y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) \chi(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

и, кроме того, $\psi_0(t) \equiv 1$.

ЛЕММА 2. Система функций $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ является биортогонально сопряженной к системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ сжатий и сдвигов функции φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $|\alpha| = k$, $|\beta| = l$. Вычислим

$$(\psi_\alpha, \varphi_\beta) = \sum_{\nu=0}^k y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) (\chi(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu), \varphi(\beta_1, \dots, \beta_l)).$$

В силу леммы 1 имеем

$$(\chi(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu), \varphi(\beta_1, \dots, \beta_l)) = \begin{cases} (\chi_\gamma, \varphi), & \text{если } (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) = \beta\gamma, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Уравнение $(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) = \beta\gamma$ разрешимо относительно γ лишь в том случае, если $l \leq \nu$ и $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_l = \beta_l$. При этом $|\gamma| = \nu - l$ и $\alpha_{l+1} = \gamma_1, \dots, \alpha_\nu = \gamma_{\nu-l}$. Таким образом, устраняя заведомо равные нулю слагаемые, окончательно находим

$$\begin{aligned} (\psi_\alpha, \varphi_\beta) &= \sum_{\nu=l}^k y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) (\chi(\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_\nu), \varphi) \\ &= \sum_{\nu=l}^k x(\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_\nu) y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k). \end{aligned}$$

Применяя рекуррентные соотношения (4) с заменой $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ на $(\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_k)$, получаем, что $(\psi_\alpha, \varphi_\beta) = 0$ при $k \neq l$. Если же $k = l$, то $(\psi_\alpha, \varphi_\beta)$ отлично от нуля в том и только в том случае, когда $\alpha = \beta$, при этом $(\psi_\alpha, \varphi_\beta) = x_1 y_1 = 1$.

Равенства (5) показывают, что функции биортогонально сопряженной системы $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ суть полиномы по системе Хаара и, следовательно, являются ступенчатыми функциями, постоянными на двоично-рациональных полуинтервалах вида $[j2^{-k}, (j+1)2^{-k})$, где $k = k(n) + 1$ и $j = 0, \dots, 2^k - 1$. Поэтому коэффициенты (f, ψ_n) биортогонального ряда (3) корректно определены для любой суммируемой функции f .

ЛЕММА 3. Для любого $k \geq 0$ и любых c_α , $|\alpha| = k$, имеет место равенство

$$\left\| \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \varphi_\alpha \right\|_p = 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^p \right)^{1/p} \|\varphi\|_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения системы $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ сжатий и сдвигов функции φ следует, что носитель $\text{supp } \varphi_\alpha \subset [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}]$, где $k = |\alpha|$ и $j = \sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu 2^{k-\nu}$. Поэтому

$$\left| \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \varphi_\alpha(t) \right|^p = \sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^p |\varphi_\alpha(t)|^p,$$

по крайней мере, для всех $t \neq j2^{-k}$. Отсюда, предварительно вычислив

$$\begin{aligned} \|\varphi_\alpha\|_p &= \left(\int_0^1 |\varphi_\alpha(t)|^p dt \right)^{1/p} = \left(\int_{j2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}} |2^{k/2} \varphi(2^k t - j)|^p dt \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^1 |2^{k/2} \varphi(\tau)|^p 2^{-k} d\tau \right)^{1/p} = 2^{k(1/2-1/p)} \|\varphi\|_p, \end{aligned}$$

окончательно находим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \varphi_\alpha \right\|_p &= \left(\int_0^1 \left| \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \varphi_\alpha(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^p \int_0^1 |\varphi_\alpha(t)|^p dt \right)^{1/p} = 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^p \right)^{1/p} \|\varphi\|_p. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. Для любого $k \geq 0$ и любых c_α , $|\alpha| = k$, имеет место равенство

$$\left\| \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \varphi_\alpha \right\|_p^* = 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^p \right)^{1/p} \|\varphi\|_p^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \varphi_\alpha &= \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha V^\alpha \varphi = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha V^\alpha \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x_\beta \chi_\beta \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \sum_{\beta \in \mathcal{A}} c_\alpha x_\beta V^\alpha V^\beta \chi = \sum_{\gamma=\alpha\beta, |\alpha|=k, \beta \in \mathcal{A}} c_\alpha x_\beta V^\gamma \chi \\ &= \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{|\gamma|=m} c(\gamma_1, \dots, \gamma_k) x(\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_m) \chi_\gamma. \end{aligned}$$

По определению нормы в пространстве $\mathfrak{L}^p$ получаем

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \varphi_\alpha \right\|_p^* &= \left\| \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{|\gamma|=m} c(\gamma_1, \dots, \gamma_k) x(\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_m) \chi_\gamma \right\|_p^* \\
 &= \sum_{m=k}^{\infty} 2^{m(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\gamma|=m} |c(\gamma_1, \dots, \gamma_k) x(\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_m)|^p \right)^{1/p} \\
 &= \sum_{m=k}^{\infty} 2^{m(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^p \sum_{|\beta|=m-k} |x_\beta|^p \right)^{1/p} \\
 &= \left(\sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^p \right)^{1/p} \sum_{m=k}^{\infty} 2^{m(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\beta|=m-k} |x_\beta|^p \right)^{1/p} \\
 &= 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^p \right)^{1/p} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{l(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\beta|=l} |x_\beta|^p \right)^{1/p} \\
 &= 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^p \right)^{1/p} \|\varphi\|_p^*.
 \end{aligned}$$

Пусть теперь функция φ принадлежит классу $\mathfrak{L}^p(\Lambda)$. По определению этого класса для коэффициентов Фурье–Хаара функции φ выполняются неравенства (2), которые запишем в следующем виде:

$$2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |x_\alpha|^p \right)^{1/p} \leq \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
 \lambda(z) &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k z^k, \\
 \mu(z) &= \frac{1}{\lambda(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k,
 \end{aligned}$$

где числовая последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ определяется рекуррентными соотношениями

$$\mu_k = \lambda_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k-\nu} \mu_\nu, \quad k = 1, 2, \dots$$

ЛЕММА 5. *Справедливы неравенства*

$$2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |y_\alpha|^p \right)^{1/p} \leq \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $|\alpha| = k = 1$ имеем $y_\alpha = -x_\alpha$. Поэтому

$$2^{1/2-1/p} \left(\sum_{|\alpha|=1} |y_\alpha|^p \right)^{1/p} = 2^{1/2-1/p} \left(\sum_{|\alpha|=1} |x_\alpha|^p \right)^{1/p} \leq \lambda_1 = \mu_1.$$

Предположим, что (6) уже доказано для всех $\nu < k$. Для $|\alpha| = k$ имеем

$$-y_\alpha = x_\alpha + \sum_{\nu=1}^{k-1} x(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k),$$

откуда с учетом неравенства треугольника для ℓ^p -нормы находим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{|\alpha|=k} |y_\alpha|^p \right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{|\alpha|=k} |x_\alpha|^p \right)^{1/p} + \sum_{\nu=1}^{k-1} \left(\sum_{|\alpha|=k} |x(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k)|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{|\alpha|=k} |x_\alpha|^p \right)^{1/p} + \sum_{\nu=1}^{k-1} \left(\sum_{|\beta|=\nu} |x_\beta|^p \sum_{|\gamma|=k-\nu} |y_\gamma|^p \right)^{1/p} \\ &\leq 2^{-k(1/2-1/p)} \lambda_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} 2^{-\nu(1/2-1/p)} \lambda_\nu 2^{-(k-\nu)(1/2-1/p)} \mu_{k-\nu} \\ &= 2^{-k(1/2-1/p)} \left(\lambda_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_\nu \mu_{k-\nu} \right) = 2^{-k(1/2-1/p)} \mu_k. \end{aligned}$$

Неравенства (6) установлены по индукции.

ЛЕММА 6. *Имеют место эквивалентности*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1 &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1 \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda_k < \infty &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k \mu_k < \infty. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1$ означает, во-первых, что ряд Тейлора аналитической функции $\lambda(z)$ абсолютно сходится в замкнутом единичном круге ($|z| \leq 1$) и, во-вторых, что в этом круге функция $\lambda(z)$ не имеет нулей. Указанные два свойства функции $\lambda(z)$ равносильны согласно аналога теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье [23] (см. также, например, [24; с. 140]), абсолютной сходимости ряда Тейлора функции $\mu(z) = 1/\lambda(z)$. Последнее означает выполнение условия $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty$. Этим установлена первая эквивалентность леммы. Теперь вторая эквивалентность непосредственно следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k \mu_k &= \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\lambda_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k-\nu} \mu_\nu \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k-\nu} \mu_\nu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda_k + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \lambda_{k-\nu} \mu_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda_k + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_\nu \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \end{aligned}$$

с учетом неотрицательности числовых последовательностей $\lambda_k, \mu_k \geq 0$.

3. Теоремы о равносходимости. Пусть

$$S_N^{(0)} f = (f, 1)1 + \sum_{|\alpha| < N} (f, \chi_\alpha) \chi_\alpha = \sum_{n=0}^{2^N-1} (f, \chi_n) \chi_n$$

– частная сумма порядка 2^N ряда Фурье–Хаара функции f и

$$S_N f = (f, 1)1 + \sum_{|\alpha| < N} (f, \psi_\alpha) \varphi_\alpha = \sum_{n=0}^{2^N-1} (f, \psi_n) \varphi_n$$

– частная сумма порядка 2^N биортогонального разложения функции f по системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ сжатий и сдвигов функции φ . Пусть, далее,

$$E_N = \|\chi - S_N \chi\|_p, \quad N = 1, 2, \dots,$$

– уклонение частных сумм биортогонального разложения от функции χ в метрике пространства L^p и

$$E_N^* = \|\chi - S_N \chi\|_p^*, \quad N = 1, 2, \dots,$$

– уклонение частных сумм биортогонального разложения от функции χ в метрике пространства $\mathfrak{L}^p$.

Для функции $f \in L^p$ и $k = 0, 1, \dots$ положим

$$F_k(f) = 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |(f, \chi_\alpha)|^p \right)^{1/p} = 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \chi_n)|^p \right)^{1/p}.$$

Сначала найдем условия равносходимости частных сумм $S_N^{(0)} f$ ряда Фурье–Хаара и частных сумм $S_N f$ биортогонального ряда по системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ сжатий и сдвигов функции φ в метрике пространства L^p .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p < \infty$ и функция $\varphi \in L^p$ удовлетворяет условиям нормировки (1).

Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) для того, чтобы для любой функции $f \in \mathfrak{L}^p$ выполнялось предельное соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N^{(0)} f - S_N f\|_p = 0,$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0;$$

(б) если

$$\sum_{N=1}^{\infty} E_N < \infty,$$

то для любой функции $f \in L^p$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N^{(0)} f - S_N f\|_p = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим равенство

$$S_N f = S_N S_N^{(0)} f. \quad (7)$$

Для этого вычислим при $|\alpha| = k < N$ величину

$$\begin{aligned} (f, \psi_\alpha) - (S_N^{(0)} f, \psi_\alpha) &= (f - S_N^{(0)} f, \psi_\alpha) = \left(\sum_{|\beta| \geq N} (f, \chi_\beta) \chi_\beta, \psi_\alpha \right) \\ &= \sum_{|\beta| \geq N} (f, \chi_\beta) \left(\chi_\beta, \sum_{\nu=0}^k y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) \chi(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) \right) \\ &= \sum_{|\beta| \geq N} (f, \chi_\beta) \sum_{\nu=0}^k y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) (\chi_\beta, \chi(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)) = 0 \end{aligned}$$

– учли определение (5) биортогонально сопряженной системы $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ и соотношения ортогональности $(\chi_\beta, \chi(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)) = 0$ при $\nu \leq k < N \leq |\beta|$. Отсюда находим

$$\begin{aligned} S_N f - S_N S_N^{(0)} f &= (f, 1) 1 + \sum_{|\alpha| < N} (f, \psi_\alpha) \varphi_\alpha - (S_N^{(0)} f, 1) 1 - \sum_{|\alpha| < N} (S_N^{(0)} f, \psi_\alpha) \varphi_\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| < N} \{(f, \psi_\alpha) - (S_N^{(0)} f, \psi_\alpha)\} \varphi_\alpha = 0. \end{aligned}$$

Равенство (7) установлено. Далее, при $|\alpha| = k < N$ выполняется равенство

$$S_N \chi_\alpha = (S_{N-k} \chi)_\alpha. \quad (8)$$

В самом деле, вычислим

$$S_N \chi_\alpha = \sum_{|\beta| < N} (\chi_\alpha, \psi_\beta) \varphi_\beta.$$

Подобно утверждению леммы 1 имеем

$$(\chi_\alpha, \psi_\beta) = \begin{cases} (\chi, \psi_\gamma), & \text{если } \beta = \alpha\gamma, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Действительно, пусть $|\beta| = l$. Тогда

$$(\chi_\alpha, \psi_\beta) = \sum_{\nu=0}^l y(\beta_{\nu+1}, \dots, \beta_l) (\chi_\alpha, \chi(\beta_1, \dots, \beta_\nu)).$$

В силу ортогональности системы Хаара последнее выражение отлично от нуля в том и только том случае, когда $k \leq l$ и $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k$. Ясно, что при этом $\beta = \alpha\gamma$ для единственного набора $\gamma = (\beta_{k+1}, \dots, \beta_l)$ и $(\chi_\alpha, \psi_\beta) = y_\gamma$. Заметим, что для любого $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ имеем

$$(\chi, \psi_\gamma) = \sum_{\nu=0}^m y(\gamma_{\nu+1}, \dots, \gamma_m) (\chi, \chi(\gamma_1, \dots, \gamma_\nu)) = y_\gamma.$$

Таким образом, либо $\beta = \alpha\gamma$ и в этом случае $(\chi_\alpha, \psi_\beta) = y_\gamma = (\chi, \psi_\gamma)$, либо $(\chi_\alpha, \psi_\beta) = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S_N \chi_\alpha &= \sum_{|\beta| < N} (\chi_\alpha, \psi_\beta) \varphi_\beta = \sum_{|\gamma| < N-k} (\chi, \psi_\gamma) \varphi_{\alpha\gamma} \\ &= V^\alpha \sum_{|\gamma| < N-k} (\chi, \psi_\gamma) \varphi_\gamma = V^\alpha S_{N-k} \chi = (S_{N-k} \chi)_\alpha. \end{aligned}$$

Равенство (8) проверено. Перейдем непосредственно к доказательству равносходимости частных сумм $S_N f$ и $S_N^{(0)} f$. Ввиду равенств (7) и (8) будем иметь

$$\begin{aligned}
 \|S_N^{(0)} f - S_N f\|_p &= \|S_N^{(0)} f - S_N S_N^{(0)} f\|_p \\
 &= \left\| \sum_{|\alpha| < N} (f, \chi_\alpha) \chi_\alpha - S_N \sum_{|\alpha| < N} (f, \chi_\alpha) \chi_\alpha \right\|_p \\
 &= \left\| \sum_{|\alpha| < N} (f, \chi_\alpha) (\chi_\alpha - S_N \chi_\alpha) \right\|_p \\
 &= \left\| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} (f, \chi_\alpha) (\chi - S_{N-k} \chi)_\alpha \right\|_p \\
 &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \sum_{|\alpha|=k} (f, \chi_\alpha) (\chi - S_{N-k} \chi)_\alpha \right\|_p.
 \end{aligned}$$

Применяя лемму 3 с заменой φ на $\chi - S_{N-k} \chi$, получаем

$$\begin{aligned}
 \|S_N^{(0)} f - S_N f\|_p &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \sum_{|\alpha|=k} (f, \chi_\alpha) (\chi - S_{N-k} \chi)_\alpha \right\|_p \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |(f, \chi_\alpha)|^p \right)^{1/p} \|\chi - S_{N-k} \chi\|_p \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} E_{N-k} F_k(f).
 \end{aligned}$$

(а) *Необходимость.* Предположим, что $E_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Для функции $f \in \mathfrak{L}^p$ по определению пространства $\mathfrak{L}^p$ абсолютно сходящихся рядов Фурье–Хаара выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k(f) < \infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \|S_N^{(0)} f - S_N f\|_p &\leq \sum_{k=0}^{N-1} E_{N-k} F_k(f) \\
 &= \sum_{k=0}^{[N/2]-1} E_{N-k} F_k(f) + \sum_{k=[N/2]}^{N-1} E_{N-k} F_k(f) \\
 &\leq \sup_{k \geq [N/2]} E_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} F_k(f) + \sup_{k \geq 1} E_k \cdot \sum_{k=[N/2]}^{\infty} F_k(f) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$. Необходимость доказана.

Достаточность. Очевидно, что $\chi \in \mathfrak{L}^p$. Поэтому

$$E_N = \|\chi - S_N \chi\|_p = \|S_N^{(0)} \chi - S_N \chi\|_p \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

(b) Аналогично доказательству необходимости утверждения (a) находим

$$\begin{aligned} \|S_N^{(0)} f - S_N f\|_p &\leq \sum_{k=0}^{N-1} E_{N-k} F_k(f) \\ &= \sum_{k=0}^{[N/2]-1} E_{N-k} F_k(f) + \sum_{k=[N/2]}^{N-1} E_{N-k} F_k(f) \\ &\leq \sum_{k=[N/2]}^{\infty} E_k \cdot \sup_{k \geq 0} F_k(f) + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \cdot \sup_{k \geq [N/2]} F_k(f) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$, так как по условию $\sum_{N=1}^{\infty} E_N < \infty$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{|\alpha|=k} (f, \chi_\alpha) \chi_\alpha \right\|_p = 0$$

в силу необходимого условия сходимости ряда Фурье–Хаара

$$f = (f, 1)1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} (f, \chi_\alpha) \chi_\alpha$$

функции $f \in L^p$. Теорема 1 доказана.

Теперь укажем условия равносходимости частных сумм $S_N^{(0)} f$ ряда Фурье–Хаара и частных сумм $S_N f$ биортогонального ряда по системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ сжатий и сдвигов функции φ в метрике пространства $\mathfrak{L}^p$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 \leq p < \infty$ и функция $\varphi \in \mathfrak{L}^p$ удовлетворяет условиям нормировки (1).

Тогда для того, чтобы для любой функции $f \in \mathfrak{L}^p$ выполнялось предельное соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N^{(0)} f - S_N f\|_p^* = 0,$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N^* = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точно так же, как и при доказательстве теоремы 1 используя равенства (7) и (8), с заменой нормы $\|\cdot\|_p$ на $\|\cdot\|_p^*$, получаем оценку

$$\|S_N^{(0)} f - S_N f\|_p^* \leq \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \sum_{|\alpha|=k} (f, \chi_\alpha) (\chi - S_{N-k} \chi)_\alpha \right\|_p^*.$$

Далее, применяя лемму 4 с заменой φ на $\chi - S_{N-k} \chi$, находим

$$\|S_N^{(0)} f - S_N f\|_p^* \leq \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \sum_{|\alpha|=k} (f, \chi_\alpha) (\chi - S_{N-k} \chi)_\alpha \right\|_p^*.$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{N-1} 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |(f, \chi_\alpha)|^p \right)^{1/p} \|\chi - S_{N-k}\chi\|_p^* \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} E_{N-k}^* F_k(f).
\end{aligned}$$

Наконец, завершаем доказательство теоремы 2 дословным повторением доказательства части (а) теоремы 1, заменяя E_N на E_N^* и $\|\cdot\|_p$ на $\|\cdot\|_p^*$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В предположениях теоремы 1 условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы любая функция $f \in \mathfrak{L}^p$ являлась суммой сходящегося по норме пространства L^p биортогонального ряда

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \psi_n) \varphi_n.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. В предположениях теоремы 1 и при выполнении условия

$$\sum_{N=1}^{\infty} E_N < \infty$$

система $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ сжатий и сдвигов функции φ является базисом пространства L^p .

СЛЕДСТВИЕ 3. В предположениях теоремы 2 условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N^* = 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы система $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ сжатий и сдвигов функции φ являлась базисом пространства $\mathfrak{L}^p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЙ 1–3. В силу теорем о равносходимости 1 и 2 требуется доказать, что наряду с представлением

$$f = (f, \psi_0) \varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} (f, \psi_n) \varphi_n \quad (9)$$

справедливо также представление

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \psi_n) \varphi_n.$$

Пусть $2^N \leq n < 2^{N+1}$. С учетом лемм 3 и 4 будем иметь

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{k=0}^{n-1} (f, \psi_k) \varphi_k \right\| &\leq \left\| f - \sum_{k=0}^{2^N-1} (f, \psi_k) \varphi_k \right\| + \left\| \sum_{k=2^N}^{n-1} (f, \psi_k) \varphi_k \right\| \\
&= \|f - S_N f\| + 2^{N(1/2-1/p)} \left(\sum_{k=2^N}^{n-1} |(f, \psi_k)|^p \right)^{1/p} \|\varphi\| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ в силу необходимого условия сходимости ряда (9). Здесь $\|\cdot\|$ — одна из норм $\|\cdot\|_p$ или $\|\cdot\|_p^*$.

4. Базисность систем сжатий и сдвигов функции. В следствиях 1–3 условия сходимости биортогональных рядов по системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ сжатий и сдвигов функции φ сформулированы в терминах величин E_N и E_N^* . Для окончательного решения основного вопроса данной статьи укажем условия на порождающую функцию φ системы сжатий и сдвигов, обеспечивающих выполнение посылок следствий 1–3. Как уже отмечалось, такие условия будут даны в терминах принадлежности порождающей функции φ классам $\mathfrak{L}^p(\Lambda)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi \in \mathfrak{L}^p(\Lambda)$, $1 \leq p < \infty$, и выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda_k < \infty.$$

Тогда система $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ сжатий и сдвигов функции φ является базисом пространства L^p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании следствия 2 достаточно проверить условие

$$\sum_{N=1}^{\infty} E_N < \infty.$$

В начале покажем, что биортогонально сопряженная система $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ является тотальной, т.е. если функция $f \in L^p$ такая, что $(f, \psi_n) = 0$ для всех $n \geq 0$, то $f = 0$. По определению биортогонально сопряженной системы (5) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= (f, \psi_n) = (f, \psi_\alpha) = \sum_{\nu=0}^k y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k)(f, \chi(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)) \\ &= (f, \chi_\alpha) + \sum_{\nu=0}^{k-1} y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k)(f, \chi(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)). \end{aligned}$$

Равенство $(f, \chi_\alpha) = 0$ установим индукцией по $k = |\alpha|$. При $k = 0$ для пустого набора α имеем $0 = (f, \psi_\alpha) = (f, \chi_\alpha)$. Предположим, что равенство $(f, \chi_\beta) = 0$ имеет место для всех $|\beta| < k$. Тогда при $|\alpha| = k$ находим

$$(f, \chi_\alpha) = - \sum_{\nu=0}^{k-1} y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k)(f, \chi(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)) = 0.$$

Таким образом, $(f, \chi_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$. Поскольку $(f, \chi_0) = (f, \psi_0) = 0$, то $(f, \chi_n) = 0$ для всех $n \geq 0$. Отсюда $f = 0$ ввиду полноты системы Хаара.

Теперь рассмотрим биортогональное разложение по системе $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ функции Хаара χ :

$$\chi \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\chi, \psi_n) \varphi_n = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} y_\alpha \varphi_\alpha. \quad (10)$$

Во-первых, заметим, что биортогональный ряд (10) абсолютно сходится по пачкам в пространстве L^p . В самом деле, с учетом лемм 3, 5 и 6 получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{|\alpha|=k} y_\alpha \varphi_\alpha \right\|_p = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |y_\alpha|^p \right)^{1/p} \|\varphi\|_p \leq \|\varphi\|_p \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty.$$

Обозначим χ' сумму биортогонального ряда (10). Итак, $\chi' \in L^p$ и

$$\chi' = \sum_{n=0}^{\infty} (\chi, \psi_n) \varphi_n.$$

Отсюда $(\chi', \psi_n) = (\chi, \psi_n)$ для всех $n \geq 0$. В силу доказанной тотальности биортогонально сопряженной системы $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ имеем $\chi' = \chi$. Следовательно, снова с учетом лемм 3, 5 и 6 получаем

$$\begin{aligned} E_N &= \|\chi - S_N \chi\|_p = \left\| \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} y_{\alpha} \varphi_{\alpha} \right\|_p \leq \sum_{k=N}^{\infty} \left\| \sum_{|\alpha|=k} y_{\alpha} \varphi_{\alpha} \right\|_p \\ &= \sum_{k=N}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |y_{\alpha}|^p \right)^{1/p} \|\varphi\|_p \leq \|\varphi\|_p \sum_{k=N}^{\infty} \mu_k. \end{aligned}$$

Окончательно на основании второй эквивалентности леммы 6 и в силу условий теоремы будем иметь

$$\sum_{N=1}^{\infty} E_N \leq \|\varphi\|_p \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} \mu_k = \|\varphi\|_p \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{N=1}^k \mu_k = \|\varphi\|_p \sum_{k=1}^{\infty} k \mu_k < \infty.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\varphi \in \mathfrak{L}^p(\Lambda)$, $1 \leq p < \infty$, и выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1.$$

Тогда система $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ сжатий и сдвигов функции φ является базисом пространства $\mathfrak{L}^p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании следствия 3 достаточно проверить условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N^* = 0.$$

Так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, рассмотрим биортогональное разложение (10) и с учетом лемм 4, 5 и 6 установим его абсолютную сходимость по пачкам в пространстве $\mathfrak{L}^p$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{|\alpha|=k} y_{\alpha} \varphi_{\alpha} \right\|_p^* = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |y_{\alpha}|^p \right)^{1/p} \|\varphi\|_p^* \leq \|\varphi\|_p^* \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty.$$

Далее, в силу тотальности биортогонально сопряженной системы $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ и включения $\mathfrak{L}^p \subset L^p$ получаем представление

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} (\chi, \psi_n) \varphi_n = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} y_{\alpha} \varphi_{\alpha}.$$

Отсюда окончательно находим

$$\begin{aligned} E_N^* &= \|\chi - S_N \chi\|_p^* = \left\| \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} y_{\alpha} \varphi_{\alpha} \right\|_p^* \leq \sum_{k=N}^{\infty} \left\| \sum_{|\alpha|=k} y_{\alpha} \varphi_{\alpha} \right\|_p^* \\ &= \sum_{k=N}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |y_{\alpha}|^p \right)^{1/p} \|\varphi\|_p^* \leq \|\varphi\|_p^* \sum_{k=N}^{\infty} \mu_k \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

ПРИМЕР. Предположим, что существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \leq C \lambda_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Следует отметить, что условие (11) известно как *условие Бари* (см. [25; с. 22]) и при выполнении дополнительного условия $\lambda_k \downarrow 0$ равносильно тому, что последовательность Λ является объединением конечного набора последовательностей, убывающих не медленнее, чем геометрическая прогрессия. Например, условию Бари (11) удовлетворяет последовательность $\lambda_k = M 2^{-\alpha k}$, $k = 1, 2, \dots$, где $M > 0$ и $\alpha > 0$.

Зададим функцию $\varphi \in \mathfrak{L}^p(\Lambda)$ посредством равенства

$$\varphi = \chi - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k 2^{-k/2} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \chi_n.$$

Заметим, что $r_k = 2^{-k/2} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \chi_n$ — функции системы Радемахера [26].

Покажем, что система $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ сжатий и сдвигов функции φ является базисом пространства L^p (или пространства $\mathfrak{L}^p$) в том и только том случае, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1.$$

Достаточность сразу следует из теорем 3 и 4 с учетом условия (11), обеспечивающего сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \lambda_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k \lambda_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty.$$

Необходимость. Пусть система $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ сжатий и сдвигов функции φ является базисом пространства L^p или $\mathfrak{L}^p$. Разложение функции Хаара χ по базису $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ имеет вид

$$\chi = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k 2^{-k/2} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \varphi_n. \quad (12)$$

Учитывая леммы 3 и 4, получим

$$\left\| 2^{-k/2} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \varphi_n \right\| = \left\| 2^{-k/2} \sum_{|\alpha|=k} \varphi_{\alpha} \right\| = \|\varphi\|,$$

где $\|\cdot\|$ – одна из норм $\|\cdot\|_p$ или $\|\cdot\|_p^*$. Отсюда и в силу необходимого условия сходимости ряда (12) находим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0. \quad (13)$$

Теперь предположим противное, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \geq 1$. Индукцией по n установим неравенство

$$\mu_n \geq \frac{1}{C}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (14)$$

При $n = 1$, используя (11), находим $\mu_1 = \lambda_1 \geq 1/C \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \geq 1/C$. Пусть неравенство (14) имеет место для всех $k < n$. Тогда

$$\mu_n = \lambda_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n-k} \mu_k \geq \frac{1}{C} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k + \frac{1}{C} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n-k} = \frac{1}{C} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \geq \frac{1}{C}.$$

Неравенство (14) установлено, что противоречит предельному соотношению (13). Следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1$.

Разобранный пример показывает неусиливаемость условий теорем 3 и 4 в предположении, что последовательность Λ удовлетворяет условию Бари.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\lambda_k = M2^{-\alpha k}$, $k = 1, 2, \dots$, где $M > 0$ и $\alpha > 0$.

Тогда условие $M < 2^\alpha - 1$ необходимо и достаточно для того, чтобы для любой функции $\varphi \in \mathfrak{L}^p(\Lambda)$ система $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ ее сжатий и сдвигов была базисом пространства L^p (или пространства $\mathfrak{L}^p$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теорем 3 и 4 и примера.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, и

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

– модуль непрерывности функции f в метрике пространства L^p . Тогда всякая функция f , удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_p(1/n, f)}{n} < \infty,$$

принадлежит пространству $\mathfrak{L}^p$. Это следует из оценки Ульянова [27]

$$2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(\varphi, \chi_n)|^p \right)^{1/p} \leq C \omega_p(2^{-k}, f), \quad k = 0, 1, \dots,$$

(см. также [28]). Таким образом, если f – достаточно гладкая функция, то $f \in \mathfrak{L}^p$. С другой стороны, принадлежность функции f классу $\mathfrak{L}^p(\Lambda)$ не обеспечивает даже непрерывность этой функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Соотношение леммы 3 для системы функций Хаара хорошо известно (см. [29; с. 210]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Вопросы представления функций рядами по системе сжатий и сдвигов изучались в статье Филиппова, Освальда [30]. В частности, в [30] показано, что при выполнении условия $\int_0^1 \varphi(t) dt \neq 0$ система сжатий и сдвигов функции φ переполнена и поэтому базисом быть не может.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Леммы 2 и 5, а также следствие 2 содержатся в работе автора [21]. Их доказательства приведены здесь для полноты изложения и для сравнения результатов о базисности системы сжатий и сдвигов функции в пространствах L^p и $\mathcal{L}^p$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Haar, “Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme”, *Math. Ann.*, **69**:3 (1910), 331–371.
- [2] J. Schauder, “Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems”, *Math. Z.*, **28**:1 (1928), 317–320.
- [3] J. Schauder, “Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen”, *Math. Z.*, **26**:1 (1927), 47–65.
- [4] G. Faber, “Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar”, *Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.*, **19** (1910), 104–112.
- [5] З. А. Чантурия, “О базисах пространства непрерывных функций”, *Матем. сб.*, **88**:4 (1972), 589–608.
- [6] Т. Н. Сабурова, “О базисах в $C[0, 1]$ типа Фабера–Шаудера”, *Теория функций и приближений*, ч. 3 (Саратов, 1986), Тр. 3-й Саратовской зимней школы, Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, 1988, 44–46.
- [7] И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, НИЦ РХД, Ижевск, 2001.
- [8] Y. Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge Stud. Adv. Math., **37**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [9] A. Cohen, I. Daubechies, P. Vial, “Wavelets on the interval and fast wavelets transform”, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **1**:1 (1993), 54–81.
- [10] A. Cohen, I. Daubechies, B. Jawerth, P. Vial, “Multiresolution analysis, wavelets and fast algorithms on an interval”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **316**:5 (1993), 417–421.
- [11] L. Andersson, N. Hall, B. Jawerth, G. Peters, “Wavelets on closed subset of the real line”, *Recent Advances in Wavelet Analysis*, Wavelet Anal. Appl., **3**, Academic Press, Boston, MA, 1994, 1–61.
- [12] C. K. Chui, J.-Z. Wang, “A general framework of compact supported splines and wavelets”, *J. Approx. Theory*, **71**:3 (1992), 263–304.
- [13] А. П. Петухов, “Периодические всплески”, *Матем. сб.*, **188**:10 (1997), 69–94.
- [14] М. Skopina, “Multiresolution analysis of periodic functions”, *East J. Approx.*, **3**:2 (1997), 203–224.
- [15] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.
- [16] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.
- [17] П. А. Терехин, “О представляющих свойствах системы сжатий и сдвигов функций на отрезке”, *Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. матем., мех., информ.*, **4**:1 (1998), 136–138.
- [18] П. А. Терехин, “Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов”, *Изв. вузов. Матем.*, **43**:8 (1999), 74–81.
- [19] П. А. Терехин, “Базисы Рисса, порожденные сжатиями и сдвигами функции на отрезке”, *Матем. заметки*, **72**:4 (2002), 547–560.
- [20] П. А. Терехин, “К вопросу о возмущениях системы Хаара”, *Матем. заметки*, **75**:3 (2004), 466–469.

- [21] П. А. Терехин, “Условия базисности систем сжатий и сдвигов функций в пространстве $L_p[0, 1]$ ”, *Изв. Саратовского ун-та. Сер. матем., мех., информ.*, **7**:1 (2007), 39–44.
- [22] П. А. Терехин, “Мультидвиг в гильбертовом пространстве”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:1 (2005), 69–81.
- [23] N. Wiener, “Tauberian theorem”, *Ann. of Math. (2)*, **33**:1 (1932), 1–100.
- [24] К. Гофман, *Банаховы пространства аналитических функций*, ИЛ, М., 1963.
- [25] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [26] H. Rademacher, “Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen”, *Math. Ann.*, **87**:1–2 (1922), 112–138.
- [27] П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **63**:3 (1964), 356–391.
- [28] Б. И. Голубов, “Ряды по системе Хаара”, *Итоги науки и техники. Матем. анализ*, ВИНТИ, М., 1971, 109–146.
- [29] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения*, Наука, М., 1987.
- [30] V. I. Filippov, P. Oswald, “Representation in L^p by series of translates and dilates of one function”, *J. Approx. Theory*, **82**:1 (1995), 15–29.

П. А. Терехин

Саратовский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: terekhinpa@info.sgu.ru

Поступило

19.04.2007

Исправленный вариант

11.11.2007