Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Лариончиков, Формула Планшереля–Ротаха для функций Чебышева–Эрмита на сужающихся к бесконечности полуинтервалах, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 1, 74–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm405>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 16:13:09

УДК 517.587

ФОРМУЛА ПЛАНШЕРЕЛЯ–РОТАХА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЧЕБЫШЕВА–ЭРМИТА НА СУЖАЮЩИХСЯ К БЕСКОНЕЧНОСТИ ПОЛУИНТЕРВАЛАХ

Р. С. Лариончиков

В статье доказывается асимптотическая формула Планшереля–Ротаха для функций Чебышева–Эрмита $(-1)^n e^{x^2/2} (e^{-x^2})^{(n)} / \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$ и их производных в случае, когда $+\infty$ принадлежит области определения. Приводится также метод вычисления точности аппроксимации.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Благодаря своей прикладной ценности классические ортогональные многочлены подверглись детальному изучению математиками в середине прошлого столетия. Особенно много уделялось внимания асимптотическим формулам этих специальных функций. В данной статье рассматривается вывод формулы Планшереля–Ротаха для функций Чебышева–Эрмита, часто называемых просто функциями Эрмита (см. по этому поводу [1]).

Несмотря на свою фундаментальность труд Габора Сегё [2] не может всецело охватить теорию. Остаются некоторые “научные закоулки”, которые заполняются различными математическими статьями. Указанная выше формула является наглядным примером. В [2] она доказывается с помощью метода перевала, и ее областью определения является сегмент $[\varepsilon_1(2n+1)^{1/2}, \varepsilon_2(2n+1)^{1/2}]$, где $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 1$, n – порядок полинома. В статье [3] (см. также [4]) ключевым моментом при доказательстве является применение метода последовательных приближений к отысканию решения интегрального уравнения, которому удовлетворяют функции Чебышева–Эрмита. Это позволяет включить $+\infty$ в область определения данной асимптотической формулы. При доказательстве Эрдейи широко пользуется в качестве вспомогательного материала функциями Эйри и их свойствами. В данной статье этого удастся избежать. Далее будет доказано следующее утверждение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00051.

ТЕОРЕМА. *Справедливы следующие асимптотические формулы:*

1)

$$\begin{aligned}
 e^{-s^2/2} \widehat{H}_n(s) &= (-1)^n e^{s^2/2} \frac{(e^{-s^2})^{(n)}}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sqrt{s^2 - (2n+1)}} \\
 &\quad \times \exp\left(-\frac{s}{2} \sqrt{s^2 - (2n+1)} + \frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{s + \sqrt{s^2 - (2n+1)}}{\sqrt{2n+1}}\right)\right) \\
 &\quad \times \frac{1 + \alpha(s, 2n+1)}{(1 + \alpha(+\infty, 2n+1))(1 + \varepsilon(n))}, \tag{1}
 \end{aligned}$$

где $s \in (\sqrt{\lambda + (50\lambda/9)^{1/3}}, +\infty)$, а члены $\alpha(s, 2n+1)$, $\alpha(+\infty, 2n+1)$ и $\varepsilon(n)$ играют роль погрешностей и для них справедливо следующее:

а) для каждого фиксированного n предел

$$\alpha(+\infty, 2n+1) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha(s, 2n+1)$$

существует и конечен;

б) выполнены оценки

$$|\alpha(s, \lambda)| \leq \begin{cases} \frac{10\sqrt{2}\lambda^{1/2}}{3(s^2 - \lambda)^{3/2} - 5\sqrt{2}\lambda^{1/2}}, & \text{где } s \in (\sqrt{\lambda + (50\lambda/9)^{1/3}}, \sqrt{2\lambda}), \\ \frac{10\sqrt{2}}{3\lambda - 5\sqrt{2}}, & \text{где } s \geq \sqrt{2\lambda}, \end{cases} \tag{2}$$

$$|\varepsilon(n)| \leq \frac{e^{9/(32(2n+1))}(e^{1/(4n)} + 1)}{2} - 1; \tag{3}$$

2)

$$\begin{aligned}
 (e^{-s^2/2} \widehat{H}_n(s))'_s &= (-1)^n e^{s^2/2} \frac{s(e^{-s^2})^{(n)} + (e^{-s^2})^{(n+1)}}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} \\
 &= -\frac{\sqrt{s^2 - (2n+1)}}{(2\pi)^{1/2}} \\
 &\quad \times \exp\left(-\frac{s}{2} \sqrt{s^2 - (2n+1)} + \frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{s + \sqrt{s^2 - (2n+1)}}{\sqrt{2n+1}}\right)\right) \\
 &\quad \times \frac{1 + \beta(s, 2n+1)}{(1 + \alpha(+\infty, 2n+1))(1 + \varepsilon(n))}, \tag{4}
 \end{aligned}$$

где $s \in (\sqrt{\lambda + (50\lambda/9)^{1/3}}, +\infty)$ и выполнена оценка

$$|\beta(s, \lambda)| \leq \begin{cases} \frac{10\sqrt{2}\lambda^{1/2}}{3(s^2 - \lambda)^{3/2} - 5\sqrt{2}\lambda^{1/2}} + \frac{\lambda^{1/2}}{\sqrt{2}(s^2 - \lambda)^{3/2}} \left(\frac{3(s^2 - \lambda)^{3/2} + 5\sqrt{2}\lambda^{1/2}}{3(s^2 - \lambda)^{3/2} - 5\sqrt{2}\lambda^{1/2}} \right), \\ \text{где } s \in (\sqrt{\lambda + (50\lambda/9)^{1/3}}, \sqrt{2\lambda}), \\ \frac{23\sqrt{2}\lambda + 10}{2\lambda(3\lambda - 5\sqrt{2})}, & \text{где } s \geq \sqrt{2\lambda}. \end{cases} \tag{5}$$

Центральным ядром в доказательстве служит следующая лемма.

ЛЕММА. Рассмотрим уравнение

$$y''_{xx} - Q(x, \lambda)y = 0, \quad (6)$$

где $y = y(x, \lambda)$, $x \in [1, +\infty)$, $\lambda \in \Lambda$, Λ – некоторое множество параметров (далее $\Lambda = \mathbb{R}$ или $\mathbb{N}$).

Введем обозначения:

$$\delta(x, \lambda, Q) = \frac{1}{8} \frac{Q''(x, \lambda)}{(Q(x, \lambda))^{3/2}} - \frac{5}{32} \frac{(Q'(x, \lambda))^2}{(Q(x, \lambda))^{5/2}}, \quad (7)$$

$$\rho(x, \lambda, Q) = \int_x^{+\infty} |\delta(t, \lambda, Q)| dt. \quad (8)$$

Будем рассматривать случай, когда $\forall \lambda \in \Lambda$ $Q(x, \lambda)$ – комплекснозначная функция, причем $Q''(x, \lambda)$ непрерывна на $[1, +\infty)$ и

$$Q(x, \lambda) \neq 0, \quad x \in [1, +\infty). \quad (9)$$

Пусть на $[1, +\infty)$ можно выделить ветвь функции корня $\sqrt{Q}$ такую, что

$$\operatorname{Re} \sqrt{Q(x, \lambda)} \geq 0, \quad x \in [1, +\infty), \quad (10)$$

и выполнено условие

$$\rho(1, \lambda, Q) < \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Тогда $\forall \lambda \in \Lambda$ уравнение (6) имеет решение $y(x, \lambda)$ такое, что при $x \in [1, +\infty)$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} & |y(x, \lambda) - Q^{-1/4}(x, \lambda) \exp(-\xi(1, x, \lambda))| \\ & \leq 4\gamma(\lambda) |Q(x, \lambda)|^{-1/4} \exp(-\operatorname{Re} \xi(1, x, \lambda)) \rho(x, \lambda, Q), \\ & |y'(x, \lambda) + Q^{1/4}(x, \lambda) \exp(-\xi(1, x, \lambda))| \\ & \leq |Q(x, \lambda)|^{1/4} \exp(-\operatorname{Re} \xi(1, x, \lambda)) \\ & \quad \times \left(4\gamma(\lambda) \rho(x, \lambda, Q) + \frac{1}{4} |Q'(x, \lambda)| \cdot |Q(x, \lambda)|^{-3/2} (1 + 4\gamma(\lambda) \rho(x, \lambda, Q)) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\gamma(\lambda) = (1 - 2\rho(1, \lambda, Q))^{-1}, \quad (14)$$

$$\xi(x_0, x, \lambda) = \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t, \lambda)} dt, \quad (15)$$

ветвь $\sqrt{Q}$ в формулах (12), (13) выбрана в соответствии с (10).

Левая часть формулы (12) совпадает с первым шагом ВКБ-метода [5]. В отличие от вышеуказанного метода эта лемма сразу же дает оценку погрешности и кроме того указывает на асимптотику производной решения дифференциального уравнения (6).

Доказательство основано на применении принципа сжимающих отображений к некоторому интегральному уравнению, которое вытекает из (6) и аналогично приведенному в [6, гл. 2]. Следует лишь добавить, что здесь используется полнота пространства $C_b([1, +\infty)) \times C_b([1, +\infty))$ непрерывных и ограниченных на $[1, +\infty)$ вектор-функций (вместо полноты пространства $C([0, 1]) \times C([0, 1])$ в [6]).

2. Вывод асимптотических формул для дифференциального уравнения.

Как и в [6], рассмотрим следующее уравнение:

$$w''_{ss} + (\lambda - s^2)w = 0, \quad (16)$$

где λ – некоторый положительный параметр, а $s \in (\sqrt{\lambda}, +\infty)$. Введем вспомогательные функции, которые будут служить в дальнейшем при оценке остаточного члена и ограничении области определения асимптотической формулы. Пусть $\Psi: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $\Psi = \Psi(\lambda)$,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Psi(\lambda) &= +\infty, \\ f(\lambda) &= 1 + \lambda^{-2/3} \Psi(\lambda). \end{aligned} \quad (17)$$

Сделаем замену переменной в (16):

$$x = \frac{s}{\sqrt{\lambda f(\lambda)}}, \quad y(x, \lambda) = w(s, \lambda).$$

Тогда

$$y''_{xx}(x, \lambda) = w''_{ss}(s, \lambda) \lambda f(\lambda), \quad \lambda - s^2 = \lambda(1 - f(\lambda)x^2),$$

и получим

$$y''_{xx}(x, \lambda) - \lambda^2 f(\lambda)(f(\lambda)x^2 - 1)y(x, \lambda) = 0, \quad x \in \left(\frac{1}{\sqrt{f(\lambda)}}, +\infty\right). \quad (18)$$

К этому уравнению применим лемму, сформулированную во введении статьи. Положим

$$Q(x, \lambda) = \lambda^2 f(\lambda)(f(\lambda)x^2 - 1)$$

и рассмотрим (18) при $x \in [1, +\infty)$. Тогда

$$Q(x, \lambda) > 0, \quad (19)$$

так как $f(\lambda) > 1$. В качестве ветви корня выбираем главную ветвь (такую, что $\sqrt{z} > 0$ для $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$). Полагаем также, что $\sqrt[4]{Q} = \sqrt{\sqrt{Q}}$,

$$\begin{aligned} \delta(x, \lambda, Q) &= \frac{Q''(x, \lambda)}{8(Q(x, \lambda))^{3/2}} - \frac{5(Q'(x, \lambda))^2}{32(Q(x, \lambda))^{5/2}} = \frac{f^{1/2}(\lambda)}{\lambda} \frac{(-\frac{3}{8}f(\lambda)x^2 - \frac{1}{4})}{(f(\lambda)x^2 - 1)^{5/2}}, \\ \rho(1, \lambda, Q) &= \int_1^{+\infty} |\delta(t, \lambda, Q)| dt = \frac{f^{1/2}(\lambda)}{\lambda} \int_1^{+\infty} \frac{\frac{3}{8}f(\lambda)t^2 + \frac{1}{4}}{(f(\lambda)t^2 - 1)^{5/2}} dt. \end{aligned}$$

Проводя замену $\zeta_1 = \sqrt{f(\lambda)} t$ в интеграле, получим

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\sqrt{f(\lambda)}}^{+\infty} \frac{\frac{3}{8}\zeta_1^2 + \frac{1}{4}}{(\zeta_1^2 - 1)^{5/2}} d\zeta_1 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{3}{8} \int_{\sqrt{f(\lambda)}}^{+\infty} \frac{1}{(\zeta_1^2 - 1)^{3/2}} d\zeta_1 + \frac{5}{8} \int_{\sqrt{f(\lambda)}}^{+\infty} \frac{1}{(\zeta_1^2 - 1)^{5/2}} d\zeta_1 \right).$$

Замена $\zeta_2 = \sqrt{1 - 1/\zeta_1^2}$ приводит к виду

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{3}{8} \int_{\tilde{x}(\lambda)}^1 \frac{1}{\zeta_2^2} d\zeta_2 + \frac{5}{8} \int_{\tilde{x}(\lambda)}^1 \frac{1 - \zeta_2^2}{\zeta_2^4} d\zeta_2 \right) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4\tilde{x}(\lambda)} + \frac{5}{8\tilde{x}^3(\lambda)} \right) \leq \frac{5}{12\lambda\tilde{x}^3(\lambda)}, \quad (20)$$

где

$$\tilde{x}(\lambda) = \sqrt{1 - \frac{1}{f(\lambda)}}.$$

Для того чтобы можно было применить лемму, надо, чтобы выражение (20) было строго меньше $1/2$. Наложим условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda\tilde{x}^3(\lambda)} = 0. \quad (21)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (1+y)^{3/2} &= (1+3y+3y^2+y^3)^{1/2} \leq 1 + \sqrt{3}y^{1/2} + \sqrt{3}y + y^{3/2} \\ &\leq \begin{cases} 1 + 2\sqrt{3} + y^{3/2} & \text{при } 0 \leq y < 1, \\ 1 + (1 + 2\sqrt{3})y^{3/2} & \text{при } y \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь неравенством

$$(1+y)^{3/2} \leq 5 + 5y^{3/2} \quad \forall y \geq 0,$$

получим

$$\frac{1}{\lambda\tilde{x}^3(\lambda)} = \frac{f^{3/2}(\lambda)}{\lambda(f(\lambda) - 1)^{3/2}} = \frac{(1 + \lambda^{-2/3}\Psi(\lambda))^{3/2}}{\Psi^{3/2}(\lambda)} \leq \frac{5}{\Psi^{3/2}(\lambda)} + \frac{5}{\lambda}. \quad (22)$$

При условии (17) $\exists \lambda_0$ такое, что $\forall \lambda \geq \lambda_0$

$$\rho(1, \lambda, Q) \leq \frac{25}{12} \left(\frac{1}{\Psi^{3/2}(\lambda)} + \frac{1}{\lambda} \right) < \frac{1}{2}. \quad (23)$$

Тогда уравнение (18) согласно лемме имеет решение $y(x, \lambda)$ такое, что выполнены неравенства, фигурирующие в лемме. Имеем

$$|Q'(x, \lambda)| \cdot |Q(x, \lambda)|^{-3/2} = \frac{2f^{1/2}(\lambda)x}{\lambda(f(\lambda)x^2 - 1)^{3/2}}. \quad (24)$$

Рассмотрим при фиксированном λ функцию

$$F(x) = \frac{x}{(f(\lambda)x^2 - 1)^{3/2}}.$$

Тогда

$$F'(x) = \frac{-2f(\lambda)x^2 - 1}{(f(\lambda)x^2 - 1)^{5/2}} < 0 \quad \text{при } x \in [1, +\infty).$$

Тем самым, выражение (24) оценивается как

$$|Q'(x, \lambda)| \cdot |Q(x, \lambda)|^{-3/2} \leq \frac{2f^{1/2}(\lambda)}{\lambda(f(\lambda) - 1)^{3/2}} = \frac{2(1 + \lambda^{-2/3}\Psi(\lambda))^{1/2}}{\Psi^{3/2}(\lambda)} \leq \frac{2}{\Psi^{3/2}(\lambda)} + \frac{2\lambda^{-1/3}}{\Psi(\lambda)}. \quad (25)$$

Последнее неравенство выполнено в силу неравенства

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \forall a, b, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

При выполнении условия (17) последнее выражение в (25) стремится к 0. Далее

$$\sqrt[4]{Q\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda f(\lambda)}}, \lambda\right)} = \sqrt[4]{\lambda f(\lambda)(s^2 - \lambda)}, \quad (26)$$

$$\xi\left(1, \frac{s}{\sqrt{\lambda f(\lambda)}}, \lambda\right) = \int_1^{s/\sqrt{\lambda f(\lambda)}} \sqrt{\lambda^2 f(\lambda)(f(\lambda)t^2 - 1)} dt = \int_{\sqrt{\lambda f(\lambda)}}^s \sqrt{\eta^2 - \lambda} d\eta, \quad (27)$$

откуда для решения уравнения (16) получаем формулу при $\lambda \geq \lambda_0$

$$w_1(s, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda f(\lambda)(s^2 - \lambda)}} \exp\left(-\int_{\sqrt{\lambda f(\lambda)}}^s \sqrt{\eta^2 - \lambda} d\eta\right) (1 + \alpha(s, \lambda)), \quad (28)$$

где $s \in [\sqrt{\lambda f(\lambda)}, +\infty)$

и

$$|\alpha(s, \lambda)| \leq \frac{5}{3}\gamma(\lambda) \frac{(1 + \lambda^{-2/3}\Psi(\lambda))^{3/2}}{\Psi^{3/2}(\lambda)}, \quad (29)$$

а для его производной

$$w'_1(s, \lambda) = -\sqrt[4]{\frac{s^2 - \lambda}{\lambda f(\lambda)}} \exp\left(-\int_{\sqrt{\lambda f(\lambda)}}^s \sqrt{\eta^2 - \lambda} d\eta\right) (1 + \beta(s, \lambda)), \quad (30)$$

где $s \in [\sqrt{\lambda f(\lambda)}, +\infty)$

и

$$\begin{aligned} |\beta(s, \lambda)| \leq & \frac{5}{3}\gamma(\lambda) \left(\frac{(1 + \lambda^{-2/3}\Psi(\lambda))^{3/2}}{\Psi^{3/2}(\lambda)} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{(1 + \lambda^{-2/3}\Psi(\lambda))^{1/2}}{\Psi^{3/2}(\lambda)} \right) \left(1 + \frac{5}{3}\gamma(\lambda) \left(\frac{(1 + \lambda^{-2/3}\Psi(\lambda))^{3/2}}{\Psi^{3/2}(\lambda)} \right) \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Условие (17) на $\Psi(\lambda)$ в применении к (29) и (31) дает

$$\alpha(s, \lambda) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \beta(s, \lambda) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

равномерно по $s \in [\sqrt{\lambda f(\lambda)}, +\infty)$.

3. Формулы для функций Чебышева–Эрмита. При фиксированном λ , $\lambda \geq \lambda_0$, функция $w_1(s, \lambda)$ будет ограниченной при $s \in [\sqrt{\lambda f(\lambda)}, +\infty)$. Согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений $\forall \lambda, \lambda \geq \lambda_0$, существует еще одно решение $w_2(s, \lambda)$ уравнения (16), причем $w_2(s, \lambda)$ является неограниченным по s (см. в [7, с. 412] лемму 4.1, которую можно переформулировать для $x \geq 1$ или, что в рассматриваемом здесь случае то же самое, для $s \geq \sqrt{\lambda f(\lambda)}$). Решения $w_1(s, \lambda)$ и $w_2(s, \lambda)$ линейно независимы.

Согласно известной теореме любое решение дифференциального уравнения

$$w''_{ss} + (2n + 1 - s^2)w = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (32)$$

можно представить в виде линейной комбинации двух линейно независимых решений. В качестве таковых решений возьмем $w_1(s, 2n + 1)$ и $w_2(s, 2n + 1)$. Функции Чебышева–Эрмита $e^{-s^2/2} \hat{H}_n(s)$ (см. [1]) являются решениями уравнения (32). Кроме того, при фиксированном n

$$e^{-s^2/2} \hat{H}_n(s) \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow +\infty. \quad (33)$$

Отсюда следует, что

$$e^{-s^2/2} \hat{H}_n(s) = C_n w_1(s, 2n + 1), \quad (34)$$

где C_n – некоторая константа. Найдём ее. Из определения $\hat{H}_n(s)$ вытекает, что

$$\hat{H}_n(s) = \sqrt{\frac{2^n}{n! \sqrt{\pi}}} s^n + o(s^n), \quad s \rightarrow +\infty. \quad (35)$$

Тогда C_n можно найти по формуле

$$\frac{1}{C_n} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{e^{s^2/2} w_1(s, 2n + 1)}{s^n 2^{n/2}} \sqrt{n! \sqrt{\pi}}. \quad (36)$$

Вычислим сначала интеграл (27). Делая замену $\eta = \sqrt{\lambda} \operatorname{ch} t$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{\lambda f(\lambda)}}^s \sqrt{\eta^2 - \lambda} d\eta &= \lambda \int_{\operatorname{arch} \sqrt{f(\lambda)}}^{\operatorname{arch}(s/\sqrt{\lambda})} \operatorname{sh}^2 t dt = \lambda \int_{\operatorname{arch} \sqrt{f(\lambda)}}^{\operatorname{arch}(s/\sqrt{\lambda})} \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2} dt \\ &= \left(\frac{\lambda}{4} \operatorname{sh} 2t - \frac{\lambda}{2} t \right) \Big|_{\operatorname{arch} \sqrt{f(\lambda)}}^{\operatorname{arch}(s/\sqrt{\lambda})} \\ &= \frac{\lambda}{2} \left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{s^2}{\lambda} - 1} - 1 - \sqrt{f(\lambda)} \sqrt{f(\lambda) - 1} \right) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \left(\ln \left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\frac{s^2}{\lambda} - 1} \right) - \ln(\sqrt{f(\lambda)} + \sqrt{f(\lambda) - 1}) \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

– гиперболические косинус и синус соответственно,

$$\operatorname{arch} t = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$$

– главное значение гиперболического арккосинуса (см. [8, с. 594–595]). В формуле (37) и далее $\lambda = 2n + 1$.

Введем обозначение

$$B(\lambda) = \frac{\lambda}{2} (\sqrt{f(\lambda)} \sqrt{f(\lambda) - 1} - \ln(\sqrt{f(\lambda)} + \sqrt{f(\lambda) - 1})). \quad (38)$$

Далее понадобится также следующая формула:

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{2} - \frac{\lambda}{2} \frac{s}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{s^2}{\lambda} - 1} &= \frac{s^2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda}{s^2}} \right) \\ &= \frac{s^2}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{\lambda}{2s^2} + O\left(\frac{1}{s^4}\right) \right) \right) = \frac{\lambda}{4} + O\left(\frac{1}{s^2}\right), \end{aligned} \quad (39)$$

λ фиксировано, $s \rightarrow +\infty$.

Согласно известной формуле Стирлинга (см. [9, с. 372–373])

$$n! = \sqrt{2\pi n}^{n+1/2} e^{-n} (1 + \varepsilon_1(n)), \quad \text{где } 0 < \varepsilon_1(n) \leq e^{1/(4n)} - 1. \quad (40)$$

Следовательно, предел (36) имеет вид

$$\frac{1}{C_n} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{s^2/2} w_1(s, 2n+1)}{s^n 2^{n/2-1/4}} \pi^{1/2} n^{n/2+1/4} e^{-n/2} \right) (1 + \varepsilon_2(n)), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (41)$$

где

$$|\varepsilon_2(n)| \leq \frac{|\varepsilon_1(n)|}{2} \leq \frac{e^{1/(4n)} - 1}{2}.$$

Подставляя (28), (37)–(39) в (41), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_n} &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{s^2}{2} - \frac{\lambda}{2} \frac{s}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{s^2}{\lambda} - 1} + B(\lambda)}}{s^n 2^{n/2-1/4} \lambda^{1/4} f^{1/4}(\lambda) \sqrt[4]{s^2 - \lambda} e^{n/2}} \left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\frac{s^2}{\lambda} - 1} \right)^{\lambda/2} \right. \\ &\quad \left. \times \pi^{1/2} n^{n/2+1/4} (1 + \alpha(s, 2n+1)) \right) (1 + \varepsilon_2(n)) \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{B(\lambda)} (2s/\sqrt{\lambda})^{\lambda/2} \pi^{1/2} ((\lambda-1)/2)^{\lambda/4} e^{\lambda/4}}{s^{(\lambda-1)/2} 2^{(\lambda-1)/4-1/4} \lambda^{1/4} f^{1/4}(\lambda) s^{1/2} e^{(\lambda-1)/4}} \right) \\ &\quad \times (1 + \alpha(+\infty, 2n+1)) (1 + \varepsilon_2(n)) \\ &= \frac{2^{1/2} e^{B(\lambda)} \pi^{1/2} (1 - 1/\lambda)^{\lambda/4}}{\lambda^{1/4} f^{1/4}(\lambda) e^{-1/4}} (1 + \alpha(+\infty, 2n+1)) (1 + \varepsilon_2(n)). \end{aligned} \quad (42)$$

Принимая во внимание существование предела (36), заметим, что из (42) следует утверждение а) теоремы. Имеет место оценка

$$|\alpha(+\infty, 2n+1)| \leq \frac{5\gamma(\lambda)}{3} \frac{(1 + \lambda^{-2/3} \Psi(\lambda))^{3/2}}{\Psi^{3/2}(\lambda)}. \quad (43)$$

Формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа (см. [9, с. 149]), примененная к функции $\ln(1+x)$, имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} \frac{1}{(1+\theta(x)x)^2},$$

где $\theta(x) \in (0, 1)$, $|x| < 1$. Применяя ее к следующему ниже выражению, получим

$$\left| \ln\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} \right| \leq \frac{1}{2\lambda^2} \frac{1}{(1-1/\lambda)^2} \leq \frac{9}{8\lambda^2},$$

так как $\lambda = 2n+1 \geq 3$ при $n \geq 1$. Тогда

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda/4} = \exp\left(\frac{\lambda}{4} \ln\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\right) = e^{-1/4}(1 + \varepsilon_3(n)),$$

где $|\varepsilon_3(n)| \leq e^{9/(32(2n+1))} - 1$. Подставляя последнюю оценку в формулу (42), получим

$$\frac{1}{C_n} = \frac{(2\pi)^{1/2} e^{B(\lambda)}}{(\lambda f(\lambda))^{1/4}} (1 + \alpha(+\infty, 2n+1)) (1 + \varepsilon(n)), \quad (44)$$

где

$$|\varepsilon(n)| \leq |\varepsilon_2(n)| + |\varepsilon_3(n)| + |\varepsilon_2(n)\varepsilon_3(n)| \leq \frac{e^{9/(32(2n+1))}(e^{1/(4n)} + 1)}{2} - 1. \quad (45)$$

Пользуясь формулой (37) и обозначением (38), подставляя (28) и (44) в (34), получим (1) при $s \in [\sqrt{\lambda} + \lambda^{1/3}\Psi(\lambda), +\infty)$, а для $\alpha(s, 2n+1)$, $\alpha(+\infty, 2n+1)$ и $\varepsilon(n)$ справедливы оценки (29), (43) и (45). Пользуясь этими оценками, а также условием (17), делая замену $s = (2n+1)^{1/2} \operatorname{ch} t$, получим

$$e^{-s^2/2} \hat{H}_n(s) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} (2n+1)^{1/4} \operatorname{sh}^{1/2} t} e^{(n/2+1/4)(2t-\operatorname{sh} 2t)} (1 + o(1)), \quad (46)$$

где $s \in [(2n+1)^{1/2} \sqrt{1 + (2n+1)^{-2/3}\Psi(2n+1)}, +\infty)$, что соответствует формуле Планшереля–Ротаха, доказываемой в монографии Сегё и имеющей там более ограничительные условия на область определения (см. [2, с. 208, 239–240]).

Дифференцируя обе части (34) по s и пользуясь (44), получим формулу для производной (4) при $s \in [\sqrt{\lambda} + \lambda^{1/3}\Psi(\lambda), +\infty)$, а для остаточных членов справедливы оценки (31), (43) и (45). После замены $s = (2n+1)^{1/2} \operatorname{ch} t$ приходим к формуле

$$(e^{-s^2/2} \hat{H}_n(s))'_s = -\frac{(2n+1)^{1/4} \operatorname{sh}^{1/2} t}{(2\pi)^{1/2}} e^{(n/2+1/4)(2t-\operatorname{sh} 2t)} (1 + o(1)), \quad (47)$$

где $s \in [(2n+1)^{1/2} \sqrt{1 + (2n+1)^{-2/3}\Psi(2n+1)}, +\infty)$. Отметим, что в (46) и (47) $o(1) \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$ равномерно по s из указанных промежутков.

4. Замечания об оценке остаточного члена асимптотических формул. Можно по-другому оценить остаточные члены $\alpha(s, \lambda)$ и $\beta(s, \lambda)$, фигурирующие в формулах (1) и (4). Возьмем произвольное $s \in (\sqrt{\lambda + \lambda^{1/3}}, \sqrt{2\lambda})$. Тогда $\exists \varepsilon = \varepsilon(s)$, $0 < \varepsilon < 2/3$, $s = \sqrt{\lambda(1 + \lambda^{-2/3+\varepsilon})}$. Рассмотрим функцию $\Psi(\lambda) = \lambda^\varepsilon$, которая удовлетворяет (17). Имеем $\Psi(\lambda) = (s^2 - \lambda)\lambda^{-1/3}$ и в силу (29) и (31) получаем оценки (2) и (5), сформулированные для $s \in (\sqrt{\lambda + (50\lambda/9)^{1/3}}, \sqrt{2\lambda})$. Условие (11) при этом запишем в виде

$$\rho(1, \lambda, Q) \leq \frac{5\sqrt{2}\lambda^{1/2}}{6(s^2 - \lambda)^{3/2}} < \frac{1}{2},$$

откуда $s > \sqrt{\lambda + (50\lambda/9)^{1/3}}$. Пусть $s \geq \sqrt{2\lambda}$. Тогда для $\Psi(\lambda) = \lambda^{2/3}$ имеют место оценки (2) и (5) остаточных членов, сформулированные для случая $s \geq \sqrt{2\lambda}$. Здесь условие (11) выполняется автоматически:

$$\rho(1, \lambda, Q) \leq \frac{5\sqrt{2}}{6\lambda} < \frac{1}{2} \quad \text{при } \lambda = 2n + 1 \geq 3.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.
- [2] Серё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
- [3] Erdelyi A. Asymptotic solutions of differential equations with transition points or singularities // J. Math. Phys. 1960. V. 1. № 1. P. 16–26.
- [4] Jeffreys H., Jeffreys B. Methods of Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1972.
- [5] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
- [6] Суетин П. К., Лариончиков Р. С. Некоторые весовые оценки для классических ортогональных многочленов Чебышева–Эрмита. Деп. ВИНТИ. М.: МТУСИ, 2000.
- [7] Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
- [8] Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М.: Физматлит, 1995.
- [9] Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Наука, 1973.

Московский технический университет связи и информатики
E-mail: romanlario@rambler.ru

Поступило
13.03.2001
Исправленный вариант
25.07.2001