Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. О. Седова, О развитии прямого метода Ляпунова для функционально-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 6, 888–906

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4052>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 10:26:07

УДК 517.929.4

О развитии прямого метода Ляпунова для функционально-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием

Н. О. Седова

Предлагаются новые достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа с неограниченным (бесконечным) запаздыванием. Уравнение может быть нелинейным и неавтономным. Условия формулируются в терминах функций типа Разумихина, при этом функция используется в паре с функционалом, связанным с ней определенными соотношениями. В приведенных результатах за счет дополнительных ограничений на правую часть уравнения и использования техники предельных уравнений классические требования знакоопределенности функции и ее производной вдоль решения ослаблены до знакопостоянности.

Библиография: 29 названий.

Дифференциальные уравнения с запаздыванием описывают процессы, в которых скорость эволюции в каждый момент времени зависит не только от текущего состояния, но и от “предыстории” процесса, т.е. некоторых предыдущих состояний. Интерес к уравнениям с запаздыванием со стороны как фундаментальных, так и прикладных наук значительно возрос в последние десятилетия. Это объясняется постоянно расширяющейся сферой приложения таких уравнений в самых разных областях науки и техники: от физиологии и управления численностью популяций до разработки электронных схем и лазерной оптики. Проблемы устойчивости и стабилизации решений таких уравнений, безусловно, чрезвычайно важны с точки зрения приложений и занимают одно из центральных мест в исследованиях.

В настоящей работе рассматриваются неавтономные уравнения с запаздыванием, в которых неизвестная функция x зависит от одной переменной t , традиционно называемой временем. Если для некоторого $r > 0$ производная $\dot{x}(t)$ в области своего определения не зависит от значений $x(s)$ при $s < t - r$, то запаздывание называется *конечным*, иначе – *бесконечным* или *неограниченным*.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-00765, 08-01-97010-р-поволжье-а) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-6667.2006.1).

Для уравнений с неограниченным запаздыванием значительную роль в построении теории играет выбор подходящего фазового пространства, от которого существенно зависят даже результаты существования и единственности решений (см. обзор [1]). Наиболее удобным и широко используемым в настоящее время является разработанный в [2] аксиоматический подход к этой проблеме. Формализация определения фазового пространства позволила, с одной стороны, построить базовую теорию таких уравнений, а с другой стороны, охватить достаточно широкий класс конкретных пространств с подходящей структурой (см., например, [3]–[5]). В частности, аксиоматический подход позволяет определить условия существования предельных уравнений со свойствами, аналогичными полученным для обыкновенных [6] и функционально-дифференциальных с конечным запаздыванием [7], [8] уравнений. Предельные уравнения широко используются при изучении качественного поведения решений исходного уравнения [3], [5], [7]–[15].

Основным методом исследования устойчивости решений в нелинейном случае является, как известно, прямой метод Ляпунова. Однако в общем случае не существует эффективных алгоритмов построения функции (или функционала) с заданными свойствами для конкретной задачи, поэтому использование классических теорем Ляпунова на практике может быть сопряжено с немалыми трудностями. В связи с этим значительные усилия исследователей направляются на получение достаточных условий устойчивости и асимптотической устойчивости, справедливых при менее ограничительных предположениях о вспомогательной функции или функционале. В рамках этого направления было получено множество результатов (см., например, [7], [10], [16]–[18]), развивающие классические теоремы Красовского об устойчивости в терминах функционалов [19].

Другое направление прямого метода Ляпунова для уравнений с запаздыванием – метод функций Разумихина [20]. Некоторые результаты по ослаблению классических условий этого метода для случая конечного запаздывания можно найти, например, в [8], [13], [15], [21]. Случай бесконечного запаздывания изучен меньше (например, [11], [22]). В настоящей работе предлагается исследовать равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения неавтономного уравнения с бесконечным запаздыванием, используя знакопостоянные функции со знакопостоянной производной. Такое ослабление классических условий знакоопределенности возможно за счет дополнительных предположений об уравнении, позволяющих построить так называемые предельные уравнения и использовать их свойства при определении достаточных условий устойчивости.

В п. 1 приводятся основные определения и вспомогательные результаты. Пункт 2 посвящен определениям устойчивости и построению предельных уравнений, в п. 3 при сделанных предположениях доказывается теорема о равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения. Некоторые следствия из доказанной теоремы обсуждаются в п. 4, иллюстрирующие примеры приведены в п. 5. Пункт 6 – заключение, посвященное сравнению полученных результатов с известными. Доказанные теоремы развивают и обобщают результаты работ [8], [11], [15], [22]–[26].

1. Основные определения и вспомогательные утверждения. Пусть $\mathbb{R}^n$ – действительное n -мерное пространство с нормой $|\cdot|$, B – действительное векторное пространство либо

- (i) непрерывных функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в $\mathbb{R}^n$, и $\varphi = \psi$ в B , если $\varphi(s) = \psi(s)$ для всех $s \in (-\infty, 0]$, либо
- (ii) измеримых функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в $\mathbb{R}^n$, и $\varphi = \psi$ в B , если $\varphi(s) = \psi(s)$ для почти всех $s \in (-\infty, 0]$ и $\varphi(0) = \psi(0)$

и в пространстве B определена норма $|\cdot|_B$ такая, что пространство $(B, |\cdot|_B)$ является банаховым.

Для измеримой функции $x: (-\infty, A] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 \leq A \leq +\infty$, определим функцию $x_t: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ по формуле $x_t(s) = x(t+s)$, $s \leq 0$, для каждого $t \leq A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [5], [22]. Пространство B назовем *допустимым*, если существуют постоянные $K, J > 0$ и непрерывная функция $M: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ такие, что выполняются следующие условия. Пусть $0 \leq a < A \leq \infty$. Если $x: (-\infty, A) \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна на $[a, A)$ и $x_a \in B$, то для всех $t \in [a, A)$

(B1) $x_t \in B$ и x_t непрерывно по t относительно $|\cdot|_B$;

(B2) $|x_t|_B \leq K \max_{a \leq s \leq t} |x(s)| + M(t-a)|x_a|_B$;

(B3) $|\varphi(0)| \leq J|\varphi|_B$ для всех $\varphi \in B$;

(B4) $M(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Простейшим примером допустимого пространства является определенное для любого $r > 0$ пространство $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ с нормой $|\varphi|_{C([-r, 0])} = \sup_{-r \leq s \leq 0} |\varphi(s)|$. Рассмотрим еще два важных класса допустимых пространств (см., например, [22]).

1. Пусть

$g \in C((-\infty, 0], [1, \infty))$ – невозрастающая функция, $g(0) = 1$, (g1)

$$\lim_{u \rightarrow 0-} \frac{g(s+u)}{g(s)} = 1 \quad \text{равномерно на } (-\infty, 0], \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{s \leq 0} \frac{g(s)}{g(s-T)} = 0. \quad (\text{g2})$$

Обозначим через C_g пространство непрерывных функций φ , отображающих $(-\infty, 0]$ в $\mathbb{R}^n$, таких, что $\sup_{s \leq 0} |\varphi(s)|/g(s) < \infty$. Тогда пространство C_g с нормой $|\varphi|_g = |\varphi|_{C_g} = \sup_{s \leq 0} |\varphi(s)|/g(s)$ – банахово пространство. Рассмотрим подпространство

$$UC_g = \left\{ \varphi \in C_g \mid \frac{\varphi}{g} \text{ равномерно непрерывна на } (-\infty, 0] \right\}.$$

Тогда UC_g допустимо [22]. Частным случаем пространства C_g является часто используемое в исследованиях допустимое пространство C_γ с $g(s) = e^{-\gamma s}$ для $\gamma > 0$. Заметим, что при $\gamma = 0$ получаем пространство C_0 ограниченных непрерывных функций с супремум-нормой, которое допустимым не является.

2. Пусть $\gamma \geq 1$ – постоянная, а $k: (-\infty, 0] \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая функция такая, что $\int_{-\infty}^0 k(s) ds < \infty$, $\sup_{s \leq 0} k(s-T)/k(s) \leq L(T)$ для некоторой непрерывной функции $L: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $\lim_{T \rightarrow \infty} L(T) = 0$. Пусть M_0 – пространство измеримых функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в $\mathbb{R}^n$, и φ эквивалентна ψ в M_0 , если $\varphi(s) = \psi(s)$ для почти всех $s \in (-\infty, 0]$ и $\varphi(0) = \psi(0)$. Тогда пространства

$$M_{k,\gamma} = \left\{ \varphi \in M_0 \mid \int_{-\infty}^0 k(s) |\varphi(s)|^\gamma ds < \infty \right\},$$

$$M_{k,\gamma}^T = \{ \varphi \in M_{k,\gamma} \mid \varphi \text{ непрерывна на } [-r, 0] \}, \quad r > 0,$$

с нормами

$$\|\varphi\|_{M_{k,\gamma}} = \max \left\{ |\varphi(0)|, \left[\int_{-\infty}^0 k(s) |\varphi(s)|^\gamma ds \right]^{1/\gamma} \right\},$$

$$\|\varphi\|_{M_{k,\gamma}^r} = \max \left\{ \max_{-r \leq s \leq 0} |\varphi(s)|, \left[\int_{-\infty}^0 k(s) |\varphi(s)|^\gamma ds \right]^{1/\gamma} \right\}$$

являются допустимыми [22].

Пусть B – допустимое сепарабельное пространство. Для произвольного $a > 0$ определим множества

$$B_a = \{\varphi \in B \mid |\varphi|_B < a\}, \quad \overline{B}_a = \{\varphi \in B \mid |\varphi|_B \leq a\}.$$

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = X(t, x_t), \quad (1)$$

где $X \in C(\mathbb{R}^+ \times B_H, \mathbb{R}^n)$ для некоторого $0 < H \leq \infty$ и для любого $h \in (0, H)$ существует $m = m(h)$ такое, что $|X(t, \varphi)| \leq m(h)$ для всех $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \overline{B}_h$. Тогда для каждой начальной точки $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B_H$ существует непродолжаемое решение $x(t; \alpha, \varphi)$ уравнения (1), определенное для $t \in [\alpha, \beta]$ для некоторого $\beta > \alpha$, т.е. непрерывное и удовлетворяющее уравнению (1) на $[\alpha, \beta]$ и такое, что $x_\alpha = \varphi$. Кроме того, имеет место непрерывная зависимость решения от начальной точки и для любого $\varepsilon \in (0, H)$ и $x(t)$ – непродолжаемого решения (1) на $[\alpha, \beta]$ такого, что $x_\alpha \in B_\varepsilon$, либо $\beta = +\infty$, либо $|x_{t_1}|_B = \varepsilon$ для некоторого $t_1 \in (\alpha, \beta)$ [4], [22].

2. Определения устойчивости и предельные уравнения. Предположим, что уравнение (1) имеет нулевое решение, которое мы и будем исследовать на устойчивость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Нулевое решение уравнения (1) *устойчиво* в $\mathbb{R}^n$ (в B), если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}^+$ существует $\delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ такое, что

$$|x(t; \alpha, \varphi)| < \varepsilon \quad (|x_t(\alpha, \varphi)|_B < \varepsilon) \quad \text{для всех } t \geq \alpha \quad \text{при } |\varphi|_B < \delta.$$

Если при этом число δ не зависит от α , то нулевое решение *равномерно устойчиво*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Нулевое решение уравнения (1) *равномерно асимптотически устойчиво* в $\mathbb{R}^n$ (в B), если оно равномерно устойчиво и для некоторого $\Delta > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in B_\Delta$, $t \geq \alpha + T$ выполняется

$$|x(t; \alpha, \varphi)| < \varepsilon \quad (|x_t(\alpha, \varphi)|_B < \varepsilon).$$

Если в определениях 2, 3 дополнительно $\varphi \in \Lambda$, где $\Lambda \subset B_H$, то получим определение *равномерной асимптотической устойчивости относительно множества Λ* .

Если запаздывание ограничено, то определения устойчивости по отношению к нормам в $\mathbb{R}^n$ и в фазовом пространстве, очевидно, эквивалентны. В случае неограниченного запаздывания это в общем случае не так. Например, если в качестве фазового пространства мы выберем пространство C_0 , то ненулевое решение никогда не стремится к нулю по отношению к норме этого пространства, т.е.

$$|x_t|_{C_0} = \sup_{s \leq 0} |x(t+s)| \not\rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

В то же время, если $|x(t)| \rightarrow 0$, то

$$\sup_{s \leq 0} |x(t+s)|e^{\gamma s} \rightarrow 0 \quad \text{для любого } \gamma > 0.$$

Справедлив следующий результат [4].

ЛЕММА 1. *Для допустимого пространства B определения (равномерной) (асимптотической) устойчивости в B и в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.*

Таким образом, в дальнейшем мы можем говорить просто об (асимптотической) устойчивости, не уточняя, по отношению к какой норме она понимается.

Допустим теперь, что имеет место следующее предположение.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Функционал $X(t, \varphi)$ равномерно непрерывен на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times K$, где $K \subset B_H$ – компакт, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, K)$ такое, что для всех $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in \mathbb{R}^+ \times K$ из неравенств $|t_2 - t_1| < \delta$, $|\varphi_2 - \varphi_1|_B < \delta$ следует*

$$|X(t_2, \varphi_2) - X(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon.$$

Пусть $\mathcal{F}_X = C(\mathbb{R}^+ \times B_H, \mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных функционалов, определенных на $\mathbb{R}^+ \times B_H$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, и $X^k \rightarrow X$ в $\mathcal{F}_X$, если $X^k(t, \varphi) \rightarrow X(t, \varphi)$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно на каждом компактном подмножестве $\mathbb{R}^+ \times B_H$. Для $X \in \mathcal{F}_X$ определим семейство сдвигов

$$T(X) = \{X_\tau(t, \varphi) = X(\tau + t, \varphi), \tau \in \mathbb{R}^+\}$$

и обозначим $H(X)$ замыкание множества $T(X)$ в пространстве $\mathcal{F}_X$. В силу предположения 1 множество $H(X)$ компактно в пространстве $\mathcal{F}_X$ [5]. Обозначим

$$\Omega(X) = \{X^* \in \mathcal{F}_X \mid \exists \{t_n\}, t_n \rightarrow \infty: X_{t_n} \rightarrow X^* \text{ в } \mathcal{F}_X\}.$$

Очевидно, $H(X) = T(X) \cup \Omega(X)$.

Уравнению (1) сопоставим семейство предельных уравнений [5], [14]

$$\dot{x}(t) = X^*(t, x_t), \quad \text{где } X^*(t, \varphi) \in \Omega(X).$$

3. Исследование равномерной асимптотической устойчивости. Пусть $V = V(t, x)$, $V \in C^1(\mathbb{R} \times G_H, \mathbb{R}^+)$ есть функция Ляпунова, где $G_H = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < H\}$. Ее производная в силу уравнения (1) есть функционал

$$V': \mathbb{R}^+ \times B_H \rightarrow \mathbb{R}: \quad V'(t, \varphi) = \frac{\partial V(t, \varphi(0))}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V(t, \varphi(0))}{\partial x_i} \right) X_i(t, \varphi).$$

Определим также функционал $W \in C(\mathbb{R}^+ \times B_H, \mathbb{R}^+)$. Используем следующее определение [11], [22].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пара (V, W) называется парой Ляпунова–Разумихина, если $V(t, x) \geq 0$, $V(t, 0) = 0$ и для всех $\rho > 0$, $t \geq \rho$ и $\varphi \in B_H$ такой, что $\varphi_{-\rho} \in B_H$ и φ непрерывна на $[-\rho, 0]$, выполняется

$$V(t, \varphi(0)) \leq W(t, \varphi) \leq \max \left\{ \max_{-\rho \leq s \leq 0} V(t+s, \varphi(s)), W(t-\rho, \varphi_{-\rho}) \right\}, \quad (\text{LR1})$$

$$\text{если } 0 < V(t, \varphi(0)) = W(t, \varphi), \quad \text{то } V'(t, \varphi) \leq 0. \quad (\text{LR2})$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Функция $V(t, x)$ равномерно непрерывна и ограничена на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times \overline{G}_r$, $\overline{G}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r < H\}$, а функционалы $W(t, \varphi)$ и $U(t, \varphi) = V'(t, \varphi)$ равномерно непрерывны на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times K$, $K \subset B_H$ – компакт.

В данных предположениях семейство сдвигов

$$\{V_\tau(t, x) = V(\tau + t, x) \mid \tau \in \mathbb{R}^+\}$$

предкомпактно в пространстве $C(\mathbb{R}^+ \times G_H, \mathbb{R}^+)$ с компактно-открытой топологией, а семейства

$$\{U_\tau(t, \varphi) = U(\tau + t, \varphi) \mid \tau \in \mathbb{R}^+\} \quad \text{и} \quad \{W_\tau(t, \varphi) = W(\tau + t, \varphi) \mid \tau \in \mathbb{R}^+\}$$

предкомпактны в пространствах $C(\mathbb{R}^+ \times B_H, \mathbb{R})$ и $C(\mathbb{R}^+ \times B_H, \mathbb{R}^+)$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функция $V^*: \mathbb{R} \times G_H \rightarrow \mathbb{R}$ называется *предельной* к функции V , если существует последовательность $\{t_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$, такая, что последовательность $\{V_{t_n}(t, x) = V(t_n + t, x)\}$ сходится равномерно на множествах $[0, T] \times \overline{G}_r$ к функции V^* . Функционалы, предельные к $W(t, \varphi)$ и $U(t, \varphi)$, определяются по аналогии с $X^*(t, \varphi)$.

Функционалы X^* , V^* , W^* , U^* образуют *предельную совокупность*, если они являются предельными для одной и той же последовательности $t_n \rightarrow +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В приведенных построениях существенно предположение сепарабельности фазового пространства. Если B не является сепарабельным, то семейства сдвигов функционалов X , W и U предкомпактны в пространстве $C(\mathbb{R}^+ \times K, \mathbb{R}^n)$ для каждого компакта $K \subset B_H$ и предельные функционалы определяются последовательностью $t_k \rightarrow +\infty$ и компактом K . Поскольку положительная орбита ограниченного решения уравнения (1) предкомпактна в B_H [3], [11], [22], все приведенные результаты справедливы для несепарабельного пространства B с очевидными изменениями в формулировках и доказательствах.

Далее считаем, что для (V, W) выполняется следующее предположение [11], [22]:

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Для любого $c > 0$ существует $T = T(c) > 0$ такое, что для каждой равномерно непрерывной функции $\varphi \in B_H$ и каждого числа $t \in \mathbb{R}$ таких, что

$$\sup_{s \leq 0} V^*(t + s, \varphi(s)) \leq W^*(t, \varphi) = c,$$

выполняется условие

$$W^*(t, \varphi) = \max_{-T \leq s \leq 0} V^*(t + s, \varphi(s)).$$

Для каждой предельной совокупности, определяемой последовательностью $t_k \rightarrow +\infty$, и каждого числа $c \in \mathbb{R}^+$ определим множества

$$M(t, c, V^*) = \left\{ \varphi \in B_H \mid \max_{-T(c) \leq s \leq 0} V^*(t + s, \varphi(s)) = V^*(t, \varphi(0)) = c \right\},$$

$$L(t, U^*) = \{ \varphi \in B_H \mid U^*(t, \varphi) = 0 \},$$

$$N(V^*) = \{ \varphi \in B_H \mid V^*(s, \varphi(s)) = 0, s \leq 0 \},$$

а также множество $K(\{t_k\}, c) \subset B_H$, состоящее из функций $x_t^* \in B$, $t \in \mathbb{R}^+$, где x_t^* – решения соответствующего уравнения $\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)$, обладающие свойством: для любого $t \in \mathbb{R}$ найдется $\tau \in [t - T(c), t]$ такое, что $x_\tau^* \in M(\tau, c, V^*) \cap L(\tau, V^*)$.

Заметим, что $0 \in K(\{t_k\}, 0)$ для любой последовательности $t_k \rightarrow +\infty$. Кроме того, из [11] следует, что в сделанных предположениях положительное предельное множество любого ограниченного решения уравнения (1) содержится в объединении множеств $K(\{t_k\}, c)$ по всем последовательностям $t_k \rightarrow +\infty$ для некоторого $c \in \mathbb{R}^+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Нулевое решение называется *асимптотически устойчивым равномерно относительно семейства* (X^*, V^*) , если существует $\Delta > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых предельных V^* и X^* , соответствующих одной и той же последовательности $t_k \rightarrow +\infty$, решение $x^*(t; 0, \varphi)$ уравнения $\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)$ для всех $t \geq 0$ и $\varphi \in B_\delta \cap N(V^*)$ удовлетворяет неравенству $|x_t^*(0, \varphi)|_B < \varepsilon$ и $|x_t^*(0, \varphi)|_B \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, если $\varphi \in B_\Delta \cap N(V^*)$.

Заметим, что при $V \equiv 0$ получаем $N(V^*) = N(V) = B_H$ и определение 6 является обобщением определения равномерной асимптотической устойчивости в $\Omega(X)$ из [5].

Используя введенные определения и предположения, докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что правая часть уравнения (1) удовлетворяет предположению 1 и существует пара Ляпунова–Разумихина (V, W) такая, что*

- 1) *выполняются предположения 2, 3, $W(t, \varphi) \leq b(|\varphi|_B)$, $b \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ – строго возрастающая функция, $b(0) = 0$;*
- 2) *для любого достаточно малого $c > 0$ и любой последовательности $t_k \rightarrow +\infty$ множество $K(\{t_k\}, c) = \emptyset$;*
- 3) *нулевое решение асимптотически устойчиво равномерно относительно семейства (X^*, V^*) .*

Тогда нулевое решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем равномерную устойчивость. Предположим противное, тогда для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, H)$ можно построить последовательности $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$, $\{\varphi_n\}$, $|\varphi_n|_B \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\{T_n\}$, $T_n > 0$, такие, что для решений $x(t; \alpha_n, \varphi_n)$ уравнения (1) справедливо равенство

$$|x_{\alpha_n + T_n}(\alpha_n, \varphi_n)|_B = \varepsilon_0. \quad (t1)$$

В силу непрерывной зависимости решения от начальных данных последовательность T_n неограничена и можно считать, что $T_n \rightarrow +\infty$. Не нарушая общности, можно также считать, что $|x_t(\alpha_n, \varphi_n)|_B < \varepsilon_0$ для всех $t \in [\alpha_n, \alpha_n + T_n)$.

По условию 1) теоремы существуют числа $\Delta_n \rightarrow 0$ такие, что $W(\alpha_n, \varphi_n) \leq b(|\varphi_n|_B) < \Delta_n$, и из свойств производной V' получаем, что для каждого n функционал W не возрастает вдоль решения $x(t; \alpha_n, \varphi_n)$ и

$$0 \leq V(t, x(t; \alpha_n, \varphi_n)) \leq W(t, x_t(\alpha_n, \varphi_n)) < \Delta_n \quad \text{при } t > \alpha_n \quad (t2)$$

(подробное доказательство см. в [11; теорема 3]).

Пусть теперь $\delta = \delta(\varepsilon_0/2) > 0$ и $\Delta > 0$ – числа из определения 6. Можно считать, что $\varepsilon_0 < \Delta$. Зафиксируем $\delta_0 \in (0, \delta)$ и построим последовательность $\{\tau_n\}$, $\tau_n \in (0, T_n)$, такую, что

$$|x_{\alpha_n + \tau_n}(\alpha_n, \varphi_n)|_B = \delta_0, \quad (\text{t3})$$

$$\delta_0 \leq |x_t(\alpha_n, \varphi_n)|_B \leq \varepsilon_0 \quad \text{для всех } t \in [\alpha_n + \tau_n, \alpha_n + T_n]. \quad (\text{t4})$$

Из определения допустимого пространства следует, что $|x_t(\alpha_n, \varphi_n)|_B \leq r$ при $t \in [\alpha_n, \alpha_n + T_n + A]$ для некоторого $r \in (\varepsilon_0, H)$ и достаточно малого $A > 0$. Тогда $|x(t; \alpha_n, \varphi_n)| \leq Jr$ для $t \in [\alpha_n, \alpha_n + T_n + A]$ (см. условие (B3)), кроме того, последовательность $\{x(t; \alpha_n, \varphi_n)\}$ равностепенно непрерывна на этом отрезке. Действительно, $|X(s, x_s(\alpha_n, \varphi_n))| < m(r) < \infty$ для $s \in [\alpha_n, \alpha_n + T_n + A]$, а значит, для любых t_1, t_2 из этого интервала

$$|x(t_1; \alpha_n, \varphi_n) - x(t_2; \alpha_n, \varphi_n)| \leq m(r)|t_1 - t_2|.$$

Положим $\beta_n = (T_n - \tau_n)/2$. Предположим, что $\beta_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, тогда для некоторой подпоследовательности, которую для удобства снова обозначим $\{\beta_n\}$, имеем

$$\begin{aligned} X(\alpha_n + \tau_n + \beta_n + t, \varphi) &\rightarrow X^*(t, \varphi), & V(\alpha_n + \tau_n + \beta_n + t, x) &\rightarrow V^*(t, x), \\ U(\alpha_n + \tau_n + \beta_n + t, \varphi) &\rightarrow U^*(t, \varphi) \end{aligned}$$

в соответствующих функциональных пространствах. По доказанному выше последовательность

$$\{x^n(t) = x(\alpha_n + \tau_n + \beta_n + t; \alpha_n, \varphi_n)\}$$

равномерно ограничена и равностепенно непрерывна при

$$t \in \left[-\frac{T_n + \tau_n}{2}, \frac{T_n - \tau_n}{2} + A \right],$$

а значит, при $t \in [-N, N]$ для произвольно заданного $N > 0$ при достаточно большом n . Используя теорему Арцела и диагональный процесс, получим, что некоторая подпоследовательность $\{x^{n_k}(t)\}$ сходится к непрерывной функции $x^*(t)$ равномерно на компактных интервалах из $\mathbb{R}$. Применяя лемму 2.1 из [5], получаем, что $x^*(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0^* \in B$ и $x_t^{n_k} \rightarrow x_t^*$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно на $[0, T]$ для любого $T > 0$. Тогда в силу леммы 2.2 из [5] $x^*(t)$ есть решение уравнения $\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)$, определенное на $[0, \infty)$. Из неравенств (t4) следует, что

$$\delta_0 \leq |x_{t + \alpha_{n_k} + \tau_{n_k} + \beta_{n_k}}(\alpha_{n_k}, \varphi_{n_k})|_B \leq \varepsilon_0 \quad \text{для } t \in \left[0, \frac{T_{n_k} - \tau_{n_k}}{2} \right].$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим $\delta_0 \leq |x_t^*|_B \leq \varepsilon_0$ для всех $t \geq 0$, а из соотношения (t2) следует $x_0^* \in N(V^*)$. По предположению $\varepsilon_0 < \Delta$, поэтому должно выполняться $|x_t^*|_B \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Получили противоречие, следовательно, $\beta_n \not\rightarrow \infty$. Выбирая, если нужно, подпоследовательность, можно считать $\beta_n \rightarrow \beta < \infty$. Тогда последовательность $\{\tau_n\}$ неограничена, и (возможно, для некоторой подпоследовательности) $X(\alpha_n + \tau_n + t, \varphi) \rightarrow X^*(t, \varphi)$ в пространстве $\mathcal{F}_X$ и $V(\alpha_n + \tau_n + t, x) \rightarrow$

$V^*(t, x)$. Последовательность $\{x^n(t)\} = \{x(\alpha_n + \tau_n + t; \alpha_n, \varphi_n)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на $[-\tau_n, T_n - \tau_n + A]$, а значит, на $[-N, 2\beta + A/2]$ для произвольного фиксированного $N > 0$ и достаточно больших n . Рассуждая, как и выше, получаем, что некоторая подпоследовательность последовательности $\{x_{\alpha_n + \tau_n + t}(\alpha_n, \varphi_n) = x_t^n\}$ (для простоты считаем, что сама последовательность) сходится к x_t^* при $n \rightarrow \infty$ равномерно на $[0, 2\beta + A/2]$, где $x^*(t)$ есть решение уравнения $\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)$, определенное на $[0, 2\beta + A/2]$. Из соотношений (t2) и (t3) получаем $x_0^* \in N(V^*)$ и $\delta_0 = |x_0^*|_B$, отсюда в силу (t1) и определения числа δ_0 имеем $\varepsilon_0 = |x_{2\beta}^*|_B < \varepsilon_0/2$. Полученное противоречие завершает доказательство равномерной устойчивости.

Докажем теперь равномерное притяжение. Пусть $\Delta > 0$ – число из определения 6, $\delta = \delta(\Delta/2)$ – число из определения равномерной устойчивости нулевого решения уравнения (1) для фиксированного Δ . Из условия 2) теоремы получаем, что

$$W(t, x_t(\alpha, \varphi)) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad V(t, x(t; \alpha, \varphi)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty$$

(см. доказательство [11; теорема 4]). Покажем, что последняя сходимость равномерна по $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B_\delta$.

Выведем сначала вспомогательное утверждение. Пусть (X^*, V^*, W^*, U^*) – предельная совокупность, определяемая некоторой последовательностью $t_k \rightarrow +\infty$, $x(t; t_k + \alpha, \varphi)$ – решения уравнения (1) при $\varphi \in B_\delta$. Тогда, применяя леммы 2.1 и 2.2 из [5], получаем, что последовательность $x^{(k)}(t) = x(t + t_k; t_k + \alpha, \varphi)$ сходится к решению $x^*(t; \alpha, \varphi) \in G_\Delta$ системы $\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)$ равномерно на $[0, T]$ для произвольного $T > 0$. Ясно, что предельная к (X^*, V^*, W^*, U^*) совокупность (X^0, V^0, W^0, U^0) является предельной и к (X, V, W, U) . Поэтому согласно условию теоремы соответствующее множество $K(\{t_k\}, c)$ пусто при достаточно малых $c > 0$. При этом функционал $W^*(t, \varphi)$ не возрастает вдоль решений системы $\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)$ и $V^*(t, x) \geq 0$. Действительно, последнее неравенство очевидно, так как $0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} V(t + t_k, x) = V^*(t, x)$. Если же предположить, что для некоторого решения $x^*(t; \alpha, \varphi)$ системы $\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)$, некоторого $\beta \geq \alpha$ и $\delta > 0$ выполняется неравенство $W^*(\beta + \delta, x_{\beta + \delta}^*(\alpha, \varphi)) > W^*(\beta, x_\beta^*(\alpha, \varphi))$, то

$$W(t_k + \beta + \delta, x_{t_k + \beta + \delta}(t_k + \alpha, \varphi)) > W(t_k + \beta, x_{t_k + \beta}(t_k + \alpha, \varphi))$$

для всех достаточно больших k . С другой стороны, $W(t_k + t, x_t^{(k)})$ не возрастает для каждого фиксированного k . Полученное противоречие показывает, что $W^*(t, \varphi)$ не возрастает вдоль решений уравнения $\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)$.

Таким образом, повторяя рассуждения доказательства [11; теорема 4] для уравнения $\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)$, его решения $x^*(t; \alpha, \varphi) \in G_\Delta$ и пары (V^*, W^*) , получаем

$$W^*(t, x_t^*(\alpha, \varphi)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty.$$

Предположим теперь, что сходимость $V(t, x(t; \alpha, \varphi)) \rightarrow 0$ не равномерна по $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B_\delta$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для последовательности $T_k \rightarrow +\infty$ существует последовательность $(\alpha_k, \varphi^{(k)}) \in \mathbb{R}^+ \times B_\delta$, для которой

$$V(\alpha_k + T_k, x(\alpha_k + T_k; \alpha_k, \varphi^{(k)})) \geq \varepsilon_0.$$

В силу (LR1) это означает, что $W(\alpha_k + T_k, x_{\alpha_k + T_k}) \geq \varepsilon_0$, и, поскольку W не возрастает вдоль решений уравнения (1),

$$W(t, x_t(\alpha_k, \varphi^{(k)})) \geq \varepsilon_0 \quad \text{для всех } t \in [\alpha_k, \alpha_k + T_k]. \quad (t5)$$

Выберем подпоследовательность k_j такую, что

$$\begin{aligned} X_{k_j}(t, x_t) &= X\left(\alpha_{k_j} + \frac{T_{k_j}}{2} + t, \varphi\right) \rightarrow X^*(t, \varphi), \\ V_{k_j}(t, x) &\rightarrow V^*(t, x), \quad W_{k_j}(t, \varphi) \rightarrow W^*(t, \varphi), \quad U_{k_j}(t, \varphi) \rightarrow U^*(t, \varphi). \end{aligned}$$

Тогда последовательность

$$\left\{ x^{k_j}(t) = x\left(\alpha_{k_j} + \frac{T_{k_j}}{2} + t; \alpha_{k_j}, \varphi^{(k_j)}\right) \right\}$$

равномерно ограничена и равномерно непрерывна на отрезке $[-T_{k_j}/2, T_{k_j}/2]$ и, применяя рассуждения, использованные при доказательстве равномерной устойчивости, получим, что $x^{k_j}(t)$ сходится к решению $x^*(t)$ уравнения $\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)$ равномерно на любом отрезке $[0, T]$. В силу (t5) имеем

$$W\left(\alpha_{k_j} + \frac{T_{k_j}}{2} + t, x_{\alpha_{k_j} + T_{k_j}/2 + t}(\alpha_{k_j}, \varphi^{(k_j)})\right) \geq \varepsilon_0 \quad \text{для } t \in \left[0, \frac{T_{k_j}}{2}\right].$$

Переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$ в последнем неравенстве, получаем $W^*(t, x_t^*) \geq \varepsilon_0 > 0$ для всех $t \geq 0$. Но выше мы получили, что вдоль любого решения соответствующего предельного уравнения $W^*(t, x_t^*) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Полученное противоречие доказывает равномерность сходимости $V(t, x(t; \alpha, \varphi)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ по $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B_\delta$.

Покажем теперь, что B_δ содержится в области равномерного притяжения точкой $x = 0$ решений уравнения (1). Предположим, что это не так, тогда для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ и произвольной последовательности $T_n \rightarrow +\infty$ существует последовательность $\{(\alpha_n, \varphi_n) \in \mathbb{R}^+ \times B_\delta\}$ такая, что для решений $x(t; \alpha_n, \varphi_n)$ уравнения (1) выполняются равенства

$$|x_{\alpha_n + T_n}(\alpha_n, \varphi_n)|_B = \varepsilon_1. \quad (t6)$$

Пусть теперь $\delta_1 = \delta(\varepsilon_1)$ – число из определения равномерной устойчивости нулевого решения для числа ε_1 . Тогда

$$|x_t(\alpha_n, \varphi_n)|_B \geq \delta_1 \quad \text{для } \alpha_n \leq t \leq \alpha_n + T_n. \quad (t7)$$

Положим $\beta_n = \alpha_n + T_n/2$, тогда можно считать, что

$$X(t + \beta_n, \varphi) \rightarrow X^*(t, \varphi), \quad V(t + \beta_n, x) \rightarrow V^*(t, x).$$

В силу (t6)

$$|x(\beta_n + t; \alpha_n, \varphi_n)| \leq J\varepsilon_1 \quad \text{для } t \in \left[-\frac{T_n}{2}, \frac{T_n}{2}\right],$$

а значит, для $t \in [-N, N]$ для произвольного фиксированного $N > 0$ и достаточно больших n . Отсюда, как и выше, следует равномерная по $[0, T]$, $T > 0$, сходимость $x_{\beta_n + t}(\alpha_n, \varphi_n)$ к решению $x^*(t)$ предельного уравнения $\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)$. Из

определения δ при помощи предельного перехода получаем $|x_0^*|_B \leq \Delta/2 < \Delta$. Из равномерной сходимости $V(t, x(t; \alpha_n, \varphi_n)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ следует $x_0^* \in N(V^*)$, а из (17) имеем $|x_t^*|_B \geq \delta_1$ для всех $t \geq 0$, что противоречит определению Δ .

В доказанной теореме для установления равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения исходного уравнения требуется, чтобы нулевое решение было асимптотически устойчивым равномерно относительно *всех* предельных уравнений. В общем случае это требование нельзя ослабить и потребовать асимптотическую устойчивость нулевого решения каждого предельного уравнения (когда числа δ и Δ в определении асимптотической устойчивости зависят еще и от правой части). Действительно, полагая в теореме 1 $V(t, x) \equiv 0$, $W(t, \varphi) \equiv 0$, получим, что для равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1) достаточно асимптотической устойчивости нулевого решения в $\Omega(X)$ (см. определение 1 и следующее за ним замечание). Но даже для обыкновенного дифференциального уравнения даже из *равномерной* асимптотической устойчивости нулевого решения *каждого* предельного уравнения не следует равномерная асимптотическая устойчивость (и даже просто равномерная устойчивость) нулевого решения исходного уравнения. Соответствующие контрпримеры можно найти в [12].

4. Некоторые следствия. В случае, когда правая часть уравнения (1) не зависит от t или периодична по t с некоторым периодом τ , из доказанной теоремы непосредственно получаются следствия, которые не используют предельные уравнения. Действительно, для $X(t, \varphi) \equiv X(\varphi)$ любой предельный функционал совпадает с $X(\varphi)$, а для периодического $X(t, \varphi)$ предельные функционалы имеют вид $X^*(t, \varphi) = X(t + \gamma, \varphi)$, $\gamma \in [0, \tau)$. Поэтому из теоремы 1 получаем следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что $X(t, \varphi) \equiv X(\varphi)$ и существует пара Ляпунова–Разумихина $(V(x), W(\varphi))$, удовлетворяющая предположению 3 и такая, что*

- 1) *если $x(t)$ – решение уравнения (1) и для некоторого $t \in \mathbb{R}^+$*

$$x_t \in \left\{ \varphi \in B_H \mid \max_{-T(c) \leq s \leq 0} V(\varphi(s)) = V(\varphi(0)) = c, V'(\varphi) = 0 \right\},$$

то $c = 0$;

- 2) *нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво относительно множества*

$$N(V) = \{ \varphi \in B_H \mid V(\varphi(s)) = 0, s \leq 0 \}.$$

Тогда нулевое решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что для некоторого $\tau > 0$ $X(t + \tau, \varphi) \equiv X(t, \varphi)$ и существует пара Ляпунова–Разумихина $(V(t, x), W(t, \varphi))$, удовлетворяющая предположению 3 и такая, что*

- 1) $V(t + \tau, x) \equiv V(t, x)$, $W(t + \tau, \varphi) \equiv W(t, \varphi)$;

- 2) *если $x(t)$ – решение уравнения (1) и для некоторого $t \in \mathbb{R}^+$*

$$x_t \in \left\{ \varphi \in B_H \mid \max_{-T(c) \leq s \leq 0} V(t + s, \varphi(s)) = V(t, \varphi(0)) = c, V'(t, \varphi) = 0 \right\},$$

то $c = 0$;

- 3) нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво относительно множества

$$N(V) = \{\varphi \in B_H \mid V(s, \varphi(s)) = 0, s \leq 0\}.$$

Тогда нулевое решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 2 развивает результат об асимптотической устойчивости из [22], доказанный в предположении знакоопределенности V и V' (в этом случае условия 1) и 2) теоремы 2 выполняются автоматически) и при условии $W(\varphi) \leq \sup_{s \leq 0} V(\varphi(s))$ для каждой равномерно непрерывной функции $\varphi \in B$ (это условие, очевидно, выполняется в силу предположения 3).

Рассмотрим теперь уравнение

$$\dot{x}(t) = X(t, x_t) + g(t, x_t), \quad (2)$$

в котором $X(t, \varphi)$ – функционал из уравнения (1), а $g(t, \varphi) \in C(\mathbb{R}^+ \times B_H, \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям:

имеет место сходимость

$$\sup_{0 \leq u \leq 1} \left| \int_t^{t+u} g(s, \varphi) ds \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad \text{для всех } \varphi \in B_H; \quad (3)$$

$\exists r > 0, \exists b(s): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ – неубывающая, $b(0) = 0$, и

$\exists h(t): \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+1} |h(u)| du$, такие, что

$$|g(t, \varphi) - g(t, \psi)| \leq b(|\varphi - \psi|_B) + h(t) \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad \varphi, \psi \in \bar{B}_{H+r}.$$

Условиям (3) удовлетворяет, например, функционал $g(t, \varphi) = \varphi(0) \sin t^2$ (см. [27]).

До сих пор несущественным был вопрос о единственности. Если решение любого предельного уравнения для любой начальной точки единственно и продолжаемо вправо, то уравнение (1) называется *регулярным* [28]. Заметим, что ни единственность, ни продолжаемость в общем случае не “наследуются” предельными уравнениями, однако предположение ограниченности $X(t, \varphi)$ для ограниченных φ достаточно для того, чтобы ограниченные решения каждого предельного уравнения были продолжаемы, а единственность решения для уравнения (1) и каждого предельного уравнения гарантируется, если выполняется следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4 [28]. Для каждого компактного множества $K \subset B_H$ существует $L = L(K) > 0$ такое, что для всех $t \in \mathbb{R}^+$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ выполняется неравенство $|X(t, \varphi_1) - X(t, \varphi_2)| \leq L|\varphi_1 - \varphi_2|_B$.

Согласно [28] для регулярного уравнения равномерная асимптотическая устойчивость его нулевого решения “наследуется” предельными уравнениями. Отсюда и из [5; следствие 4.1] следует, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Если выполняются предположения 1, 4 и нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво для (1), то оно равномерно асимптотически устойчиво для (2).

Поэтому в условиях теоремы 1 нулевое решение уравнения (2) равномерно асимптотически устойчиво. Заметим, что простая асимптотическая устойчивость (не равномерная) не обязательно наследуется возмущенным уравнением.

5. Примеры.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим систему двух уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1(t)x_1(t) + f(t, x_1(t), x_2(t), x_1(t-r), x_2(t-r)) + b(t)x_1(t-r) \\ \quad + \int_{-\infty}^0 K_1(t, s)x_1(t+s) ds + g_1(t)(c_{11}x_1(t-r) + c_{12}x_2(t-r)), \\ \dot{x}_2(t) = a_2(t)x_2(t) + \int_{-\infty}^0 K_2(t, s)x_2(t+s) ds - x_2(t) \int_{-\infty}^0 K_3(t, s)x_2^2(t+s) ds \\ \quad + g_2(t)(c_{21}x_1(t-r) + c_{22}x_2(t-r)), \end{cases} \quad (4)$$

где функции $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b(t)$, $K_i(t, s)$ определены для всех $t \geq 0$, $s \leq 0$, равномерно непрерывны по t и ограничены, $f(t, y_1, y_2, y_3, y_4)$ ограничена и равномерно непрерывна на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times \{y \in \mathbb{R}^4 : |y| \leq q < \infty\}$, $f(t, y_1, 0, y_3, 0) = 0$, $0 < K_i(t, s) \leq k_i(s)$, $\int_{-\infty}^0 k_i(s) ds = 1$, $\sup_{s \leq 0} k_i(s - T)/k_i(s) \leq L_i(T)$, $i = 1, 2, 3$; $\lim_{T \rightarrow \infty} L_1(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} L_2(T) = 0$,

$$\forall \rho \geq 0, \quad \forall t \geq \rho \quad \sup_{s \leq 0} \frac{K_2(t, s - \rho)}{K_2(t - \rho, s)} + \int_{-\rho}^0 K_2(t, s) ds \leq 1; \quad (*)$$

$a_0 \leq a_2(t) \leq -1$, $a_1(t) + |b(t)| \leq -1$, и существуют последовательности $\tau_k^1 \rightarrow +\infty$, $\tau_k^2 \rightarrow +\infty$, числа $\varepsilon_i > 0$, $\delta_i(\varepsilon_i) > 0$, $i = 1, 2$ такие, что

$$a_1(t) + |b(t)| + 1 < -\delta_1 \quad \text{для } t \in [\tau_k^1, \tau_k^1 + \varepsilon_1], \quad K_3(t, s) > \delta_2 \quad \text{для } t \in [\tau_k^2, \tau_k^2 + \varepsilon_2].$$

Относительно функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$ предположим, что каждая из них непрерывна, ограничена и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq u \leq 1} \left| \int_t^{t+u} g_i(s) ds \right| = 0, \quad i = 1, 2.$$

Покажем, что при данных предположениях нулевое решение системы (4) равномерно асимптотически устойчиво. Ясно, что для любой постоянной матрицы

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

последние слагаемые в уравнениях системы удовлетворяют условиям (3), поэтому в силу теоремы 4 достаточно показать равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1(t)x_1(t) + f(t, x_1(t), x_2(t), x_1(t-r), x_2(t-r)) + b(t)x_1(t-r) \\ \quad + \int_{-\infty}^0 K_1(t, s)x_1(t+s) ds, \\ \dot{x}_2(t) = a_2(t)x_2(t) + \int_{-\infty}^0 K_2(t, s)x_2(t+s) ds - x_2(t) \int_{-\infty}^0 K_3(t, s)x_2^2(t+s) ds. \end{cases} \quad (5)$$

Для этой системы положим

$$B = M_{k_1,1}^r \times [M_{k_2,1}^r \cap M_{k_3,2}], \quad |\varphi|_B^2 = |\varphi_1|_{M_{k_1,1}^r}^2 + |\varphi_2|_{M_{k_2,1}^r}^2, \\ V(t, x) = V(x) = x_2^2, \quad W(t, \varphi) = \max \left\{ \varphi_2^2(0), \left(\int_{-\infty}^0 K_2(t, s) |\varphi_2(s)| ds \right)^2 \right\}.$$

Проверим, что (V, W) – пара Ляпунова–Разумихина. Используя неравенство (*), нетрудно убедиться, что условие (LR1) выполняется. Оценим производную V' в силу системы (5):

$$V'(t, \varphi) = 2a_2(t)\varphi_2^2(0) + 2\varphi_2(0) \int_{-\infty}^0 K_2(t, s)\varphi_2(s) ds - 2\varphi_2^2(0) \int_{-\infty}^0 K_3(t, s)\varphi_2^2(s) ds \\ \leq -2\varphi_2^2(0) + 2|\varphi_2(0)| \int_{-\infty}^0 K_2(t, s)|\varphi_2(s)| ds - 2\varphi_2^2(0) \int_{-\infty}^0 K_3(t, s)\varphi_2^2(s) ds.$$

При условии $V(\varphi(0)) = W(t, \varphi)$ получаем

$$|\varphi_2(0)| \geq \int_{-\infty}^0 K_2(t, s)|\varphi_2(s)| ds.$$

Тогда

$$V'(t, \varphi) \leq -2\varphi_2^2(0) \int_{-\infty}^0 K_3(t, s)\varphi_2^2(s) ds \leq 0,$$

т.е. условие (LR2) также выполняется.

Проверим, что выполняется предположение 3. Функции, предельные к V и W , имеют вид

$$V^*(x) = x_2^2, \quad W^*(t, \varphi) = \max \left\{ \varphi_2^2(0), \left(\int_{-\infty}^0 K_2^*(t, s)|\varphi_2(s)| ds \right)^2 \right\},$$

где $K_2^*(t, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_2(t_n + t, s)$ для некоторой последовательности $t_n \rightarrow +\infty$. Пусть $\sup_{s \leq 0} V^*(\varphi(s)) \leq W^*(t, \varphi)$, где $\varphi \in B$ – равномерно непрерывна. Тогда получаем цепочку неравенств

$$W^*(t, \varphi) \left(\int_{-\infty}^{-T} K_2^*(t, s) ds + \int_{-T}^0 K_2^*(t, s) ds \right) \leq W^*(t, \varphi) \leq \left(\int_{-\infty}^0 K_2^*(t, s)|\varphi_2(s)| ds \right)^2 \\ \leq \sup_{s \leq 0} \varphi_2^2(s) \left(\int_{-\infty}^0 K_2^*(t, s) ds \right)^2 \leq \sup_{s \leq 0} \varphi_2^2(s) \int_{-\infty}^0 K_2^*(t, s) ds \\ \leq W^*(t, \varphi) \int_{-\infty}^{-T} K_2^*(t, s) ds + \max_{-T \leq s \leq 0} V^*(\varphi(s)) \int_{-T}^0 K_2^*(t, s) ds.$$

Отсюда

$$W^*(t, \varphi) \leq \max_{-T \leq s \leq 0} V^*(\varphi(s)) \quad \text{для всех } T > 0.$$

Таким образом, условие 1) теоремы 1 выполняется. Проверим второе условие. Действительно, в силу предположения 3 и полученной оценки для $V'(t, \varphi)$ на множестве $M(c_0, V^*)$ выполняется неравенство

$$U^*(t, \varphi) \leq -2\varphi_2^2(0) \int_{-\infty}^0 K_3^*(t, s)\varphi_2^2(s) ds \leq 0,$$

поэтому для функций $\varphi \in M(c_0, V^*) \cap L(t, U^*)$ должно выполняться

$$2\varphi_2^2(0) \int_{-\infty}^0 K_3^*(t, s) \varphi_2^2(s) ds = 0.$$

Если $x^*(t)$ – решение предельного уравнения, соответствующего последовательности $\{\tau_k^2\}$, то в силу свойств функции $K_3^*(t, s)$ для $x_t^* \in M(c_0, V^*) \cap L(t, U^*)$ должно выполняться $x_2^*(t) = 0$, т.е. $c_0 = 0$.

Для проверки третьего условия теоремы 1 достаточно показать, что нулевое решение уравнения

$$\dot{x}(t) = a_1^*(t)x(t) + b^*(t)x(t-r) + \int_{-\infty}^0 K_1^*(t, s)x(t+s) ds \quad (6)$$

асимптотически устойчиво для любых предельных функций $a^*(t)$, $b^*(t)$ и $K_1^*(t, s)$ с одними и теми же числами $\delta(\varepsilon)$ и Δ в определении 6.

Рассмотрим семейство этих уравнений в пространстве $\tilde{B} = M_{k_1,1}^r$ и для каждого уравнения рассмотрим пару $V_1^*(t, x) = x^2$,

$$W_1^*(t, \varphi) = \max \left\{ \max_{-r \leq s \leq 0} \varphi^2(s), \left(\int_{-\infty}^0 K_1^*(t, s) |\varphi(s)| ds \right)^2 \right\}.$$

Тогда (см. [11; пример 1]) (V_1^*, W_1^*) является парой Ляпунова–Разумихина для соответствующего уравнения (6) и нулевое решение каждого из этих уравнений будет асимптотически устойчиво. При этом $W_1^*(t, \varphi)$ не возрастает вдоль каждого решения $x_*(t; 0, \varphi)$ соответствующей предельной системы, поэтому

$$\begin{aligned} x_*^2(t; 0, \varphi) &\leq \max \left\{ \max_{-r \leq s \leq 0} x_*^2(t+s), \left(\int_{-\infty}^0 K_1^*(t, s) |x_*(t+s)| ds \right)^2 \right\} \\ &\leq \max \left\{ \max_{-r \leq s \leq 0} \varphi^2(s), \left(\int_{-\infty}^0 k_1(s) |\varphi(s)| ds \right)^2 \right\} = |\varphi|_B^2. \end{aligned}$$

Следовательно, при $|\varphi|_B^2 < \varepsilon$ решение $x_*(t; 0, \varphi)$ любого уравнения (6) удовлетворяет неравенству $|x_*(t; 0, \varphi)| < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$.

Итак, выполнены все условия теоремы 1, и нулевое решение уравнения (4) равномерно асимптотически устойчиво.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим систему двух уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a_1(t)x_1(t) + b_1(t) \int_{-\infty}^t c(t-s)x_1(s) ds + d_1(t, (x_1)_t, (x_2)_t), \\ \dot{x}_2(t) = -a_2(t)x_2(t) + d_2(t, (x_1)_t, (x_2)_t) + d_3(t, (x_1)_t, (x_2)_t), \end{cases} \quad (7)$$

где функции $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b(t)$ равномерно непрерывны, $1/2 < A \leq a_1(t) \leq A_1$, $a_2(t) \geq a_0 > 0$, $|b(t)| \leq B$, функция $c: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и имеем $B \int_{-\infty}^0 |c(-s)| ds = m < A - 1/2$. Выберем $m^* \in (m, q(A - 1/2)]$, $q < 1$. Тогда существует (см. [29]) функция $g_1: (-\infty, 0] \rightarrow [1, +\infty)$, удовлетворяющая условиям (g1), (g2) и такая, что

$$B \int_{-\infty}^0 |c(-s)| g_1(s) ds = m^* \leq q \left(A - \frac{1}{2} \right).$$

Предположим также, что существует функция $g_2: (-\infty, 0] \rightarrow [1, +\infty)$, удовлетворяющая условиям (g1), (g2) и такая, что функционалы $d_i(t, \varphi_1, \varphi_2)$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют условиям предположения 1 в пространстве $\mathbb{R}^+ \times B = \mathbb{R}^+ \times [UC_{g_1} \times UC_{g_2}]$ с нормой $|\varphi|_B^2 = |\varphi_1|_{g_1}^2 + |\varphi_2|_{g_2}^2$, $\varphi_1(0)d_1(t, \varphi_1, \varphi_2) \leq 0$, $d_2(t, 0, \varphi_2) = 0$, $d_3(t, \varphi_1, \varphi_2) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерно на каждом компакте, $d_i(t, 0, 0) = 0$, $i = 1, 3$.

Пусть

$$V(t, x) = x_1^2, \quad W(t, \varphi) = \left\{ \sup_{s \leq 0} \frac{|\varphi_1(s)|}{g_1(s)} \right\}^2.$$

Тогда (V, W) – пара Ляпунова–Разумихина и выполняется условие 1) теоремы 1, при этом производная функции V имеет оценку $V'(t, \varphi) \leq 2(q-1)(A-1/2)\varphi_1^2(0)$ (см. [11; пример 2]), и множество $M(c_0, T, V^*) \cap L(t, U^*) = \emptyset$ для каждого $c_0 > 0$. На множестве $N(V^*)$ система, предельная к (7), имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0, \\ \dot{x}_2(t) = -a_2^*(t)x_2(t), \end{cases}$$

и условие 3) теоремы 1, очевидно, выполняется. Отсюда получаем равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (7).

6. Заключение. В исследовании устойчивости и неустойчивости для уравнений с запаздыванием широко используется другой прямой метод – метод функционалов, когда вместо вспомогательной функции строится функционал $V(t, \varphi)$ и изучается его поведение вдоль решений (см., например, [7], [16]–[19]). Этот метод является в некотором смысле более естественным для таких уравнений, однако в приложениях иногда он оказывается необоснованно сложным. Использование функций для уравнений с запаздыванием было впервые предложено Разумихиным [20] для случая ограниченного запаздывания и для неограниченного запаздывания обобщалось различными способами ([24]–[26] и др.) Многие из этих способов представляют собой частные случаи изложенного здесь подхода, предлагая различные варианты конкретных функционалов W , вид которых либо зависит от функции V [25], [26] либо определяется выбором фазового пространства уравнения [24].

Рассматривая пару функция + функционал, мы для функции вычисляем производную в силу уравнения (это проще, чем для функционала!), а при построении W учитываем особенности фазового пространства конкретного уравнения. Использование такой пары было, по-видимому, впервые предложено в работе [22] для автономного случая. Отметим, что в случае ограниченного запаздывания $0 < r < \infty$ мы можем положить $W(t, \varphi) = \sup_{-r \leq s \leq 0} V(t+s, \varphi(s))$ – для этого функционала условие (LR1) выполняется автоматически, а (LR2) представляет собой условие типа Разумихина относительно производной $V'(t, \varphi)$, обеспечивающее устойчивость нулевого решения [20]. В этом смысле использование пары V, W является естественным обобщением метода функций на случай неограниченного запаздывания.

Результаты, аналогичные теореме 1, для уравнений с конечным запаздыванием были получены в [15]. В [8] в теоремах об асимптотической устойчивости допускаются знакопостоянная производная функции Ляпунова, но от самой функции требуется знакоопределенность. В статье [11] для уравнений с неограниченным запаздыванием при помощи пары Ляпунова–Разумихина со знакопостоянной V' доказана

асимптотическая устойчивость, в [23] при тех же предположениях утверждается равномерная асимптотическая устойчивость, и в обоих случаях функция Ляпунова опять-таки должна быть знакоопределена. Заметим, что в случае знакоопределенной функции V условие 3) в теоремах 1–3, очевидно, выполняется. Большинство же известных достаточных условий асимптотической устойчивости в терминах функций Ляпунова предполагают не только знакоопределенность функции, но и знакоопределенность (на некотором подмножестве фазового пространства) ее производной. Теорема 1 предлагает, таким образом, менее жесткие условия относительно функции V . Для сравнения приведем два известных результата.

Определим класс функций

$$\mathcal{K} = \{\sigma \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \sigma(u) \text{ строго возрастает и } \sigma(0) = 0\}.$$

Сейферт [25] доказал теорему об асимптотической устойчивости в предположении существования функции $V(t, x)$: $a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|)$ для $a, b \in \mathcal{K}$, производная которой удовлетворяет условию:

существует функция $f \in \mathcal{K}$ такая, что $f(u) > u$ при $u > 0$ и для каждого решения $x(t)$ уравнения (1) существуют число $r > 0$ и функция $c \in \mathcal{K}$ такие, что если $V(s, x(s)) < f(V(t, x(t)))$ для всех $s \in [t_0, t]$, $t_0 = \max\{0, t - r\}$, то $V'(t, x_t) \leq -c(|x(t)|)$.

Если теперь для этих r и t_0 положить

$$W(t, x_t) = \max_{t_0 - t \leq s \leq 0} V(t + s, x(t + s)),$$

то, очевидно, V и W удовлетворяют условию (LR1) и предположению 3. Поэтому, учитывая теорему 1, условие на производную в предположении 2 можно ослабить следующим образом:

для каждого решения $x(t)$ уравнения (1) существует число $r > 0$, такое что если $V(s, x(s)) \leq V(t, x(t))$ для всех $s \in [t_0, t]$, $t_0 = \max\{0, t - r\}$, то $V'(t, x_t) \leq 0$ и выполняется условие 2) теоремы 1.

В статье [26] получен следующий результат о равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1):

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что существует функция V , функции $a, b, c \in \mathcal{K}$, и непрерывная функция $f: (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такие, что*

- 1) $f(s, v) < v$ для $v > 0$, $\limsup_{s \rightarrow -\infty} \{f(s, v) : v \leq r\} = 0$, $f(s, v)$ не убывает по s при фиксированном v , $f(0, v)$ не убывает;
- 2) $a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|)$ для $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$;
- 3) $V'(t, \varphi) \leq -c(|\varphi(0)|)$ на множестве $\{(t, \varphi) : f(s, V(t + s, \varphi(s))) < V(t, \varphi(0)), s \leq 0\}$.

Тогда нулевое решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Положим

$$W(t, \varphi) = \max \left\{ V(t, \varphi(0)), \sup_{s \leq 0} f(s, V(t + s, \varphi(s))) \right\}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что пара (V, W) удовлетворяет условию (LR1) и предположению 3, и для нее из теоремы 1 вытекает следующий результат, развивающий теорему 5.

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что существуют функции $V(t, x) \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$, $V(t, 0) = 0$, $b \in \mathcal{X}$ и $f \in C((-\infty, 0] \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, удовлетворяющая условию 1) теоремы 5, такие, что*

- 1) V и ее производная V' удовлетворяют условиям предположения 2;
- 2) $V(t, x) \leq b(|x|)$ для $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, и $V'(t, \varphi) \leq 0$ на множестве $\{(t, \varphi) : f(s, V(t+s, \varphi(s))) \leq V(t, \varphi(0)), s \leq 0\}$;
- 3) выполняются условия 2), 3) теоремы 1.

Тогда нулевое решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Заметим, что в приведенных примерах без дополнительных предположений относительно функционала f (в примере 1) и функционала d_2 (в примере 2) невозможно построить знакоопределенную пару Ляпунова–Разумихина (так же, как и знакоопределенный функционал $V(t, \varphi)$ со знакопостоянной в силу уравнения производной), поэтому известные теоремы [22]–[26] не могут гарантировать даже простую (не асимптотическую) устойчивость.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. Corduneanu, V. Lakshmikantham, “Equations with unbounded delay: a survey”, *Nonlinear Anal.*, **4**:5 (1980), 831–877.
- [2] J. Hale, J. Kato, “Phase space for retarded equations with infinite delay”, *Funkcial. Ekvac.*, **21**:1 (1978), 11–41.
- [3] Y. Hino, “Stability properties for functional differential equations with infinite delay”, *Tohoku Math. J. (2)*, **35**:4 (1983), 597–605.
- [4] J. Kato, “Stability problem in functional differential equations with infinite delay”, *Funkcial. Ekvac.*, **21**:1 (1978), 63–80.
- [5] S. Murakami, “Perturbation theorem for functional differential equations with infinite delay via limiting equations”, *J. Differential Equations*, **59**:3 (1985), 314–335.
- [6] G. R. Sell, “Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I. The basic theory”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127** (1967), 241–262.
- [7] А. С. Андреев, *Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений*, УлГУ, Ульяновск, 2005.
- [8] A. Andreev, N. Sedova, “On the stability of nonautonomous equations with delay via limiting equations”, *Funct. Differ. Equ.*, **5**:1–2 (1998), 21–37.
- [9] А. С. Андреев, “Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы”, *ПММ*, **48**:2 (1984), 225–232.
- [10] С. В. Павликов, *Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости*, Изд-во Ин-та управления, Наб. Челны, 2006.
- [11] Н. О. Седова, “К методу Ляпунова–Разумихина для уравнений с бесконечным запаздыванием”, *Дифференц. уравнения*, **38**:10 (2002), 1338–1347.
- [12] Z. Artstein, “Uniform asymptotic stability via limiting equations”, *J. Differential Equations*, **27**:2 (1978), 172–189.
- [13] W. E. Hornor, “Invariance principles and asymptotic constancy of solutions of precompact functional differential equations”, *Tohoku Math. J. (2)*, **42**:2 (1990), 217–229.
- [14] J. Kato, T. Yoshizawa, “Remarks on global properties in limiting equations”, *Funkcial. Ekvac.*, **24**:3 (1981), 363–371.

- [15] N. Sedova, "On employment of semidefinite functions in stability of delayed equations", *J. Math. Anal. Appl.*, **281**:1 (2003), 307–319.
- [16] Л. Б. Княжище, "Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость неавтономных уравнений с запаздыванием. Г", *Дифференц. уравнения*, **34**:2 (1998), 189–196.
- [17] В. Б. Колмановский, В. Р. Носов, *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием. Теоретические основы технической кибернетики*, Наука, М., 1981.
- [18] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984.
- [19] Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Физматгиз, М., 1959.
- [20] Б. С. Разумихин, "Об устойчивости систем с запаздыванием", *ПММ*, **20**:4 (1956), 500–512.
- [21] J. Haddock, J. Terjéki, "Liapunov–Razumikhin functions and an invariance principle for functional-differential equations", *J. Differential Equations*, **48**:1 (1983), 95–122.
- [22] J. Haddock, J. Terjéki, "On the location of positive limit sets for autonomous functional-differential equations with infinite delay", *J. Differential Equations*, **86**:1 (1990), 1–32.
- [23] Н. О. Седова, "Об асимптотической устойчивости нестационарного режима работы ядерного реактора с двумя слабо связанными активными зонами", *ОППМ*, **10**:1 (2003), 215–216.
- [24] M. Parrott, "Convergence of solutions of infinite delay differential equations with an underlying space of continuous functions", *Ordinary and Partial Differential Equations* (Proc. Sixth Conf., Univ. Dundee, Dundee, 1980), Lecture Notes in Math., **846**, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 280–289.
- [25] G. Seifert, "Liapunov–Razumikhin conditions for asymptotic stability in functional differential equations of Volterra type", *J. Differential Equations*, **16**:2 (1974), 289–297.
- [26] J. Terjéki, "On the asymptotic stability of solutions of functional differential equations", *Ann. Polon. Math.*, **36**:3 (1979), 299–314.
- [27] A. Strauss, J. A. Yorke, "Perturbing uniform asymptotically stable nonlinear systems", *J. Differential Equations*, **6**:3 (1969), 452–483.
- [28] J. Kato, "Asymptotic behavior in functional differential equations with infinite delay", *Equadiff 82* (Würzburg, 1982), Lecture Notes in Math., **1017**, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 300–312.
- [29] F. Atkinson, J. Haddock, "On determining phase spaces for functional differential equations", *Funkcial. Ekvac.*, **31**:3 (1988), 331–347.

Н. О. Седова

Ульяновский государственный университет

E-mail: SedovaNO@ulsu.ru

Поступило

23.05.2007

Исправленный вариант

12.02.2008