Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Сальникова, Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 3, 428–438

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4051>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:59:39

Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов

Е. С. Сальникова

Излагается новый подход без улучшения результата Рухадзе (1987 г.) для оценки $\mu(\log 2)$, даются оценки приближений числа $\log 2$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, числа $\log((\sqrt{5}-1)/2)$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ и других чисел.

Библиография: 10 названий.

Введение. В 1987 г. Рухадзе [1] была получена оценка показателя иррациональности числа $\log 2$, являющаяся наилучшей на данный момент. В основе доказательства лежало изучение свойств интегралов вида

$$I(z) = \int_0^1 \frac{x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}}{(1-zx)^a} dx. \quad (1)$$

Выбор $z = -1$, $b = 7n + 1$, $a = 6n + 1$, $c = 14n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \rightarrow \infty$) позволил Рухадзе доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geq q_0$, где q_0 – достаточно большое число. Тогда

$$\left| \log 2 - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{3.891}}.$$

Далее будет рассмотрен новый подход к доказательству данной теоремы. При этом будет существенно использоваться модификация конструкции, введенной в работе Салихова [2]. Подробное доказательство теоремы 1 приводится с целью демонстрации основных идей метода, которые далее используются в других теоремах.

Рассматриваемый метод позволяет получить оценку для показателя иррациональности числа $\log(5/3)$ (данный вопрос поставлен Нестеренко), оценки снизу приближения числа $\log 2$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, числа $\log((\sqrt{5}-1)/2)$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ и других чисел.

ТЕОРЕМА 2. Пусть числа p, q и q_0 определены как в теореме 1. Тогда

$$\left| \log \frac{5}{3} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{7.038}}.$$

Заметим, что в работе [1] анонсировалась оценка $\mu(\log(5/3)) \leq 9.012$, а в работе [3] было доказано: $\mu(\log(5/3)) \leq 9.7551$.

Метод доказательства теорем 1 и 2 позволяет получить также оценки мер иррациональности чисел вида $\log((M+1)/M)$ и $\log((2M+1)/(2M-1))$, $M \in \mathbb{N}$.

В работе [1] анонсировались оценки: $\mu(\log(3/2)) \leq 2.911$ и $\mu(\log(4/3)) \leq 2.559$, а в работе [3] было доказано: $\mu(\log(3/2)) \leq 3.3317$ и $\mu(\log(4/3)) \leq 3.1105$. Последние результаты подтверждает и данный метод.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mu > 9.307$, $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{Z}$, $(p_3, p_4) \neq (0, 0)$, $P = \max(|p_1|, |p_2|, |p_3|, |p_4|)$, $P > P_0(\mu)$. Тогда справедливо неравенство

$$\left| \log 2 - \frac{p_1\sqrt{2} + p_2}{p_3\sqrt{2} + p_4} \right| > \frac{1}{P^\mu}.$$

В работе [4] была получена аналогичная оценка для $\mu = 12.4288$.

Везде далее числа $p_1, p_2, p_3, p_4, P, P_0(\mu)$ определены как в теореме 3.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mu > 10.020$. Тогда имеет место оценка

$$\left| \log \frac{\sqrt{5} - 1}{2} - \frac{p_1\sqrt{5} + p_2}{p_3\sqrt{5} + p_4} \right| > \frac{1}{P^\mu}.$$

При $p_1 = 0, p_3 = 0$ теорема 4 дает оценку для показателя иррациональности логарифма “золотого сечения”: $\mu(\log((\sqrt{5} - 1)/2)) \leq 10.020$.

Заметим, что в работе [5] была получена серия результатов, из которых в данном случае наибольший интерес представляет оценка вида $\mu(\sqrt{5} \log((\sqrt{5} + 1)/(\sqrt{5} - 1))) \leq 4.4937$. Этот же результат получен в работе [6].

Теорема 4 является частным случаем при $k = 1$ следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\mu > \mu_0(k)$. Тогда имеет место оценка

$$\left| \log \frac{\sqrt{4k^2 + 1} - 1}{2k} - \frac{p_1\sqrt{4k^2 + 1} + p_2}{p_3\sqrt{4k^2 + 1} + p_4} \right| > \frac{1}{P^\mu}.$$

В частности, при $k = 2$ можно получить оценку вида $\mu(\log(\sqrt{17} - 1)/4) \leq 8.492$.

Следует заметить, что существенное значение при написании данной работы имело знакомство с обзором Зудилина [7].

1. Основные леммы. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $l_n = q_n\gamma + p_n$, где $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 1. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |l_n| = -\delta, \quad \delta > 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |q_n| \leq \tau;$$

тогда $\mu(\gamma) \leq 1 + \tau/\delta$.

Данная лемма была доказана в работе [8; лемма 3.1].

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$,

$$L_n = (\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n))\theta + \Lambda_3(n)\sqrt{d} + \Lambda_4(n), \quad (2)$$

где все $\Lambda_i(n) \in \mathbb{Z}$, не все $\Lambda_i(n) = 0$.

ЛЕММА 2. Пусть

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n)| &= \gamma_1, & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max_{1 \leq i \leq 4} |\Lambda_i(n)| &\leq \gamma_2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |L_n| &= -\gamma_3, \\ \gamma_3 > \gamma_2, \quad \gamma_1 + \gamma_2 > 0, \quad \mu &> \frac{2(\gamma_1 + \gamma_3)}{\gamma_3 - \gamma_2}, \end{aligned}$$

числа $p_1, p_2, p_3, p_4, P, P_0(\mu)$ определены как в теореме 3. Тогда

$$\left| \theta - \frac{p_1\sqrt{d} + p_2}{p_3\sqrt{d} + p_4} \right| > \frac{1}{P^\mu}.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2 работы [9].

2. Новый подход к доказательству теоремы 1. Пусть везде далее $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_3^4 \frac{(x-2)^{a_1}(4-x)^{a_1}(x-3)^{a_2}}{x^{a_3+1}(6-x)^{a_3+1}} dx, \quad (3)$$

где $a_1 = 3n, a_2 = 8n, a_3 = 4n$.

Обозначим для $M \in \mathbb{N}$ $q_M = \text{НОК}(1, 2, \dots, M)$.

Для подынтегральной функции интеграла (3)

$$R(x) = \frac{(x-2)^{3n}(4-x)^{3n}(x-3)^{8n}}{x^{4n+1}(6-x)^{4n+1}}, \quad R(x) = R(6-x).$$

Данное свойство симметрии, как свойство (4) работы Салихова [2], является решающим во всех дальнейших рассуждениях.

ЛЕММА 3. Справедливо представление вида

$$q_{6n} I \cdot 2^{3n+2} \cdot 3 = A \log 2 + B, \quad \text{где } A, B \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство леммы 3 проводится аналогично доказательству лемм 1, 2 работы [2].

Следующая лемма позволяет уточнить знаменатель q_{6n} линейной формы, построенной в лемме 3, с помощью гипергеометрической функции с полуцелыми параметрами и стандартной схемы Чудновского–Хаты–Рухадзе. Автору стало известно, что подобная конструкция была предложена в 2004 г. Зудилиным.

ЛЕММА 4. Пусть

$$\begin{aligned} \frac{B_n}{A_n} &= \frac{(3n)!(3n)!(8n)!}{(4n)!(4n)!(6n)!}, & A_n, B_n &\in \mathbb{N}, \quad (A_n, B_n) = 1, \\ l_n &= B_n^{-1} q_{8n} I \cdot 2^{3n+2} \cdot 3 \equiv q_n \log 2 + p_n. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда все $q_n, p_n \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала приведем интеграл (3) к гипергеометрическому типу с помощью замены $x = 3 + \sqrt{t}$:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{8n+2}} \int_0^1 \frac{t^{4n-0.5}(1-t)^{3n}}{(1-t/9)^{4n+1}} dt. \quad (5)$$

Применим формулу Эйлера для гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b; c; z)$, а также формулу Куммера [10; формула (10), с. 72, формула (23), с. 76]:

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z).$$

Имеем при $a = 4n + 1$, $b = 4n + 0.5$, $c = 7n + 1.5$, $z = 1/9$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{4n-0.5}(1-t)^{3n}}{(1-t/9)^{4n+1}} dt &= \frac{\Gamma(4n+0.5)\Gamma(3n+1)}{\Gamma(7n+1.5)} F(4n+1, 4n+0.5; 7n+1.5; z) \\ &= \frac{\Gamma(4n+0.5)\Gamma(3n+1)}{\Gamma(7n+1.5)} F(3n+1, 3n+0.5; 7n+1.5; z)(1-z)^{-n} \\ &= \frac{\Gamma(4n+0.5)\Gamma(3n+1)}{\Gamma(3n+0.5)\Gamma(4n+1)} \left(\frac{8}{9}\right)^{-n} \int_0^1 \frac{t^{3n-0.5}(1-t)^{4n}}{(1-t/9)^{3n+1}} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть

$$J = \int_3^4 \frac{(x-2)^{4n}(4-x)^{4n}(x-3)^{6n}}{x^{3n+1}(6-x)^{3n+1}} dx \stackrel{[x=3+\sqrt{t}]}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{6n+2}} \int_0^1 \frac{t^{3n-0.5}(1-t)^{4n}}{(1-t/9)^{3n+1}} dt.$$

Имеем

$$\frac{\Gamma(4n+0.5)}{\Gamma(3n+0.5)} = 2^{-2n} \frac{(3n)!(8n)!}{(6n)!(4n)!}.$$

Используя теперь (5) и (6), получим

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{8n+2}} 2^{-2n} \frac{(3n)!(3n)!(8n)!}{(4n)!(4n)!(6n)!} \frac{2^{-3n}}{3^{-2n}} \int_0^1 \frac{t^{3n-0.5}(1-t)^{4n}}{(1-t/9)^{3n+1}} dt = 2^{-5n} \frac{B_n}{A_n} J$$

или

$$2^{-5n} J = \frac{A_n}{B_n} I.$$

Аналогично лемме 3 можно доказать, что

$$q_{8n} J \cdot 2^{-2n+2} \cdot 3 = A' \log 2 + B', \quad A', B' \in \mathbb{Z},$$

а тогда

$$q_{8n} J \cdot 2^{-2n+2} \cdot 3 = q_{8n} \frac{A_n}{B_n} I \cdot 2^{3n+2} \cdot 3,$$

откуда стандартными рассуждениями получаем (4).

Доказательство теоремы теперь сводится к применению леммы 1 для линейной формы (4). Поэтому последовательно вычислим для нее δ и τ .

1. Вычисление δ .

1.1. Вычислим сначала $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log(I \cdot 2^{3n+2} \cdot 3)$, применяя теорему Лапласа к интегралу в (5). Корнем уравнения

$$\frac{4}{t} - \frac{3}{1-t} + \frac{4}{9-t} = 0 \quad (7)$$

на интервале $(0, 1)$ является $t_1 = 0.5879$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(I \cdot 2^{3n+2} \cdot 3) = 3 \log 2 - 8 \log 3 + 4 \log t_1 + 3 \log(1-t_1) - 4 \log\left(1 - \frac{t_1}{9}\right) = -11.2235.$$

1.2. Вычислим теперь $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log B_n$.

Рассмотрим для $x \in [0, 1)$

$$f(x) = [3x] + [3x] + [8x] - [6x] - [4x] - [4x].$$

Легко видеть, что $f(x) = 1$ при

$$x \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{6}\right) \cup \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right).$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log B_n = \left(\psi\left(\frac{1}{6}\right) - \psi\left(\frac{1}{8}\right)\right) + \left(\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{3}{8}\right)\right) + \left(\psi\left(\frac{3}{4}\right) - \psi\left(\frac{2}{3}\right)\right) = 3.0792,$$

где $\psi(x)$ – логарифмическая производная гамма-функции. Поэтому ввиду того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log q_{8n} = 8$, получим

$$\delta = -(8 - 3.0792 - 11.2235) = 6.3027.$$

Заметим, что сокращение простых с использованием гипергеометрической функции с рациональными параметрами аналогичным образом было проведено в работе [3].

2. Вычисление τ .

С учетом результатов пункта 1 имеем

$$\tau = 8 - 3.0792 + 3 \log 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |a_1|,$$

где

$$a_1 = \frac{1}{(4n)!} \frac{d^{4n}}{dx^{4n}} (R(x) x^{4n+1}) \Big|_{x=0}.$$

Последний предел можно вычислить методом перевала, используя второй корень уравнения (7). Имеем

$$t_2 = 20.4121,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |a_1| = -8 \log 3 + 4 \log t_2 + 3 \log(1-t_2) - 4 \log\left(1 - \frac{t_2}{9}\right) = 11.2235,$$

$$\tau = 8 - 3.0792 + 3 \log 2 + 11.2235 = 18.2238.$$

Итак, в лемме 1 для l_n можно взять $\delta = 6.3027$, $\tau = 18.2238$, т.е.

$$\mu(\log 2) \leq 1 + \frac{\tau}{\delta} = 1 + \frac{18.2238}{6.3027} = 3.891$$

и теорема 1 доказана.

Рассмотрим переход от введенного интеграла (3) к интегралу (1) Рухадзе. Для этого используем формулу Гурса [10; формула (15), с. 119]:

$$\begin{aligned} F(a, b; a + b - 0.5; -z) &= (1 + z)^{-0.5} (\sqrt{1 + z} + \sqrt{z})^{1-2a} \\ &\quad \times F(2a - 1, a + b - 1; 2a + 2b - 2; 2\sqrt{z + z^2} - 2z), \\ I \cdot 2^{3n+2} \cdot 3 &= \frac{2^{3n+1}}{3^{8n+1}} \int_0^1 \frac{t^{4n-0.5} (1-t)^{3n}}{(1-t/9)^{4n+1}} dt \\ &\stackrel{[t=1-x]}{=} \frac{3}{2^{9n+2}} \frac{\Gamma(3n+1)\Gamma(4n+0.5)}{\Gamma(7n+1.5)} F\left(4n+1, 3n+1; 7n+1.5; -\frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{3(3n)!(7n)!(8n)!}{2^{3n+1}(4n)!(14n+1)!} \frac{2\sqrt{2}}{3} (\sqrt{2})^{-6n-1} F\left(6n+1, 7n+1; 14n+2; \frac{1}{2}\right) \\ &\stackrel{[x=1-t]}{=} 2 \frac{(3n)!(8n)!}{(4n)!(7n)!} \int_0^1 \frac{t^{7n} (1-t)^{7n}}{(1+t)^{6n+1}} dt, \end{aligned}$$

где последний интеграл – интеграл (1).

Компьютерный перебор параметров a_1, a_2, a_3 для введенного интеграла (3) показал, что наилучшая оценка меры иррациональности числа $\log 2$ достигается при $a_2 = 2a_3$. В этом случае интеграл (3) приводится к интегралу (1).

Данное замечание справедливо и для следующих интегралов:

$$I = \int_5^6 \frac{(x-4)^{6n} (6-x)^{6n} (x-5)^{14n}}{x^{7n+1} (10-x)^{7n+1}} dx \cdot 2^{3n+2} 3^n 5$$

(этот интеграл позволяет получить оценку для показателя иррациональности числа $\log(3/2)$ вида $\mu(\log(3/2)) \leq 3.3317$);

$$I = \int_7^8 \frac{(x-6)^{8n} (8-x)^{8n} (x-7)^{18n}}{x^{9n+1} (14-x)^{9n+1}} dx \cdot 2^{4n+2} 3^n 7,$$

дающий оценку для показателя иррациональности числа $\log(4/3)$ вида $\mu(\log(4/3)) \leq 3.1105$.

3. Доказательство теоремы 2. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1. При этом используется следующий интеграл:

$$I = \int_4^5 \frac{(x-3)^{a_1} (5-x)^{a_1} (x-4)^{a_2}}{x^{a_3+1} (8-x)^{a_3+1}} dx. \quad (8)$$

Здесь искомая оценка будет наилучшей при $a_2 = 3a_3$, когда в знаменателе линейной формы отсутствует степень с основанием 2, влияющая на асимптотику интеграла. В этом случае интеграл (8) не приводится к интегралу (1) с целыми параметрами.

В случае

$$I = \int_4^5 \frac{(x-3)^{2n} (5-x)^{2n} (x-4)^{6n}}{x^{2n+1} (8-x)^{2n+1}} dx \cdot 2^3$$

имеем оценку $\mu(\log(5/3)) \leq 7.214$, так как $\delta = -\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log(q_{6n} I) = 2.8334$, $\tau = 17.6060$.

Более сложный вариант

$$I = \int_4^5 \frac{(x-3)^{36n}(5-x)^{36n}(x-4)^{114n}}{x^{38n+1}(8-x)^{38n+1}} dx \cdot 2^3 3^{2n} 5^{2n}$$

дает $\mu(\log(5/3)) \leq 7.038$. Здесь $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log B_n = 7.4640$, $\delta = -\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \times \log(B_n^{-1} q_{114n} I) = 53.9854$, $\tau = 325.9818$.

Возможно, что последняя приведенная оценка для показателя иррациональности числа $\log(5/3)$ не является окончательной, и дальнейшее увеличение параметров даст более точный результат.

4. Доказательство теоремы 3. Для доказательства теоремы рассмотрим интеграл

$$I = \int_{2\sqrt{2}}^3 \frac{(x-2\sqrt{2})^{24n}(6-x-2\sqrt{2})^{24n}(3-x)^{18n}}{(x-2)^{22n+1}(4-x)^{22n+1}} dx \cdot 2^{-(4n-2)}. \quad (9)$$

Пусть K – кольцо чисел вида $a\sqrt{2} + b$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Сформулируем лемму, позволяющую получить представление интеграла (9) в виде линейной формы от 1 и $\log 2$ с коэффициентами из K .

ЛЕММА 5. *Для интеграла (9) справедливо представление вида*

$$q_{22n} I = (\lambda_1 \sqrt{2} + \lambda_2) \log 2 + \lambda_3 \sqrt{2} + \lambda_4,$$

где все $\lambda_i \in \mathbb{Z}$.

Доказательство леммы 5 проводится аналогично доказательству лемм 1, 2 работы [2].

С помощью следующей леммы уточним знаменатель q_{22n} линейной формы, построенной в лемме 5, т.е. завершим построение линейной формы (2) для $\theta = \log 2$, $d = 2$.

ЛЕММА 6. *Пусть*

$$\frac{(9n)!(22n)!(22n)!}{(11n)!(18n)!(24n)!} = \frac{A_n}{B_n}, \quad A_n, B_n \in \mathbb{N}, \quad (A_n, B_n) = 1.$$

Тогда

$$L_n = q_{24n} B_n^{-1} I \equiv ((\Lambda_1(n)\sqrt{2} + \Lambda_2(n)) \log 2 + \Lambda_3(n)\sqrt{2} + \Lambda_4(n)), \quad (10)$$

где все $\Lambda_i(n) \in \mathbb{Z}$.

Доказательство леммы 6 проводится подобно доказательству леммы 4.

Таким образом, доказательство теоремы сводится к применению леммы 2 для линейной формы (10), т.е. к вычислению для нее γ_3 , γ_1 и γ_2 .

Вычисление γ_3 и γ_1 аналогично вычислению δ и τ в п. 2. В данном случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log B_n = \left(\psi\left(\frac{1}{22}\right) - \psi\left(\frac{1}{24}\right) \right) + \dots + \left(\psi\left(\frac{21}{22}\right) - \psi\left(\frac{17}{18}\right) \right) = 5.3860,$$

$$\gamma_3 = 119.6577, \quad \gamma_1 = 36.6080.$$

Более подробно остановимся на вычислении γ_2 .

С помощью замены $x = 3 - (3 - 2\sqrt{2})\sqrt{t}$ приведем интеграл (9) к гипергеометрическому типу:

$$I = (3 - 2\sqrt{2})^{66n+1} 2^{-(4n-1)} \int_0^1 \frac{t^{9n-0.5}(1-t)^{24n}}{(1 - (3 - 2\sqrt{2})^2 t)^{22n+1}} dt. \quad (11)$$

Пусть далее $(3 - 2\sqrt{2})^2 = z$. С помощью формулы

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+k)}{\Gamma(c)k!} x^k$$

и стандартной схемы разложения в сумму простейших дробей имеем последовательно

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{t^{9n-0.5}(1-t)^{24n}}{(1-zt)^{22n+1}} dt \\ &= \sum_{s \geq 0} \frac{(s+1) \cdots (s+22n)}{(22n)!} z^s \frac{(24n)!}{(s+9n+0.5) \cdots (s+33n+0.5)} \\ &= \sum_{\substack{s=s_1-22n \\ s_1 \geq 0}} \frac{(s_1-22n+1) \cdots s_1}{(22n)!} z^{s_1-22n} \frac{(24n)!}{(s_1-13n+0.5) \cdots (s_1+11n+0.5)} \\ &= \frac{(24n)!}{(22n)!} \sum_{s_1 \geq 0} \sum_{\chi=1}^{13n} \Omega_{\chi} \frac{z^{s_1-22n}}{(s_1-\chi+0.5)} + \frac{(24n)!}{(22n)!} \sum_{s_1 \geq 0} \sum_{k=0}^{11n} \tilde{\Omega}_k \frac{z^{s_1-22n}}{(s_1+k+0.5)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{\chi} &= \frac{(-1)^{9n} 0.5 \cdots (22n-\chi-0.5) 0.5 \cdots (\chi-0.5)}{(13n-\chi)!(11n+\chi)!}, \\ \tilde{\Omega}_k &= \frac{(-1)^{9n-k} (k+0.5) \cdots (k+22n-0.5)}{(k+13n)!(11n-k)!}. \end{aligned}$$

Пусть $\varphi(z) = \sum_{j \geq 0} z^j / (j+0.5)$; тогда

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \log \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} \quad \text{и} \quad \varphi((3-2\sqrt{2})^2) = \frac{1}{2(3-2\sqrt{2})} \log 2.$$

Имеем для рядов из (12)

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{s_1 \geq 0} \frac{z^{s_1-\chi}}{s_1-\chi+0.5} = - \sum_{j=1}^{\chi} \frac{z^{-j}}{j-0.5} + \varphi(z); \\ 2) \quad & \sum_{s_1 \geq 0} \frac{z^{s_1+k}}{s_1+k+0.5} = \varphi(z) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{z^j}{j+0.5}. \end{aligned}$$

Окончательно из (10), (11) и (12) получим

$$L_n = q_{24n} B_n^{-1} 2^{-(4n-1)} \frac{(24n)!}{(22n)!}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(\sum_{\chi=1}^{13n} \Omega_{\chi} \frac{(3-2\sqrt{2})^{2\chi+22n}}{2} + \sum_{k=0}^{11n} \tilde{\Omega}_k \frac{(3-2\sqrt{2})^{22n-2k}}{2} \right) \log 2 \right. \\
& - \sum_{\chi=1}^{13n} \Omega_{\chi} \sum_{j=1}^{\chi} \frac{(3-2\sqrt{2})^{2\chi-2j+22n+1}}{j-0.5} \\
& \left. - \sum_{k=0}^{11n} \tilde{\Omega}_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(3-2\sqrt{2})^{2j-2k+22n+1}}{j+0.5} \right]. \quad (13)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
T_1 &= q_{24n} B_n^{-1} 2^{-4n+2} \frac{(24n)!}{(22n)!} \max_{1 \leq \chi \leq 13n} |\Omega_{\chi}| (3+2\sqrt{2})^{2\chi+22n}, \\
T_2 &= q_{24n} B_n^{-1} 2^{-4n+2} \frac{(24n)!}{(22n)!} \max_{0 \leq k \leq 11n} |\tilde{\Omega}_k| (3+2\sqrt{2})^{22n-1}.
\end{aligned}$$

Тогда из (13) простыми оценками по модулю и заменой $(3-2\sqrt{2})$ на $(3+2\sqrt{2})$ имеем

$$\Lambda(n) = \max_{1 \leq i \leq 4} |\Lambda_i(n)| \leq 2(13n)^2 \max(T_1, T_2).$$

Вычисления показывают, что T_1 достигается при $\chi_0 = 12.4722n + o(n)$, а T_2 при $k_0 = 6.5300n + o(n)$, $T_1 > T_2$. Но тогда $\gamma_2 = 86.0775$.

Следовательно, в лемме 2 можно взять $\gamma_1 = 36.6080$, $\gamma_2 = 86.0775$, $\gamma_3 = 119.6577$, т.е.

$$\mu > \frac{2(36.6080 + 119.6577)}{119.6577 - 86.0775} = 9.307.$$

Таким образом, теорема доказана.

5. Доказательство теорем 4, 5. Следующий интеграл

$$I = \int_2^{\sqrt{5}} \frac{(\sqrt{5}-x)^{30n}(x+\sqrt{5}-4)^{30n}(x-2)^{18n}}{(x-1)^{26n+1}(3-x)^{26n+1}} dx \cdot 2^{-(8n-3)} \quad (14)$$

подобно доказательству теоремы 3 позволяет доказать теорему 4. Тем самым, может быть получена оценка для показателя иррациональности логарифма “золотого сечения”:

$$\mu \left(\log \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \leq 10.020.$$

Интеграл (14) является частным случаем при $k = 1$ интегралов более общего вида:

$$\bar{I}_{n,k} = \int_{2k}^{\sqrt{4k^2+1}} \frac{(\sqrt{4k^2+1}-x)^{a_1n}(x+\sqrt{4k^2+1}-4k)^{a_1n}(x-2k)^{a_2n}}{(x-2k+1)^{a_3n+1}(2k+1-x)^{a_3n+1}} dx \cdot 2^{2(a_3-a_1)n+3}, \quad (15)$$

$$I_{n,k} = \begin{cases} \bar{I}_{n,k}, & \text{если } a_1 \geq a_3, \\ \bar{I}_{n,k} \cdot k^{(a_3-a_1)n}, & \text{если } a_1 < a_3, \end{cases} \quad (16)$$

где $n, k \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2/2, a_3 \in \mathbb{N}$, $a_2/2 + a_1 - a_3 > 0$.

Интеграл (16) позволяет доказать теорему 5.

Для доказательства теоремы 5 рассмотрим подынтегральную функцию интеграла (15)

$$\bar{R}_{n,k}(x) = \frac{(\sqrt{4k^2+1}-x)^{a_1n}(x+\sqrt{4k^2+1}-4k)^{a_1n}(x-2k)^{a_2n}}{(x-2k+1)^{a_3n+1}(2k+1-x)^{a_3n+1}}.$$

Справедливо следующее свойство:

$$\bar{R}_{n,k}(x) = \bar{R}_{n,k}(4k-x).$$

Обозначим через K_k кольцо чисел вида $a\sqrt{4k^2+1}+b$, где $a, b \in \mathbb{Z}$.

Интеграл (16) позволяет построить систему линейных форм вида

$$k_{1,k} \cdot \log \frac{\sqrt{4k^2+1}-1}{2k} + k_{2,k},$$

где $k_{1,k}, k_{2,k} \in K_k$, обладающих “хорошими” арифметическими свойствами.

Аналогично рассуждениям из п. 2 и п. 4 можно доказать следующие леммы.

ЛЕММА 7. *Справедливо представление вида*

$$q_{Q_1n} I_{n,k} = (\lambda_{1,k}\sqrt{4k^2+1} + \lambda_{2,k}) \log \frac{\sqrt{4k^2+1}-1}{2k} + \lambda_{3,k}\sqrt{4k^2+1} + \lambda_{4,k},$$

где все $\lambda_{i,k} \in \mathbb{Z}$, $Q_1 = \max\{a_3, 2(a_1 - a_3) + a_2\}$.

ЛЕММА 8. *Пусть*

$$\frac{B_n}{A_n} = \frac{((a_1 - a_3 + a_2/2)n)!(a_2n)!(a_1n)!}{((a_2/2)n)!((2(a_1 - a_3) + a_2)n)!(a_3n)!}, \quad A_n, B_n \in \mathbb{N}, \quad (A_n, B_n) = 1,$$

$$L_{n,k} = q_{Qn} B_n^{-1} I_{n,k}$$

$$\equiv (\Lambda_{1,k}(n)\sqrt{4k^2+1} + \Lambda_{2,k}(n)) \log \frac{\sqrt{4k^2+1}-1}{2k} + \Lambda_{3,k}(n)\sqrt{4k^2+1} + \Lambda_{4,k}(n), \quad (17)$$

где $Q = \max\{Q_1, Q_2\}$, $Q_2 = \max\{a_1, a_2\}$. Тогда все $\Lambda_i(n) \in \mathbb{Z}$.

Следовательно, доказательство теоремы сводится к применению леммы 2 для линейной формы (17), т.е. к вычислению для нее γ_3 , γ_1 и γ_2 . Оно осуществляется подобно вычислениям из п. 4.

Данная теорема позволяет находить оценку снизу для приближения чисел вида

$$\log \frac{\sqrt{4k^2+1}-1}{2k}, \quad \text{где } k \in \mathbb{N},$$

числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{4k^2+1})$, а при $p_1 = 0$, $p_3 = 0$ дает оценку для показателя иррациональности

$$\mu \left(\log \frac{\sqrt{4k^2+1}-1}{2k} \right) \leq \mu_0.$$

Частный случай при $k = 1$, $a_1 = 30$, $a_2 = 18$, $a_3 = 26$ был рассмотрен выше.

При $k = 2$, $a_1 = 61$, $a_2 = 70$, $a_3 = 64$ получим оценку для показателя иррациональности числа $\log((\sqrt{17} - 1)/4)$: $\mu(\log((\sqrt{17} - 1)/4)) \leq 8.492$.

В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность своему научному руководителю В. Х. Салихову. Автор также выражает признательность Ю. В. Нестеренко и В. В. Зудилину за ценные рекомендации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. А. Рухадзе, “Оценка снизу приближения $\ln 2$ рациональными числами”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **6** (1987), 25–29.
- [2] В. Х. Салихов, “О мере иррациональности $\log 3$ ”, *Докл. РАН*, **417**:6 (2007), 1–3.
- [3] A. Heimonen, T. Matala-Aho, K. Väänänen, “On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function”, *Manuscripta Math.*, **81**:1 (1993), 183–202.
- [4] F. Amoroso, C. Viola, “Approximation measures for logarithms of algebraic numbers”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **30**:1 (2001), 225–249.
- [5] A. Heimonen, T. Matala-Aho, K. Väänänen, “An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **50**:2 (1994), 225–243.
- [6] M. Hata, “Irrationality measures of the values of hypergeometric functions”, *Acta Arith.*, **60**:4 (1992), 335–347.
- [7] В. В. Зудилин, “Эссе о мерах иррациональности π и других логарифмов”, *Чебышевский сб.*, **5**:2 (2004), 49–65.
- [8] M. Hata, “Legendre type polynomials and irrationality measures”, *J. Reine Angew. Math.*, **407**:1 (1990), 99–125.
- [9] В. Х. Салихов, Е. С. Сальникова, “Диофантовы приближения логарифма “золотого сечения”, *Вестн. БГТУ*, 2007, № 1, 111–119.
- [10] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Наука, М., 1973.

Е. С. Сальникова

Брянский государственный технический университет,
г. Брянск

E-mail: eksalnikova@rambler.ru

Поступило

23.05.2007