Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Серовайский, Оптимальное управление нелинейной эволюционной системой в отсутствие дифференцируемости решения по управлению, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 4, 586–603

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4048>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:24:04

Оптимальное управление нелинейной эволюционной системой в отсутствие дифференцируемости решения по управлению

С. Я. Серовайский

Для простейшего уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью зависимость решения соответствующей краевой задачи от свободного члена уравнения оказывается, вообще говоря, не дифференцируемой в смысле Гато.

Библиография: 35 названий.

Задачам оптимального управления для абстрактных эволюционных уравнений с монотонными операторами посвящено значительное количество работ (см., например, [1]–[8]). Наличие достаточно хорошо разработанной теории монотонных операторов (см., например, [9]) и общих теорем о разрешимости экстремальных задач (см., например, [10], [11]) позволяет сравнительно легко решить проблему существования оптимального управления в указанных задачах (см. [1], [2], [5], [7], [8]).

Методы обоснования необходимых условий оптимальности для подобных задач условно можно разбить на два класса. В первом из них уравнение состояния понимается как средство для неявного задания зависимости функции состояния системы от управления, т.е. состояние системы вторично по отношению к управлению. Далее применяются известные методы минимизации функционалов на заданном множестве допустимых управлений (см., например, [11]), причем ключевым элементом является обоснование дифференцируемости функции состояния системы по управлению. Последнее свойство фактически опирается на известные теоремы о дифференцировании обратного или неявного оператора в бесконечномерных пространствах (см., например, [12]), включающее в себя требование обратимости производной оператора, задающего уравнение состояния.

Во втором классе методов управление и состояние системы, если можно так выразиться, “уравниваются в правах”, а уравнение состояния интерпретируется как ограничение, налагаемое на систему. В результате получается задача минимизации заданного функционала на множестве допустимых пар “управление-состояние”, которая решается на основе результатов общей теории экстремума, например, принципа Лагранжа (см., например, [13], [14]) или метода штрафа (см., например, [15]–[17]). При этом использование общих схем типа принципа Лагранжа также включает в себя ограничения на производную оператора состояния (см., например, [14];

с. 83, теорема 1.6]), а ключевым элементом обоснования метода штрафа является однозначная разрешимость в соответствующем смысле сопряженной системы, определяемой оператором, сопряженным к производной оператора состояния (см., например, [15; с. 54]).

Отметим, что первый подход является заведомо не применимым, когда отсутствует однозначная разрешимость уравнения состояния на множестве допустимых управлений, поскольку нет возможности гарантировать определенность критерия оптимальности в процессе вычисления его производной. Его применение затруднительно также при наличии фазовых ограничений на систему, поскольку не ясно, как следует варьировать управление, чтобы обеспечить выполнение этих ограничений. В рамках второго подхода эти трудности, в принципе, преодолимы, так как управление и состояние системы равноправны. Однако в условиях однозначной разрешимости уравнений состояния и в отсутствии фазовых ограничений указанные преимущества второго подхода фактически сходят на нет, а условия его применимости сводятся к обоснованию соответствующих свойств производной оператора состояния, присутствующих и при получении условий оптимальности в рамках первого подхода. При этом первый подход, непосредственно использующий структуру рассматриваемого уравнения, может оказаться более предпочтительным.

В настоящей работе показывается, что даже для простейшего уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью зависимость решения соответствующей краевой задачи от свободного члена уравнения оказывается, вообще говоря, не дифференцируемой в смысле Гато. Этот результат опирается на то обстоятельство, что производная оператора состояния не является сюръекцией. Вследствие этого оказываются не применимыми не только методы первого подхода, использующие явным образом дифференцируемость функции состояния по управлению, но и методы второго подхода, связанные с принципом Лагранжа или методом штрафа. В этой ситуации мы не имеем возможности использовать известные результаты по оптимальному управлению системами, описываемыми нелинейными уравнениями параболического типа (см., например, [14]–[23]). Желаемый результат получается за счет использования понятия расширенной производной оператора [24], [25].

1. Задача оптимального управления в регулярном случае. Рассматриваются гильбертово пространство H , сепарабельное гильбертово пространство W_1 и рефлексивное банахово пространство W_2 в условиях непрерывного и плотного вложения пространств W_i в H , $i = 1, 2$. Пространство H отождествляется со своим сопряженным пространством H' . Тогда имеют место непрерывные и плотные вложения $W_i \subset H \subset W'_i$. Задаются линейный непрерывный оператор $A_1: W_1 \rightarrow W'_1$ и нелинейный дифференцируемый по Фреше оператор $A_2: W_2 \rightarrow W'_2$, удовлетворяющие условиям коэрцитивности, монотонности и ограничению на скорость роста:

$$\langle A_i \varphi, \varphi \rangle \geq \chi_i \|\varphi\|_{W_i}^2 \quad \forall \varphi \in W_i, \quad i = 1, 2,$$

$$\langle A_2 \varphi - A_2 \psi, \varphi - \psi \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi, \psi \in W_2, \quad \|A_2 \varphi\|_{W'_2} \leq c \|\varphi\|_{W_2}^{q-1} \quad \forall \varphi \in W_2,$$

где через $\langle \lambda, \varphi \rangle$ обозначается значение линейного непрерывного функционала λ в точке φ , $\chi_1 > 0$, $\chi_2 > 0$, $c > 0$, $q > 1$.

Определим пространство

$$X = L_2(0, T; W_1) \cap L_q(0, T; W_2).$$

Согласно теореме 5.13 (см. [9; с. 25]) сопряженным к нему будет пространство

$$X' = L_2(0, T; W_1') + L_{q'}(0, T; W_2'),$$

где $1/q + 1/q' = 1$. Зададим гильбертово пространство V и линейный непрерывный оператор $B: V \rightarrow X'$. Рассматривается уравнение

$$y' + A_1 y + A_2 y = Bv + f \quad (1)$$

с начальным условием

$$y(0) = \varphi. \quad (2)$$

Здесь точка φ и абстрактная функция f известны, v – управление, y – состояние системы, y' – производная абстрактной функции $y = y(t)$, $y(0)$ – значение y при $t = 0$.

Пользуясь теорией эволюционных уравнений с монотонными операторами (см., например, [9; с. 239]), установим, что для любых значений $\varphi \in H$, $f \in X'$ задача (1), (2) имеет единственное решение $y = y(v)$ из пространства $Y = \{y \mid y \in X, y' \in X'\}$, причем отображение $y(\cdot): V \rightarrow Y$ слабо непрерывно. Задаются непустое выпуклое замкнутое подмножество U из V и функционал

$$I(v) = \frac{\alpha}{2} \|v\|_V^2 + \frac{1}{2} \|C[y(v) - y_d]\|_Z^2,$$

где $\alpha > 0$, Z – гильбертово пространство, $C: L_2(0, T; W_1) \rightarrow Z$ – линейный непрерывный оператор, $y_d \in L_2(0, T; W_1)$ – известная величина. Ставится следующая задача оптимального управления.

Задача 1. Найти управление $u \in U$, минимизирующее на множестве U функционал I .

ТЕОРЕМА 1. *Задача 1 разрешима.*

Действительно, функционал I является ограниченным снизу, коэрцитивным и слабо полунепрерывным снизу. Тогда разрешимость задачи следует, например, из теоремы 1.2 (см., [10; с. 72]).

Как известно (см., например, [11; с. 18, теорема 1.3]), необходимым условием минимума дифференцируемого по Гато функционала I в точке u на выпуклом подмножестве U банахова пространства является вариационное неравенство

$$\langle I'(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in U, \quad (3)$$

где $I'(u)$ есть соответствующая производная Гато. Предположим теперь, что минимизируемый функционал характеризуется равенством

$$I(v) = J(v) + K[y(v)],$$

где $y(v)$ есть состояние системы на управлении v , являющееся элементом банахова пространства Y , функционал $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируем по Гато в точке u , а функционал $K: Y \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируем по Фреше в точке $y = y(u)$. Если отображение $y(\cdot): V \rightarrow Y$ в точке u имеет производную Гато D , то по теореме о дифференцировании сложной функции (см. [12; с. 637]) функционал I дифференцируем по Гато

в точке u , причем $I'(u) = J'(u) + K'(y)D$. В дальнейшем мы будем различать регулярный случай, соответствующий дифференцируемости решения задачи (1), (2) по управлению в указанном смысле, и общий случай, когда допускается нарушение этого требования.

Предположим, что оператор A_2 является сильно монотонным в том смысле, что справедливо неравенство

$$\langle A_2\varphi - A_2\psi, \varphi - \psi \rangle \geq \|\varphi - \psi\|_{W_2}^2 \quad \forall \varphi, \psi \in W_2.$$

Ниже будут использоваться канонические изоморфизмы $\Lambda_V: V \rightarrow V'$ и $\Lambda_Z: Z \rightarrow Z'$, существующие в силу теоремы Рисса. Справедливо следующее утверждение

ТЕОРЕМА 2. *Если оператор A_2 является сильно монотонным, а отображение $y(\cdot): V \rightarrow Y$ дифференцируемо по Гато в точке u , то для того чтобы эта точка была решением задачи 1, необходимо, чтобы выполнялось вариационное неравенство*

$$\langle \alpha \Lambda_V u - B^*p, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in U, \quad (4)$$

где p есть решение задачи

$$-p' + A_1^*p + [A_2'(y)]^*p = C^*\Lambda_Z C(y - y_d), \quad (5)$$

$$p(T) = 0, \quad (6)$$

причем $y = y(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для задачи 1 справедливы равенства

$$J(v) = \frac{\alpha}{2} \|v\|_V^2; \quad K(y) = \frac{1}{2} \|C(y - y_d)\|_Z^2.$$

Функционалы J и K дифференцируемы по Фреше, причем выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \langle J'(u), h \rangle &= (\alpha u, h)_V & \forall h \in V, \\ \langle K'(y), z \rangle &= (C(y - y_d), Cz)_Z & \forall z \in Z, \end{aligned}$$

в правые части которых входят скалярные произведения соответствующих пространств. Тогда находим производные

$$J'(u) = \alpha \Lambda_V u, \quad K'(y) = C^* \Lambda_Z C(y - y_d).$$

Учитывая определение сопряженного оператора $C^*: Z' \rightarrow L_2(0, T; W_1')$, установим, что производная функционала I в точке u будет удовлетворять соотношению

$$\langle I'(u), h \rangle = \langle \alpha \Lambda_V u, h \rangle + \int_0^T \langle [C^* \Lambda_Z C(y - y_d)](t), Dh(t) \rangle dt \quad \forall h \in V,$$

где через $\mu(t)$ обозначено значения абстрактной функции μ в точке t . Тогда вариационное неравенство (3) принимает следующий вид:

$$\langle \alpha \Lambda_V u, v - u \rangle + \int_0^T \langle [C^* \Lambda_Z C(y - y_d)](t), [D(v - u)](t) \rangle dt \geq 0 \quad \forall v \in U. \quad (7)$$

Покажем, что соотношение (7) сводится к (4). Из равенства (1) для любых значений $h \in V$ и любых чисел σ получаем

$$[y(u + \sigma h) - y(u)]' + A_1[y(u + \sigma h) - y(u)] + [A_2 y(u + \sigma h) - A_2 y(u)] = \sigma B h. \quad (8)$$

Разделив это равенство на σ и переходя к пределу при $\sigma \rightarrow 0$ с учетом дифференцируемости отображения $y(\cdot): V \rightarrow Y$, имеем

$$(Dh)' + A_1 Dh + A_2'(y) Dh = B h.$$

Отсюда следует соотношение

$$\int_0^T \langle (Dh)'(t) + (A_1 Dh)(t) + [A_2'(y) Dh](t), \lambda(t) \rangle dt = \int_0^T \langle B h(t), \lambda(t) \rangle dt \quad \forall \lambda \in Y.$$

Пользуясь формулой интегрирования по частям для абстрактных функций (см. [9; теорема 1.17, с. 177]), приходим к равенству

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle -\lambda'(t) + A_1^* \lambda(t) + [A_2'(y)]^* \lambda(t), Dh(t) \rangle dt + (\lambda(T), Dh(T))_H \\ = \langle B^* \lambda, h \rangle \quad \forall \lambda \in Y. \end{aligned} \quad (9)$$

Проведем анализ задачи (5), (6). Из равенства (5) формально следует соотношение

$$\int_0^T \langle -p'(t) + A_1^* p(t) + [A_2'(y)]^* p(t), p(t) \rangle dt = \int_0^T \langle \eta(t), p(t) \rangle dt,$$

где $\eta = C^* \Lambda_Z C(y - y_d)$ является элементом пространства $L_2(0, T; W_1')$. Из сильной монотонности и дифференцируемости оператора A_2 следует неравенство

$$\langle A_2'(y) \varphi, \varphi \rangle \geq \|\varphi\|_{W_2}^q \quad \forall \varphi \in W_2.$$

В результате из предшествующего равенства выводится соотношение

$$\begin{aligned} \chi_1 \int_0^T \|p(t)\|_{W_1}^2 dt + \int_0^T \|p(t)\|_{W_2}^q dt \\ \leq \int_0^T \|p(t)\|_{W_1} \|\eta(t)\|_{W_1'} dt + \frac{\chi_1}{2} \int_0^T \|p(t)\|_{W_1}^2 dt + \frac{2}{2\chi_1} \int_0^T \|\eta(t)\|_{W_1'}^2 dt. \end{aligned}$$

Таким образом, задача (5), (6) допускает априорную оценку решения в пространстве X . Пользуясь теорией линейных эволюционных уравнений первого порядка (см., например, [11; с. 110, теорема 1.2]), установим, что она имеет единственное решение в этом классе. Выражая производную p' из равенства (5), установим включение $p' \in X'$, а значит, $p \in Y$.

Полагая в равенстве (9) $\lambda = p$, получаем

$$\int_0^T \langle [C^* \Lambda_Z C(y - y_d)](t), Dh(t) \rangle dt = \langle B^* p, h \rangle.$$

Тогда условие (7) принимает вид вариационного неравенства (4). Теорема доказана.

Теорема 2 дает необходимое условие экстремума для задачи 1 в регулярном случае. Ее доказательство, по существу, представляет собой техническую процедуру, сводящуюся к вычислению производной минимизируемого функционала стандартными средствами. Фактически она аналогична известным результатам в области оптимального управления для абстрактных эволюционных систем (см., например, [3]–[6]). Попытаемся выяснить, насколько широка область применимости подобных результатов.

2. Дифференцирование решения краевой задачи по свободному члену.

В качестве приложения выбираем краевую задачу для уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью. Пусть задана открытая ограниченная область Ω пространства $\mathbb{R}^n$ с границей Γ , $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Состояние системы $y = y(x, t)$ описывается нелинейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + |y|^\rho y = f, \quad (x, t) \in Q \quad (10)$$

с краевыми условиями

$$y = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \quad y(x, 0) = \varphi, \quad x \in \Omega, \quad (11)$$

где $\rho > 0$.

Для приведения этой краевой задачи к описанному виду определим пространства

$$H = L_2(\Omega), \quad W_1 = H_0^1(\Omega), \quad W_2 = L_q(\Omega),$$

где $q = \rho + 2$. Соответствующие сопряженные пространства имеют вид

$$W_1' = H^{-1}(\Omega), \quad W_2' = L_{q'}(\Omega),$$

где $1/q + 1/q' = 1$. В результате получаем пространство

$$X = L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L_q(Q)$$

и сопряженное к нему (в силу теоремы 5.3 [9; с. 25]) пространство

$$X' = L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) + L_{q'}(Q).$$

Определив операторы $A_1: W_1 \rightarrow W_1'$ и $A_2: W_2 \rightarrow W_2'$ с помощью равенств $A_1\varphi = -\Delta\varphi$ и $A_2\varphi = |\varphi|^\rho\varphi$, установим справедливость условий коэрцитивности, монотонности и выполнению ограничения на степень роста. Тогда при $\varphi \in L_2(\Omega)$ для любого $f \in X'$ задача (10), (11) имеет единственное решение $y = y(f)$ из пространства Y .

ТЕОРЕМА 3. При достаточно больших значениях параметров ρ и n отображение $y(\cdot): X' \rightarrow Y$ для задачи (10), (11) не дифференцируемо по Гато.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, напротив, что указанное отображение дифференцируемо по Гато в произвольной точке f_0 . Тогда существует такой линейный непрерывный оператор $D: X' \rightarrow Y$, что для любого $h \in X'$ при $\sigma \rightarrow 0$ имеет место сходимость

$$\frac{y_\sigma - y_0}{\sigma} \rightarrow Dh \quad \text{в } Y,$$

где $y_\sigma = y(f_0 + \sigma h)$, $y_0 = y(f_0)$. Из соотношения (10) следует равенство

$$\frac{\partial(y_\sigma - y_0)}{\partial t} - \Delta(y_\sigma - y_0) + |y_\sigma|^\rho y_\sigma - |y_0|^\rho y_0 = \sigma h. \quad (12)$$

Разделив полученное выражение на σ и переходя к пределу при $\sigma \rightarrow 0$, имеем

$$\frac{\partial Dh}{\partial t} - \Delta Dh + (\rho + 1)|y_0|^\rho Dh = h.$$

Таким образом, для всех $h \in X$ уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + (\rho + 1)|y_0|^\rho z = h \quad (13)$$

с однородными краевыми условиями имеет решение $z = Dh$, принадлежащее пространству Y . Очевидно, это решение единственно.

Рассмотрим произвольную дважды непрерывно дифференцируемую функцию y_0 , обращающуюся в нуль на поверхности Σ . Ее значение в начальный момент времени обозначим через φ , а правую часть равенства (10) при $y = y_0$ через f_0 . Тем самым получим гладкое решение y_0 задачи (10), (11) при выбранных функциях $\varphi \in L_2(\Omega)$ и $f_0 \in X$. Подберем значения параметров ρ и n столь большими, чтобы не выполнялось вложение $W_{q'}^{2,1}(Q) \subset L_q(Q)$, где под $W_{q'}^{2,1}(Q)$ понимается множество функций, принадлежащих пространству вместе со своими обобщенными производными до второго порядка по пространственным переменным и первого порядка по времени. Тогда существует точка $z_0 \in W_{q'}^{2,1}(Q) \setminus L_q(Q)$, удовлетворяющая краевым условиям (11). Определив функцию

$$h_0 = \frac{\partial z_0}{\partial t} - \Delta z_0 + (\rho + 1)|y_0|^\rho z_0,$$

установим включение $h_0 \in L_{q'}(Q)$, а значит, $h_0 \in X'$. Таким образом, нашлось такое значение $h = h_0$ из X' , что соответствующее ему решение z_0 задачи (10), (11) не разрешимо в пространстве $L_q(Q)$. Однако это противоречит установленному ранее результату. Тем самым, предположение о дифференцируемости по Гато зависимости решения краевой задачи (10), (11) от свободного члена не реализуется. Теорема доказана.

Итак, даже для уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью, являющегося едва ли не наиболее естественным примером эволюционного уравнения с монотонным оператором, при достаточно больших значениях размерности n заданной области и показателя ρ роста нелинейности дифференцируемость решения краевой задачи по свободному члену уравнения не реализуется. Этот результат является следствием того, что производная оператора состояния, т.е. оператор краевой задачи для уравнения (13) не является сюръекцией. Это обстоятельство препятствует использованию теоремы 2 и других аналогичных результатов, основанных на явном вычислении производной минимизируемого функционала.

В принципе, дифференцируемость решения уравнения по свободному члену может быть установлена с помощью теоремы об обратной функции. Пусть задано непрерывно дифференцируемое отображение A банаховых пространств Y и F , точки $y_0 \in Y$ и $f_0 = Ay_0$, причем производная $A'(y_0)$ обратима. Тогда в окрестности f_0

определен обратный оператор A^{-1} (т.е. решение $y = y(f)$ уравнения $Ay = f$), непрерывно дифференцируемый в точке y_0 (см. [26; с. 40]). В основе теоремы об обратной функции лежит свойство обратимости производной, эквивалентное утверждению о том, что линеаризованное уравнение $A'(y_0)z = h$ для любого $h \in F$ имеет единственное решение $z \in Y$. Для рассматриваемого примера линеаризованное уравнение представляет собой уравнение (13) с однородными краевыми условиями. Однако в процессе доказательства теоремы 3 было установлено, что соответствующей ей оператор не является даже сюръекцией, вследствие чего мы не имеем возможности воспользоваться этим результатом.

Что же произойдет, если попытаться получить условия оптимальности на основе принципа Лагранжа. Такой результат для системы, описываемой нелинейным уравнением параболического типа, получает Фурсиков (см. [14; с. 139, теорема 8.2]). При этом он опирается на соответствующую теорему Иоффе и Тихомирова [13], которая включает в себя требование того, что образ производной оператора состояния замкнут и имеет конечную коразмерность в пространстве значений оператора состояния (см. [14; с. 83, теорема 1.6]). Применительно к рассматриваемому случаю, как отмечает Фурсиков (см. [14; с. 138]), это требование сводится к доказательству того, что производная оператора состояния является сюръекцией, что в нашем случае не реализуется. Для получения желаемого результата Фурсиков накладывает ограничения на скорость роста нелинейности (см., в частности, неравенства (8.18) и (8.30), используемые в [14; с. 139, теорема 8.2]). Однако это фактически выводит нас на регулярный случай, когда применима теорема 2, а функция состояния системы оказывается дифференцируемой по управлению. Аналогичные ограничения на скорость роста нелинейности присутствуют и в результатах по оптимальному управлению нелинейными параболическими системами, опирающихся на метод штрафа (см., например, [13; с. 55]; [17; с. 184]). Таким образом, для решения поставленной задачи мы не можем в общем случае воспользоваться известными результатами [3]–[6], [14]–[22]. В этой связи представляется актуальной разработка методов получения условий оптимальности при возможном отсутствии дифференцируемости состояния системы по управлению и сюръективности производной оператора состояния.

Для получения желаемых результатов вернемся к рассмотрению линеаризованного уравнения (13). Умножая это равенство на z и интегрируя результат по области Q , получаем неравенство

$$\int_Q \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial z}{\partial x_i} \right|^2 dQ + (\rho + 1) \int_Q |y_0|^\rho z^2 dQ \leq \int_Q h z dQ. \quad (14)$$

Аналогичная процедура для уравнения (10) позволяет установить априорную оценку решения в пространстве X , что предопределило однозначную разрешимость краевой задачи (10), (11) в пространстве Y . В данном же случае первое слагаемое в левой части неравенства (14) дает квадрат нормы в пространстве $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Однако уравнение (13) не допускает априорной оценки в пространстве $L_q(Q)$. В принципе, из условия (14) следует априорная оценка решения в классе X_0 , являющемся пересечением $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ и пространства Z функций z , удовлетворяющих включению $|y_0|^{\rho/2} z \in L_2(Q)$. Последнее является гильбертовым пространством со скалярным

произведением (см. [27; с. 180])

$$(y, z) = \int_Q |y_0|^\rho y z \, dQ.$$

Сопряженным к нему будет пространство функций

$$Z' = \{y \mid y = |y_0|^{\rho/2} \lambda, \lambda \in L_2(Q)\}.$$

Тогда с помощью теоремы 5.13 (см. [9; с. 25]) можно определить сопряженное пространство

$$X'_0 = L_2(0, T; H_0^{-1}(\Omega)) + Z'.$$

Пользуясь полученной априорной оценкой, несложно показать (см., например [11; с. 110, теорема 1.2]), что для любого $h \in X'_0$ краевая задача для уравнения (13) однозначно разрешима в пространстве $Y_0 = \{y \mid y \in X_0, y' \in X'_0\}$. Однако для обратимости оператора $A'(y_0)$ требуется, чтобы для более широкого множества свободных членов линеаризованное уравнение имело решение в более сильном смысле. Тем самым отсутствие дифференцируемости решения краевой задачи (10), (11) по свободному члену согласуется с принципиальной невозможностью применения теоремы об обратной функции.

Отметим, однако, что линеаризованное уравнение в данном случае обладает указанными выше положительными свойствами, что можно трактовать как ослабленную форму условий теоремы об обратной функции. В этой связи можно предположить, что соответствующий обратный оператор будет обладать некоторыми свойствами, которые можно интерпретировать как ослабленную форму дифференцируемости. Это приводит к понятию расширенной производной оператора (см. [24], [25]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор $L: F \rightarrow Y$ называется *расширенно дифференцируемым* (точнее, (F_*, Y_*, F_0, Y_0) -*расширенно дифференцируемым*) в точке $f_0 \in F$, если существуют такие банаховы пространства F_*, Y_*, F_0, Y_0 , удовлетворяющие непрерывным вложениям $F_* \subset F_0 \subset F$, $Y \subset Y_0 \subset Y_*$, и такой линейный непрерывный оператор $D: F_0 \rightarrow Y_0$ – *расширенная производная* оператора в данной точке, что при $\sigma \rightarrow 0$ для любого $h \in F_*$ имеет место сходимость

$$\frac{[L(f_0 + \sigma h) - Lf_0]}{\sigma} \quad \text{в } Y_*.$$

В отличие от производной Гато расширенная производная определена на более узком множестве и принимает значения из более широкого множества, а соответствующая сходимость реализуется в более слабой топологии и для более узкого класса направлений. Отметим, что пространства, входящие в ее определение, могут зависеть от точки, в которой вычисляется производная. Естественно, при $F_* = F$, $Y_* = Y$ расширенная производная совпадает с производной Гато.

ТЕОРЕМА 4. *Отображение $y(\cdot): X' \rightarrow Y$ для задачи (10), (11) (Y'_*, Y_*, X'_0, Y_0) -расширенно дифференцируемо в произвольной точке $f_0 \in X'$, где $Y_* = L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$, а пространства X_0 и Y_0 определены выше, причем соответствующая расширенная производная характеризуется соотношением*

$$\langle \mu, Dh \rangle = \int_Q h p_\mu \, dQ \quad \forall \mu, h \in X'_0, \quad (15)$$

где p_μ есть решение краевой задачи

$$-\frac{\partial p_\mu}{\partial t} - \Delta p_\mu + (\rho + 1)|y_0|^\rho p_\mu = \mu, \quad (x, t) \in Q, \quad (16)$$

$$p_\mu = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \quad p_\mu(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая равенство (16) на функцию p_μ и интегрируя результат формально по области Q , установим соотношение

$$\int_Q \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial p_\mu}{\partial x_i} \right|^2 dQ + (\rho + 1) \int_Q (|y_0|^{\rho/2} p_\mu)^2 dQ \leq \int_Q \mu p_\mu dQ,$$

аналогичное (14). Отсюда следует априорная оценка решения задачи (16), (17) в пространстве X_0 для любого $\mu \in X'_0$. Тогда эта краевая задача однозначно разрешима в пространстве X_0 для всех $\mu \in X'_0$. Выражая из равенства (16) производную от p_μ , установим включение $p'_\mu \in X'_0$. Тем самым, для любого $\mu \in X'_0$ эта задача имеет единственное решение $\mu \in Y'_0$. Отсюда следует, что соотношение (15) действительно определяет некоторый линейный непрерывный оператор $D: X'_0 \rightarrow Y_0$. Умножаем равенство (12) при $h \in Y'_*$ на произвольную достаточно гладкую функцию λ , обращающуюся в нуль на поверхности Σ и при $t = T$. Получаем

$$\int_Q \left[-\frac{\partial \lambda}{\partial t} - \Delta \lambda + g(\sigma)^2 \lambda \right] (y_\sigma - y_0) dQ = \sigma \int_Q h \lambda dQ, \quad (18)$$

где $g(\sigma)^2 = (\rho + 1)|y_0 + \varepsilon(y_\sigma - y_0)|^\rho$, $\varepsilon \in [0, 1]$. Рассмотрим краевую задачу

$$-\frac{\partial p_\mu(\sigma)}{\partial t} - \Delta p_\mu(\sigma) + g(\sigma)^2 p_\mu(\sigma) = \mu, \quad (x, t) \in Q, \quad (19)$$

$$p_\mu(\sigma) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \quad p_\mu(\sigma)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (20)$$

Умножая равенство (19) на функцию $p_\mu(\sigma)$ и интегрируя результат формально по области Q , установим равенство

$$\int_Q \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial p_\mu(\sigma)}{\partial x_i} \right|^2 dQ + \int_Q [g(\sigma) p_\mu(\sigma)]^2 dQ \leq \int_Q \mu p_\mu(\sigma) dQ. \quad (21)$$

Определим гильбертово пространство

$$X_\sigma = \{z \in Y_* \mid g(\sigma)z \in L_2(Q)\}$$

с нормой, характеризуемой равенством

$$\|z\|_{X_\sigma}^2 = \|z\|_{Y_*}^2 + \|g(\sigma)z\|_{L_2(Q)}^2.$$

При $\sigma = 0$ мы получаем определенное ранее пространство X_0 . Из неравенства (21) следует, что задача (19), (20) допускает априорную оценку решения в пространстве X_σ для всех $\mu \in X'_\sigma$. Указанное сопряженное пространство определяется аналогично X'_0 (см. [27; с. 180] и [9; с. 25]) по формуле

$$X'_\sigma = L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) + \{y \mid y = g(\sigma)\lambda, \lambda \in L_2(Q)\}.$$

Тогда при $\mu \in X'_\sigma$ эта задача однозначно разрешима в пространстве X_σ . Из равенства (19) следует, что производная по времени от $p_\mu(\sigma)$ принадлежит пространству X'_σ . Следовательно, для любого $\mu \in X'_\sigma$ задача (19), (20) однозначно разрешима в пространстве $Y_\sigma = \{y \mid y \in X_\sigma, y' \in X'_\sigma\}$.

Равенство (18) имеет смысл для всех $\lambda \in Y_\sigma$. Полагая $\lambda \in p_\mu(\sigma)$, получаем

$$\int_Q \frac{\mu(y_\sigma - y_0)}{\sigma} dQ = \int_Q h p_\mu(\sigma) dQ.$$

Отсюда и из условия (15) следует соотношение

$$\begin{aligned} \left\| \frac{y(f_0 + \sigma h) - y(f_0)}{\sigma} - Dh \right\|_{Y_*} &= \sup_{\mu \in M} \left| \int_Q \mu \left(\frac{y_\sigma - y_0}{\sigma} - Dh \right) dQ \right| \\ &= \sup_{\mu \in M} \left| \int_Q h [p_\mu(\sigma) - p_\mu] dQ \right|, \end{aligned} \quad (22)$$

где $M = \{\mu \in Y'_* \mid \|\mu\|_{Y'_*} = 1\}$.

При $\sigma \rightarrow 0$ в силу слабой непрерывности отображения $y(\cdot): X' \rightarrow Y$ имеет место сходимость $y_\sigma \rightarrow y_0$ слабо в Y . Тогда семейство $\{y_\sigma\}$ ограничено в пространстве Y , а значит, и в $L_q(Q)$. Отсюда следует ограниченность семейства $\{g(\sigma)\}$ в пространстве $L_{2q/\rho}(Q)$. Из соотношения (21) следуют оценки

$$\sup_{\mu \in M} \|p_\mu(\sigma)\|_{Y_*}^2 \leq 1, \quad \sup_{\mu \in M} \|g(\sigma)p_\mu(\sigma)\|_{L_2(Q)}^2 \leq 1.$$

Из равенства (19) выводится неравенство

$$\left\| \frac{\partial p_\mu(\sigma)}{\partial t} \right\|_{X'} \leq \|\Delta p_\mu(\sigma)\|_{Y'_*} + \|g(\sigma)\|_{L_{2q/\rho}(Q)} \|g(\sigma)p_\mu(\sigma)\|_{L_2(Q)}.$$

Тогда семейство $\{\partial p_\mu(\sigma)/\partial t\}$ ограничено в X' равномерно по $\mu \in M$, а значит, и в $L_{q'}(0, T; H^{-1}(\Omega)) + L_{q'}(Q)$. Таким образом, получаем равномерную ограниченность $\{p_\mu(\sigma)\}$ в пространстве

$$P = \{p \mid p \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)), p' \in L_{q'}(0, T; H^{-1}(\Omega)) + L_{q'}(Q)\}.$$

После выделения подпоследовательностей установим сходимость $p_\mu(\sigma) \rightarrow r_\mu$ слабо в P равномерно по $\mu \in M$. Из теоремы 5.1 (см. [28; с. 70]) следует компактность вложения пространств Y и P в $L_2(Q)$. Тогда после извлечения подпоследовательностей следует сходимость $y_\sigma \rightarrow y_0$ и $p_\mu(\sigma) \rightarrow r_\mu$ сильно в $L_2(Q)$ и п.в. на Q . Отсюда следует равномерная сходимость $g(\sigma)^2 p_\mu(\sigma) \rightarrow (\rho + 1)|y_0|^\rho r_\mu$ п.в. на Q . Учитывая равномерную ограниченность семейства $\{g(\sigma)^2 p_\mu(\sigma)\}$ в пространстве $L_{q'}(Q)$, с помощью леммы 1.3 (см. [28; с. 25]) получаем сходимость $g(\sigma)^2 p_\mu(\sigma) \rightarrow (\rho + 1)|y_0|^\rho r_\mu$ слабо в $L_{q'}(Q)$ равномерно по $\mu \in M$. Переходя к пределу в равенстве (19), заключаем, что после перехода к пределу в равенстве (22) получим, что оператор D действительно является расширенной производной отображения $y(\cdot): X' \rightarrow Y$ в точке f_0 . Теорема доказана.

Итак, зависимость решения краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности от свободного члена, не будучи, вообще говоря, дифференцируемой по Гато, является расширенно дифференцируемой. Покажем, что этими результатами можно воспользоваться для получения условий оптимальности в экстремальной задаче, связанной с рассматриваемым уравнением.

3. Задача оптимального управления в общем случае. Рассмотрим управляемую систему, описываемую краевой задачей

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + |y|^\rho y &= v + f, & (x, t) \in Q, \\ y &= 0, & (x, t) \in \Sigma, \quad y(x, 0) = \varphi, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Для приведения ее к виду (1), (2) определим пространство $V = L_2(Q)$ и выберем в качестве $B: V \rightarrow L_2(Q)$ оператор вложения. Для любого $v \in V$ она имеет единственное решение $y = y(v)$ из Y , причем отображение $y(\cdot): V \rightarrow Y$ является расширенно дифференцируемым. Задаются непустое выпуклое замкнутое подмножество U пространства V и функционал

$$I(v) = \frac{\alpha}{2} \int_Q v^2 dQ + \frac{1}{2} \int_Q \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial[y(v) - y_d]}{\partial x_i} \right|^2 dQ,$$

где $\alpha > 0$, $y_d \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Ставится следующая задача оптимального управления.

ЗАДАЧА 2. Найти управление $u \in U$, минимизирующее на множестве U функционал I .

Полагая $Z = L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ и выбирая в качестве C единичный оператор, получаем функционал I из задачи 1. Тогда из теоремы 1 следует, что задача 2 разрешима. Установим следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Функционал I в любой точке $u \in U$ имеет производную Гато $I'(u) = \alpha u + p$, где p есть решение краевой задачи

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta y + (\rho + 1)|y|^\rho p &= \Delta y_d - \Delta y, & (x, t) \in Q \\ p &= 0, & (x, t) \in \Sigma, \quad p(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо равенство

$$I(u + \sigma h) - I(u) = \frac{\alpha}{2} \int_Q (2\sigma u h + \sigma^2 h^2) dQ + \frac{1}{2} \int_Q \sum_{i=1}^n \frac{\partial(y_\sigma + y - 2y_d)}{\partial x_i} \frac{\partial(y_\sigma - y)}{\partial x_i} dQ.$$

Полагая в (16) $\mu = \Delta y_d - \Delta y$, приводим предшествующее соотношение к следующему виду:

$$\langle I'(u), h \rangle = \int_Q (\alpha u + p) h dQ \quad \forall h \in V,$$

откуда следуют утверждения леммы.

Итак, для доказательства дифференцируемости минимизируемого функционала в классическом смысле достаточно расширенной дифференцируемости решения уравнений состояния по управлению. В результате приходим к необходимому условию оптимальности для задачи 2, получаемому за счет подстановки найденного значения производной функционала в соотношение (3):

ТЕОРЕМА 5. *Для того, чтобы управление u было решением задачи 2, необходимо, чтобы выполнялось вариационное неравенство*

$$\int_Q (\alpha u + p)(v - u) dQ \geq 0 \quad \forall v \in U.$$

Характерно, что условия оптимальности получаются без каких-либо дополнительных ограничений на параметры оптимизационной задачи по сравнению с теми, которые необходимы для ее разрешимости. Это отличает доказанное утверждение от известных результатов теории оптимального управления системами, описываемых нелинейными уравнениями параболического типа (см., например, [13]–[22]).

Установим условия экстремума для задачи 1 на основе понятия расширенной дифференцируемости так, чтобы теорема 5 оказалась частным случаем полученных результатов. Для этого докажем расширенную дифференцируемость решения задачи (1), (2) по управлению. Рассмотрим полученное равенство (8). Пользуясь теоремой о среднем, установим равенство

$$A_2 y_\sigma - A_2 y = G(\sigma)(y_\sigma - y),$$

где $y = y(u)$, $y_\sigma = y(u + \sigma h)$, а линейный непрерывный оператор $G(\sigma): W_2 \rightarrow W_2'$ определяется по формуле

$$G(\sigma) = \int_0^1 A_2'[y + \theta(y_\sigma - y)] d\theta.$$

Так, для рассмотренного примера справедливо равенство $G(\sigma)\varphi = g(\sigma)^2\varphi$. В силу (8) для любой достаточно регулярной абстрактной функции λ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle y'_\sigma(t) - y'(t), \lambda(t) \rangle dt + \int_0^T \langle [A_1(y_\sigma - y)](t), \lambda(t) \rangle dt + \int_0^T \langle [G(\sigma)(y_\sigma - y)](t), \lambda(t) \rangle dt \\ &= \sigma \int_0^T \langle (Bh)(t), \lambda(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

которое приводится к виду

$$\int_0^T \langle -\lambda'(t) + A_1^* \lambda(t) + G(\sigma)^* \lambda(t), y_\sigma(t) - y(t) \rangle dt + (y_\sigma(T) - y(T), \lambda(T))_H = \sigma \langle B^* \lambda, h \rangle. \quad (23)$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$-p' + A_1^* p + G(\sigma)^* p = \mu, \quad (24)$$

$$p(T) = 0, \quad (25)$$

являющуюся обобщением краевой задачи (19), (20).

Предположим, что оператор A_2 является строго монотонным, т.е. выполнено неравенство

$$\langle A_2 \varphi - A_2 \psi, \varphi - \psi \rangle > 0 \quad \forall \varphi \neq \psi.$$

Тогда имеет место соотношение $\langle G(\sigma)\varphi, \varphi \rangle > 0$ при $\varphi \neq 0$. Определим пространства

$$Y_* = L_2(0, T; W_1), \quad X_\sigma = \{y \in Y_* \mid [y, y]_\sigma < \infty\},$$

где $[y, z]_\sigma = \int_0^T \langle G(\sigma)y(t), z(t) \rangle dt$. Очевидно, они являются гильбертовыми, причем скалярное произведение в пространстве X_σ можно охарактеризовать равенством

$$(y, z)_{X_\sigma} = \chi_1(y, z)_{Y'_*} + [y, z]_\sigma.$$

Зададим пространства

$$P = \{p \mid p \in Y_*, p' \in Y'_* + L_{q'}(0, T; W'_2)\}, \quad Y_\sigma = \{y \mid y \in X_\sigma, y' \in X'_\sigma\}$$

и множество

$$M = \{\mu \in Y'_* \mid \|\mu\|_{Y'_*} = 1\}.$$

Применительно к нелинейному уравнению теплопроводности мы получаем одноименные объекты, использованные при доказательстве теоремы 5. Предположим, что выполнено следующее ограничение.

УСЛОВИЕ C. Если для некоторого семейства $\{p(\sigma)\}$ множество $\{[p(\sigma), p(\sigma)]_\sigma\}$ ограничено при $\sigma \rightarrow 0$, и имеет место сходимость $p(\sigma) \rightarrow p$ слабо в P , то множество $\{G(\sigma)p(\sigma)\}$ ограничено в пространстве $L_{q'}(0, T; W'_2)$ и выполняется сходимость $G(\sigma)p(\sigma) \rightarrow A'_2(y_0)^*p$ слабо в $L_{q'}(0, T; W'_2)$.

ЛЕММА 2. При выполнении условия C и строгой монотонности оператора A_2 для любого числа σ и любых значений $h \in V$, $\mu \in Y'_\sigma$ задача (24), (25) имеет единственное решение $p = p_\mu(\sigma)$ из пространства Y_σ , причем при $\sigma \rightarrow 0$ имеет место сходимость $p_\mu(\sigma) \rightarrow p_\mu$ слабо в P равномерно по $\mu \in M$, где p_μ есть решение задачи

$$-p'_\mu + A_1^*p_\mu + A'_2(y)^*p_\mu = \mu, \quad (26)$$

$$p_\mu(T) = 0. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (24) следует соотношение

$$\int_0^T \langle -p'(t) + A_1^*p(t) + G(\sigma)^*p(t), p(t) \rangle dt = \int_0^T \langle \mu(t), p(t) \rangle dt.$$

Отсюда выводится неравенство

$$\|p\|_{X_\sigma}^2 = \chi_1\|p\|_{Y_*}^2 + \int_0^T \langle G(\sigma)p(t), p(t) \rangle dt \leq \int_0^T \langle \mu(t), p(t) \rangle dt \leq \|\mu\|_{X'_\sigma} \|p\|_{X_\sigma}.$$

Таким образом, получаем оценку

$$\|p\|_{X_\sigma} \leq \|\mu\|_{X'_\sigma}.$$

Пользуясь равенством (26), найдем норму

$$\|p'\|_{X'_\sigma} = \sup_{\|\eta\|_{X_\sigma}=1} |\langle p', \eta \rangle| \leq \sup_{\|\eta\|_{X_\sigma}=1} |\langle A_1^*p + G(\sigma)^*p, \eta \rangle| = \sup_{\|\eta\|_{X_\sigma}=1} |\langle \mu, \eta \rangle|.$$

Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \sup_{\|\eta\|_{X_\sigma}=1} |\langle A_1^*p + G(\sigma)^*p, \eta \rangle| &\leq \sup_{\|\eta\|_{X_\sigma}=1} |\langle A_1\eta, p \rangle| + \sup_{\|\eta\|_{X_\sigma}=1} |\langle G(\sigma)\eta, p \rangle| \\ &\leq \sup_{\|\eta\|_{X_\sigma}=1} \|A_1\| \|\eta\|_{Y'_*} \|p\|_{Y_*} + \sup_{\|\eta\|_{X_\sigma}=1} |\langle \eta, p \rangle_{X_\sigma}|. \end{aligned}$$

Тогда из предшествующих соотношений следует оценка производной от p в пространстве X'_σ . Отсюда следует, что для любого $\mu \in X'_\sigma$ линейная задача (24), (25) имеет единственное решение $p = p_\mu(\sigma)$ из пространства Y_σ .

Пусть теперь имеет место сходимость $\sigma \rightarrow 0$, а значит, $y_\sigma \rightarrow y$ слабо в Y . Тем самым, семейство $\{y_\sigma\}$ ограничено в Y . Из равенства (24) следует соотношение

$$\chi_1 \|p_\mu(\sigma)\|_{Y_*}^2 + [p_\mu(\sigma), p_\mu(\sigma)]_\sigma \leq \|\mu\|_{Y_*'} \|p_\mu(\sigma)\| \leq \frac{1}{2\chi_1} \|\mu\|_{Y_*'}^2 + \frac{\chi_1}{2} \|p_\mu(\sigma)\|_{Y_*}^2.$$

В результате получаем оценки

$$\sup_{\mu \in M} \|p_\mu(\sigma)\|_{Y_*} \leq \frac{1}{\chi_1}, \quad \sup_{\mu \in M} [p_\mu(\sigma), p_\mu(\sigma)]_\sigma \leq \frac{1}{2\chi_1}.$$

Пользуясь условием леммы, установим равномерную по μ ограниченность семейства $\{G(\sigma)p_\mu(\sigma)\}$ в пространстве $L_{q'}(0, T; W'_2)$. Тогда из равенства (24) при $\mu \in M$ получаем

$$\|p_\mu(\sigma)'\|_{Y_*' + L_{q'}(0, T; W'_2)} \leq \|A_1^* p_\mu(\sigma) + \mu\|_{Y_*'} + \|G(\sigma)p_\mu(\sigma)\|_{L_{q'}(0, T; W'_2)}.$$

Отсюда следует, что семейство $\{p_\mu(\sigma)\}$ ограничено в пространстве P равномерно по $\mu \in M$. Тогда после выделения подпоследовательности установим сходимость $p_\mu(\sigma) \rightarrow r_\mu$ слабо в P равномерно по $\mu \in M$. Пользуясь условием C, заключаем, что $G(\sigma)p_\mu(\sigma) \rightarrow A_2'(y_0^*)r_\mu$ слабо в $L_{q'}(0, T; W'_2)$ равномерно по $\mu \in M$. Переходя к пределу в равенстве (24), приходим к выводу, что $r_\mu = p_\mu$. Лемма доказана.

Отметим, что справедливость условия C и утверждений леммы 2 для рассмотренного примера была установлена в процессе доказательства теоремы 4. Теперь несложно доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. При выполнении условий леммы 2 отображение $y(\cdot): V \rightarrow Y$ для задачи (1), (2) является $(V, Y_0; V, Y_*)$ -расширенно дифференцируемым, причем соответствующая производная D характеризуется соотношением

$$\langle \mu, Dh \rangle = \langle B^* p_\mu, h \rangle \quad \forall h \in V, \mu \in Y_0'. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 следует, что соотношение (28) задает линейный непрерывный оператор $D: V \rightarrow Y_0$. Определив в полученном ранее соотношении (9) $\lambda = p_\mu(\sigma)$ при $\mu \in Y(\sigma)'$, установим равенство

$$\left\langle \mu, \frac{y_\sigma - y}{\sigma} \right\rangle = \langle B^* p_\mu(\sigma), h \rangle.$$

Отсюда и из равенства (28) следует соотношение

$$\left\| \frac{[y(u + \sigma h) - y(u)]}{\sigma} - Dh \right\|_{Y_*} = \sup_{\mu \in M} \left| \left\langle \mu, \frac{(y_\sigma - y)}{\sigma} - Dh \right\rangle \right| = \sup_{\mu \in M} |\langle B^* [p_\mu(\sigma) - p_\mu], h \rangle|.$$

Из леммы 2 следует равномерная по $\mu \in M$ сходимость $p_\mu(\sigma) \rightarrow p_\mu$ слабо в P , а значит, и в $L_2(0, T; W_1)$. Учитывая непрерывность оператора $B: V \rightarrow L_2(0, T; W_1)$, заключаем, что оператор $B^*: L_2(0, T; W'_1) \rightarrow V$ непрерывен. Отсюда следует сходимость $B^* p_\mu(\sigma) \rightarrow B^* p_\mu$ слабо в $L_2(0, T; W'_1)$ равномерно по $\mu \in M$. Тогда, переходя

к пределу в последнем равенстве, установим, что оператор D действительно является расширенной производной зависимости решения задачи (1), (2) от управления. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7. *Утверждения теоремы 2 остаются в силе при выполнении условий леммы 2.*

Действительно, из теоремы 6 получаем, что для любого $h \in V$ при $\sigma \rightarrow 0$ имеет место сходимость

$$\frac{y_\sigma - y}{\sigma} \rightarrow Dh \quad \text{в } Y_*,$$

откуда следует, что

$$\frac{C(y_\sigma - y)}{\sigma} \rightarrow CDh \quad \text{в } Z.$$

Тогда, учитывая вид минимизируемого функционала в задаче 1, заключаем, что он дифференцируем по Гато в точке u . Очевидно, соответствующая производная имеет тот же вид, что и в теореме 2, что позволяет завершить доказательство так же, как и раньше.

Итак, ослабив требование, предъявляемое к характеру зависимости решения уравнений состояния от управления, можно получить условия оптимальности для более широкого класса решаемых задач и рассмотреть экстремальные задачи, не поддающиеся анализу известными методами.

Отметим, что сама по себе идея использования ослабления требований, предъявляемых к понятию производной, с целью получения необходимых условий оптимальности или применения градиентных методов минимизации функционалов далеко не нова. В частности, в задачах оптимального управления используют понятия субградиента [29], [30], производную Кларка [31], [32], квазидифференциальное исчисление [33]–[35] и другие методы негладкого анализа. Однако в данном случае трудности обусловлены не наличием в критерии оптимальности или уравнении состояния негладких членов, а недостатком функциональных свойств объектов, необходимых для построения соответствующих производных. Трудности здесь имеют топологический смысл, вследствие чего мы применяем другую форму обобщения операторной производной.

Полученные результаты можно усилить, рассматривая функционалы общего вида, лишь бы они оказались дифференцируемыми по управлению, а также по состоянию на Y_* . В уравнении состояния вместо степенной нелинейности можно было бы рассмотреть нелинейность общего вида, определяемую оператором Немыцкого, дифференцируемость которого обеспечивается теоремой Красносельского (см. [27; с. 308]). При этом в отличие от [14] нам не понадобилось бы ограничение на скорость роста нелинейности. Управление может входить в уравнение нелинейно (с соответствующими ограничениями на степень роста), а также в краевые условия. Пользуясь известными результатами общей теории экстремума (см., например, [13]), можно исследовать для рассматриваемых систем задачи оптимального управления с ограничениями более общего вида. Аналогичные результаты можно установить и для других уравнений. В частности, в [26] описанная методика применяется для исследования управляемой системы, описываемой нелинейным уравнением эллиптического типа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. U. Ahmed, K. L. Teo, "Optimal control of systems governed by a class of nonlinear evolution equations in a reflexive Banach space", *J. Optim. Theory Appl.*, **25**:1 (1978), 57–81.
- [2] N. U. Ahmed, "Properties of relaxed trajectories for a class of nonlinear evolution equations on a Banach space", *SIAM J. Contr. Optim.*, **21**:6 (1983), 953–967.
- [3] D. Tiba, "Optimality conditions for nonlinear distributed control problems", *Proceedings of the 22nd IEEE Conference on Decision and Control*, 1983, 1251–1252.
- [4] D. Tiba, "Optimality conditions for distributed control problems with nonlinear state equation", *SIAM J. Control Optim.*, **23**:1 (1985), 85–110.
- [5] В. С. Мельник, "Экстремальные задачи для эволюционных уравнений с операторными ограничениями", *ДАН УССР. Сер. А. Физ.-матем. и техн. науки*, 1989, № 3, 76–79.
- [6] X. Li, J. Yong, "Necessary conditions for optimal control of distributed parameter systems", *SIAM J. Control Optim.*, **29**:4 (1991), 895–908.
- [7] Ю. Г. Борисович, В. В. Обуховский, "О задаче оптимизации для управляемых систем параболического типа", *Оптимальное управление и дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К семидесятилетию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, **211**, Наука, Физматлит, М., 1995, 95–101.
- [8] A. Fiacca, N. Papageorgiou, P. Papalini, "On the existence of optimal controls for nonlinear infinite dimensional systems", *Czechoslovak Math. J.*, **48**:2 (1998), 291–312.
- [9] Х. Гаевский, К. Грёер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.
- [10] Ж. Сеа, *Оптимизация. Теория и алгоритмы*, Мир, М., 1973.
- [11] Ж.-Л. Лионс, *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, М., 1972.
- [12] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977.
- [13] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1974.
- [14] А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения*, Университетская серия, **5**, Научная книга, Новосибирск, 1999.
- [15] Ж.-Л. Лионс, *Управление сингулярными распределенными системами*, Наука, М., 1987.
- [16] V. Barbu, *Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems*, Math. Sci. Engrg., **190**, Academic Press, Boston, MA, 1993.
- [17] P. Neittaanmäki, D. Tiba, *Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems. Theory, Algorithms, and Applications*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **179**, Marcel Dekker, New York, 1994.
- [18] A. Friedman, "Nonlinear optimal control problems for parabolic equations", *SIAM J. Control Optim.*, **22**:5 (1984), 805–816.
- [19] N. U. Ahmed, X. Xiang, "Nonlinear boundary control of semilinear partial systems", *SIAM J. Control Optim.*, **34**:2 (1996), 473–490.
- [20] J. P. Raymond, H. Zidani, "Pontryagin's principle for state-constrained control problems governed by parabolic equations with unbounded controls", *SIAM J. Control Optim.*, **36**:6 (1998), 1853–1879.
- [21] Z. Liu, "On the identification of coefficients of semilinear parabolic equations", *Acta Math. Appl. Sinica (English Ser.)*, **10**:4 (1999), 356–367.
- [22] F. Tröltzsch, "On the Lagrange–Newton–SQP method for the optimal control of semilinear parabolic equations", *SIAM J. Control Optim.*, **38**:1 (1999), 294–312.
- [23] M. D. Voisei, "First-order necessary conditions of optimality for strongly monotone nonlinear control problems", *J. Optim. Theory Appl.*, **116**:2 (2003), 421–436.

- [24] С. Я. Серовайский, “Дифференцирование обратной функции в ненормированных пространствах”, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:4 (1993), 84–87.
- [25] S. Ya. Serovajsky, “Calculation of functional gradients and extended differentiation of operators”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **13**:4 (2005), 383–396.
- [26] Ж.-П. Обен, И. Экланд, *Прикладной нелинейный анализ*, Мир, М., 1988.
- [27] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [28] R. T. Rockafellar, *La théorie des sous gradients et ses applications à l’optimisation. Fonctions convexes et non convexes*, Collection de la Chaire Aisenstadt, Les Presses de l’Université de Montréal, Montreal, 1978.
- [29] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979.
- [30] F. H. Clarke, “Generalized gradients and applications”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **205** (1975), 247–262.
- [31] Ф. Кларк, *Оптимизация и негладкий анализ*, Наука, М., 1988.
- [32] В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов, *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление*, Оптимизация и исследование операций, **23**, Наука, М., 1990.
- [33] А. В. Разгулин, “О параболических функционально-дифференциальных уравнениях с управляемым преобразованием пространственных переменных”, *ДАН*, **403**:4 (2005), 448–451.
- [34] А. В. Разгулин, “Задача управления двумерным преобразованием пространственных аргументов в параболическом функционально-дифференциальном уравнении”, *Дифференц. уравнения*, **42**:8 (2006), 1078–1091.
- [35] *Функциональный анализ*, ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972.

С. Я. Серовайский

Казахский национальный университет

им. аль-Фараби, Казахстан

E-mail: serovajskys@mail.ru

Поступило

29.01.2007

Исправленный вариант

11.09.2012