Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Стасюк, Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B_{p,\theta}^\Omega$, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 1, 108–121

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4053>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:21:36

Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B_{p,\theta}^\Omega$

С. А. Стасюк

В работе получены точные по порядку оценки наилучших приближений классов $B_{p,\theta}^\Omega$ периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами, спектры которых порождаются поверхностями уровня функции $\Omega(t)$.

Библиография: 17 названий.

Пусть $L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, – пространство 2π -периодических по каждой переменной и суммируемых в степени p на кубе $\pi_d = \prod_{j=1}^d [0; 2\pi]$ функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ с конечной нормой, которая определяется равенствами

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\pi_d)} = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Далее будем рассматривать только те функции $f \in L_p(\pi_d)$, для которых выполняется условие

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$ введем смешанный модуль непрерывности порядка l

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j=1, \dots, d}} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p,$$

где

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l \dots \Delta_{h_1}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\dots (\Delta_{h_1}^l f(x)) \dots)$$

– смешанная l -я разность с шагом h_j по переменной x_j и

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^l (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Пусть $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ – заданная функция типа смешанного модуля непрерывности порядка l , которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = 1, \dots, d$, и $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;
- 2) $\Omega(t)$ возрастает по каждой переменной;
- 3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \leq (\prod_{j=1}^d m_j)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$;
- 4) $\Omega(t)$ непрерывна при $t_j \geq 0$, $j = 1, \dots, d$.

Будем считать, что функция $\Omega(t)$ удовлетворяет также условиям (S) , (S_l) , которые называют условиями Бари–Стечкина [1]. Это значит следующее.

Функция одной переменной $\varphi(\tau) \geq 0$ удовлетворяет условию (S) , если $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ почти возрастает при некотором $\alpha > 0$, т.е. существует такая независимая от τ_1 и τ_2 постоянная $C_1 > 0$, что

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Функция $\varphi(\tau) \geq 0$ удовлетворяет условию (S_l) , если $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ почти убывает при некотором $0 < \gamma < l$, т.е. существует такая независимая от τ_1 и τ_2 постоянная $C_2 > 0$, что

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Будем говорить, что функция $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ удовлетворяет условиям (S) и (S_l) , если она удовлетворяет этим условиям по каждой переменной t_j при фиксированных t_i , $i \neq j$.

Введем обозначение множеств, которые будут применяться для построения тригонометрических полиномов, используемых для приближения функций. Для произвольного натурального числа N положим

$$\kappa(N) = \kappa(\Omega, N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, \Omega(2^{-s}) \geq \frac{1}{N} \right\}, \quad (1)$$

$$Q(N) = Q(\Omega, N) = \bigcup_{s \in \kappa(N)} \rho(s), \quad (2)$$

где

$$\rho(s) = \{k = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, d\},$$

$$\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d}).$$

Заметим, что множества $Q(N)$ порождаются поверхностями уровня функции $\Omega(t)$ и в том случае, когда $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, d$, они называются *степенчатыми гиперболическими крестами*.

Далее, обозначим

$$\kappa^\perp(N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, \Omega(2^{-s}) < \frac{1}{N} \right\}, \quad (3)$$

$$Q^\perp(N) = \bigcup_{s \in \kappa^\perp(N)} \rho(s),$$

$$\Theta(N) = \kappa^\perp(N) \setminus \kappa^\perp(2^l N). \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что $\Theta(N) \subset \kappa^\perp(N)$ и

$$\frac{1}{2^l N} \leq \Omega(2^{-s}) < \frac{1}{N}, \quad (5)$$

т.е.

$$\Omega(2^{-s}) \asymp \frac{1}{N}, \quad (6)$$

где $s \in \Theta(N)$.

В [2] показано, что $\Theta(N) \neq \emptyset$ и

$$|\Theta(N)| \asymp (\log_2 N)^{d-1}, \quad (7)$$

где $|\mathcal{M}|$ – количество элементов множества $\mathcal{M}$.

Приведем определение аппроксимативных характеристик, которые будут исследоваться в работе.

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{N}^d$ – некоторое ограниченное множество. Рассмотрим множество

$$Q(\Lambda) = \{k : k \in \rho(s), s \in \Lambda\} = \bigcup_{s \in \Lambda} \rho(s).$$

Через $t_{Q(\Lambda)}(x)$ обозначим тригонометрический полином со спектром из $Q(\Lambda)$, т.е.

$$t_{Q(\Lambda)}(x) = \sum_{k \in Q(\Lambda)} c_k e^{i(k, x)},$$

где c_k – произвольные числа, $(k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$. Тогда для $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, величина

$$E_{Q(\Lambda)}(f)_p = \inf_{t_{Q(\Lambda)}} \|f(\cdot) - t_{Q(\Lambda)}(\cdot)\|_p$$

– наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами со спектром из множества $Q(\Lambda)$.

Если $F \subset L_p$ – некоторый класс функций, то полагаем

$$E_{Q(\Lambda)}(F)_p = \sup_{f \in F} E_{Q(\Lambda)}(f)_p.$$

Пусть $f \in L_p(\pi_d)$ и

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k, t)} dt$$

– коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Обозначим

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)}.$$

Приведем одно из утверждений, которым будем пользоваться в дальнейшем.

ТЕОРЕМА А (Литтлвуда–Пэли, см., например, [3; гл. 1]). Пусть $p \in (1, \infty)$. Тогда существуют положительные числа $C_3(p)$, $C_4(p)$ такие, что для каждой функции $f \in L_p(\pi_d)$ выполняется соотношение

$$C_3(p) \|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, \cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_4(p) \|f\|_p. \quad (8)$$

Эта теорема является обобщением на многомерный случай известной теоремы Литтлвуда–Пэли (см. [4; т. 2, гл. 15]).

Из (8) легко выводится (см., например, [5; гл. 1]) следующее соотношение:

$$\|f\|_p \ll \left(\sum_s \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^{p_0} \right)^{1/p_0}, \quad (9)$$

где $p_0 = \min\{p, 2\}$.

Для $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим сумму Фурье вида

$$S_{Q(\Lambda)}(f, x) = \sum_{k \in Q(\Lambda)} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)} = \sum_{s \in \Lambda} \delta_s(f, x) \quad (10)$$

и обозначим

$$\mathcal{E}_{Q(\Lambda)}(f)_p = \|f(\cdot) - S_{Q(\Lambda)}(f, \cdot)\|_p.$$

Для функционального класса $F \subset L_p$ положим

$$\mathcal{E}_{Q(\Lambda)}(F)_p = \sup_{f \in F} \mathcal{E}_{Q(\Lambda)}(f)_p.$$

Как следует из теоремы A для $f \in L_p$, $1 < p < \infty$, суммы Фурье вида (10) реализуют порядок наилучшего приближения тригонометрическими полиномами со спектром из множества $Q(\Lambda)$, т.е.

$$E_{Q(\Lambda)}(f)_p \asymp \mathcal{E}_{Q(\Lambda)}(f)_p. \quad (11)$$

Приведем определение классов функций $B_{p, \theta}^\Omega$, которые были рассмотрены в работе [6].

Для $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, и заданной функции $\Omega(t)$ типа смешанного модуля непрерывности порядка l , которая удовлетворяет условиям 1)–4), класс $B_{p, \theta}^\Omega$ определяется следующим образом:

$$B_{p, \theta}^\Omega = \{f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p, \theta}^\Omega} \leq 1\},$$

где

$$\|f\|_{B_{p, \theta}^\Omega} = \left\{ \int_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f, t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{1/\theta}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \quad (12)$$

$$\|f\|_{B_{p, \infty}^\Omega} = \sup_{t > 0} \frac{\Omega_l(f, t)_p}{\Omega(t)}.$$

Далее нам будет удобно пользоваться эквивалентным определением норм функций из классов $B_{p, \theta}^\Omega$.

Как установлено в [7] ($\theta = \infty$) и в [6] ($1 \leq \theta < \infty$), для каждого $1 < p < \infty$ и заданной функции $\Omega(t)$ типа смешанного модуля непрерывности порядка l , которая удовлетворяет условиям 1)–4), (S) и (S_l) , для функций из классов $B_{p, \theta}^\Omega$ справедливы соотношения

$$\|f\|_{B_{p, \theta}^\Omega} \asymp \left\{ \sum_s (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right\}^{1/\theta}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \quad (13)$$

$$\|f\|_{B_{p, \infty}^\Omega} \asymp \sup_s \frac{\|\delta_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}. \quad (14)$$

В случае $p = 1$ и $p = \infty$ можно записать соотношения, аналогичные (13) и (14), несколько модифицировав при этом “блоки” $\delta_s(f, x)$.

Пусть $V_n(t)$ обозначает ядро Валле Пуссена порядка $2n - 1$ вида

$$V_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \cos kt.$$

Каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$, поставим в соответствие полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j))$$

и для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, через $A_s(f, x)$ обозначим свертку

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x).$$

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, а функция $\Omega(t)$ типа смешанного модуля непрерывности порядка l удовлетворяет условиям (S) и (S_l) . Тогда, как установлено в [8] ($1 \leq \theta < \infty$) и в [7] ($\theta = \infty$), имеют место соотношения

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \asymp \left\{ \sum_s (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|A_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right\}^{1/\theta}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \quad (15)$$

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} \asymp \sup_s \frac{\|A_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}. \quad (16)$$

В случае $\Omega(t) = t_1^{r_1} \cdots t_d^{r_d}$, т.е. для функций из классов $B_{p,\theta}^r$, соотношения (13)–(16) установлены в [9].

Теперь перейдем к формулировке и доказательству полученных результатов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\Omega(t)$ типа смешанного модуля непрерывности порядка l удовлетворяет условиям (S) и (S_l) , а для параметров p и q выполнено одно из следующих условий:

- 1) $1 \leq q = p < \infty$;
- 2) $1 < q < p \leq \infty$, $p \geq 2$;
- 3) $1 \leq q < p \leq 2$.

Тогда при $1 \leq \theta < \infty$

$$E_{Q(N)}(B_{p,\theta}^\Omega)_q \asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(1/p_0-1/\theta)_+}, \quad (17)$$

где $p_0 = \min\{p, 2\}$, $a_+ = \max\{a, 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем в (17) сначала оценки сверху, рассмотрев последовательно все случаи.

Приведем лемму, следствием из которой будем пользоваться.

ЛЕММА А [2]. Пусть функция $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ типа смешанного модуля непрерывности порядка l удовлетворяет условию (S) . Тогда для $0 < p < \infty$

$$\sum_{s \in \kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^p \ll \sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^p. \quad (18)$$

Таким образом, учитывая включение $\Theta(N) \subset \kappa^\perp(N)$, в силу соотношений (18), (6) и (7) можем записать для $0 < p < \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^p &\asymp \sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^p \asymp \left(\frac{1}{N}\right)^p \sum_{s \in \Theta(N)} 1 \\ &= \left(\frac{1}{N}\right)^p |\Theta(N)| \asymp \left(\frac{1}{N}\right)^p (\log_2 N)^{d-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

1) Пусть $q = p = 1$. Тогда воспользовавшись для $f \in B_{1,\theta}^\Omega$ сначала неравенствами Минковского и Гёльдера с показателем $1 < \theta < \infty$ (с соответствующей модификацией при $\theta = 1$), а затем соотношениями (15) и (19), будем иметь

$$\begin{aligned} E_{Q(N)}(f)_1 &\leq \left\| \sum_{s \in \kappa^\perp(N)} A_s(f, \cdot) \right\|_1 \leq \sum_{s \in \kappa^\perp(N)} \|A_s(f, \cdot)\|_1 \\ &= \sum_{s \in \kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^{-1} \|A_s(f, \cdot)\|_1 \Omega(2^{-s}) \\ &\leq \left(\sum_{s \in \kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|A_s(f, \cdot)\|_1^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{s \in \kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^{\theta/(\theta-1)} \right)^{1-1/\theta} \\ &\ll \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(1-1/\theta)} \ll \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(1-1/\theta)}. \end{aligned}$$

2) Пусть теперь $1 < q = p < \infty$, $\theta > p_0 = \min\{p, 2\}$. Тогда воспользовавшись для $f \in B_{p,\theta}^\Omega$ сначала соотношением (9), а затем неравенством Гёльдера (с показателем θ/p_0) и соотношениями (13), (19), получим

$$\begin{aligned} E_{Q(N)}(f)_p &\leq \mathcal{E}_{Q(N)}(f)_p = \left\| \sum_{s \in \kappa^\perp(N)} \delta_s(f, \cdot) \right\|_p \ll \left(\sum_{s \in \kappa^\perp(N)} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^{p_0} \right)^{1/p_0} \\ &= \left(\sum_{s \in \kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^{-p_0} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^{p_0} (\Omega(2^{-s}))^{p_0} \right)^{1/p_0} \\ &\leq \left(\sum_{s \in \kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{s \in \kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^{p_0\theta/(\theta-p_0)} \right)^{(\theta-p_0)/(\theta p_0)} \\ &\ll \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(\theta-p_0)/(\theta p_0)} \ll \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(1/p_0-1/\theta)}. \end{aligned} \quad (20)$$

3) При рассмотрении случая $1 < q = p < \infty$, $1 \leq \theta \leq p_0$, будем пользоваться неравенством [10; с. 43]

$$\left(\sum_k a_k^\mu \right)^{1/\mu} \leq \left(\sum_k a_k^\nu \right)^{1/\nu}, \quad (21)$$

где $a_k \geq 0$, $0 < \nu \leq \mu$. Применяя для $f \in B_{p,\theta}^\Omega$ сначала неравенства (9), (21), а затем формулы (3) и (13), получим

$$E_{Q(N)}(f)_p \leq \left\| \sum_{s \in \kappa^\perp(N)} \delta_s(f, \cdot) \right\|_p \ll \left(\sum_{s \in \kappa^\perp(N)} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^{p_0} \right)^{1/p_0}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{s \in \kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^\theta \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^\theta (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \right)^{1/\theta} \\
&\leq \max_{s \in \kappa^\perp(N)} \Omega(2^{-s}) \left(\sum_{s \in \kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \ll \frac{1}{N} \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \ll \frac{1}{N}.
\end{aligned} \tag{22}$$

4) Пусть теперь $1 \leq q < p < \infty$. В силу неравенства $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$, $q < p$, и доказанных выше оценок (20) и (22), можем записать

$$E_{Q(N)}(B_{p,\theta}^\Omega)_q \leq E_{Q(N)}(B_{p,\theta}^\Omega)_p \ll \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(1/p_0-1/\theta)_+}.$$

5) Рассмотрим случай $1 < q < \infty$, $p = \infty$. Поскольку согласно (12) имеет место вложение $B_{\infty,\theta}^\Omega \subset B_{q+1,\theta}^\Omega$, используя оценки (20) и (22), получим

$$E_{Q(N)}(B_{\infty,\theta}^\Omega)_q \leq E_{Q(N)}(B_{q+1,\theta}^\Omega)_{q+1} \ll \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+}.$$

Таким образом, оценки сверху в теореме доказаны.

Перейдем к доказательству в (17) оценок снизу. Эти доказательства будут базироваться на построении соответствующих экстремальных функций.

1) Пусть $2 \leq q = p < \infty$, $2 \leq \theta < \infty$. Рассмотрим функцию

$$f_{N,\theta}(x) = C_5 \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \sum_{s \in \Theta(N)} e^{i(k_s, x)}, \quad C_5 > 0,$$

где $k_s \in \rho(s)$ – некоторый фиксированный вектор. Покажем, что функция $f_{N,\theta}(x)$ при соответствующей постоянной $C_5 > 0$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^\Omega$. Действительно, согласно соотношениям (13), (6) и (7) имеем

$$\begin{aligned}
\|f_{N,\theta}\|_{B_{p,\theta}^\Omega} &\asymp \left(\sum_s (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|\delta_s(f_{N,\theta}, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\
&= C_5 \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|e^{i(k_s, \cdot)}\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\
&\asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} N \left(\sum_{s \in \Theta(N)} 1 \right)^{1/\theta} = (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} |\Theta(N)|^{1/\theta} \asymp 1.
\end{aligned} \tag{23}$$

Далее, поскольку в силу выбора функции $f_{N,\theta}(x)$

$$S_{Q(N)}(f_{N,\theta}, \cdot) = 0, \tag{24}$$

используя (11), (7), получим

$$\begin{aligned}
E_{Q(N)}(f_{N,\theta})_p &\asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(f_{N,\theta})_p = \|f_{N,\theta}\|_p \geq \|f_{N,\theta}\|_2 \\
&= C_5 \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} \|e^{i(k_s, \cdot)}\|_2^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$= C_5 \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} 1 \right)^{1/2} \asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

2) Пусть $1 < q = p < 2$, $q \leq \theta < \infty$. Рассмотрим функцию

$$f_{N,q,\theta}(x) = C_6 \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \sum_{s \in \Theta(N)} 2^{\|s\|_1(1/q-1)} \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)}, \quad C_6 > 0,$$

где $\|s\|_1 = s_1 + \dots + s_d$.

Покажем, что при некоторой постоянной $C_6 > 0$ $f_{N,q,\theta} \in B_{q,\theta}^\Omega$. Для этого нам понадобится соотношение

$$\left\| \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,\cdot)} \right\|_q \asymp 2^{\|s\|_1(1-1/q)}, \quad 1 < q < \infty, \quad (25)$$

которое следует из соответствующего соотношения в одномерном случае (см., например, [11]).

Используя (25), (6) и (7), получим

$$\begin{aligned} \|f_{N,q,\theta}\|_{B_{q,\theta}^\Omega} &\asymp \left(\sum_s (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|\delta_s(f_{N,q,\theta}, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\ &= C_6 \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} 2^{\|s\|_1(1/q-1)\theta} \left\| \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,\cdot)} \right\|_q^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \right)^{1/\theta} \\ &\asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} N \left(\sum_{s \in \Theta(N)} 1 \right)^{1/\theta} = (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} |\Theta(N)|^{1/\theta} \asymp 1. \end{aligned}$$

Далее положим

$$\Delta_s = \{x : 2^{-s_j} \leq x_j < 2^{-s_j+1}, j = 1, \dots, d\}.$$

Отметим, что $\Delta_s \cap \Delta_{s'} = \emptyset$ при $s \neq s'$. Тогда, учитывая, что $S_{Q(N)}(f_{N,q,\theta}, \cdot) = 0$, вследствие (11) и теоремы A будем иметь

$$\begin{aligned} E_{Q(N)}(f_{N,q,\theta})_q &\asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(f_{N,q,\theta})_q = \|f_{N,q,\theta}\|_q \asymp \left\| \left(\sum_{s \in \Theta(N)} |\delta_s(f_{N,q,\theta}, \cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \\ &\gg \left(\sum_{s \in \Theta(N)} \int_{\Delta_s} |\delta_s(f_{N,q,\theta}, \cdot)|^q dx \right)^{1/q} \\ &= C_6 \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} 2^{\|s\|_1(1-q)} \int_{\Delta_s} \left| \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,\cdot)} \right|^q dx \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку (см., например, [12])

$$\int_{\Delta_s} \left| \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k, \cdot)} \right|^q dx \gg 2^{\|s\|_1(q-1)},$$

из (26) и (7) находим

$$E_{Q(N)}(B_{p,\theta}^\Omega)_q \gg \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} 1 \right)^{1/q} \asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(1/q-1/\theta)}.$$

3) В случае $1 < q = p < \infty$, $1 \leq \theta < p_0 = \min\{p, 2\}$ рассмотрим функцию

$$g_\Omega(x) = C_7 \Omega(2^{-\tilde{s}}) e^{i(k_{\tilde{s}}, x)}, \quad C_7 > 0,$$

где $k_{\tilde{s}} \in \rho(\tilde{s})$, $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_d) \in \Theta(N)$.

Поскольку

$$\begin{aligned} \|g_\Omega\|_{B_{p,\theta}^\Omega} &\asymp \left(\sum_s (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|\delta_s(g_\Omega, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\ &= C_7 \left((\Omega(2^{-\tilde{s}}))^{-\theta} (\Omega(2^{-\tilde{s}}))^\theta \|e^{i(k_{\tilde{s}}, \cdot)}\|_p^\theta \right)^{1/\theta} = C_7, \end{aligned} \quad (27)$$

при соответствующей постоянной $C_7 > 0$ $g_\Omega \in B_{p,\theta}^\Omega$.

Учитывая соотношения (11), (6) и то, что $S_{Q(N)}(g_\Omega, \cdot) = 0$, получим

$$E_{Q(N)}(g_\Omega)_p \asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(g_\Omega)_p = \|g_\Omega\|_p = C_7 \Omega(2^{-\tilde{s}}) \|e^{i(k_{\tilde{s}}, \cdot)}\|_p \asymp \frac{1}{N}. \quad (28)$$

4) $p = q = 1$. Построим функцию, аналогичную той, которую рассматривал Темляков [13] при получении оценки снизу аппроксимативных характеристик классов Никольского H_p^r и которая затем использовалась Пустовойтовым [2] при установлении оценки снизу величин наилучшего приближения классов H_1^Ω .

Поскольку функция $\Omega(t)$ удовлетворяет условию (S_l) , функция $\Omega(t)/\prod_{j=1}^d t_j^l$ является почти убывающей. Следовательно,

$$\Omega(t) = \frac{\Omega(t)}{\prod_{j=1}^d t_j^l} \prod_{j=1}^d t_j^l \geq C_8 \Omega(1, \dots, 1) \prod_{j=1}^d t_j^l, \quad C_8 > 0,$$

и поэтому найдется постоянная $C_9 > 0$ такая, для которой будет выполняться неравенство

$$\Omega(t) \geq C_9 \prod_{j=1}^d t_j^l. \quad (29)$$

Рассмотрим множество

$$\Theta'(N) = \left\{ s \in \Theta(N) : s_j > \frac{1}{2dl} \log_2(C_9 N), j = 1, \dots, d \right\}.$$

В работе [2] показано, что для множества $\Theta'(N)$ справедливо соотношение

$$|\Theta'(N)| \asymp |\Theta(N)| \asymp (\log_2 N)^{d-1}. \quad (30)$$

Положим $v = [|\Theta'(N)|^{1/d}]$ и разобьем куб π_d на v кубов с ребром $2\pi/v$. Рассмотрим множество $\bar{\Theta}(N) \subset \Theta(N)$ такое, что $|\bar{\Theta}(N)| = v^d$ и установим взаимно однозначное соответствие между множеством $\bar{\Theta}(N)$ и множеством получившихся кубов. Пусть для $s \in \bar{\Theta}(N)$ x^s означает центр соответствующего куба. Положим $u = 2^{[(\log_2 |\Theta(N)|)/d]}$. Отметим, что согласно (7) и (30)

$$u \asymp (\log_2 N)^{(d-1)/d}, \quad (31)$$

$$|\bar{\Theta}(N)| \asymp (\log_2 N)^{d-1}. \quad (32)$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(x) = \sum_{s \in \bar{\Theta}(N)} e^{i(k^s, x)} K_u(x - x^s), \quad k_j^s = 2^{s_j} + 2^{s_j-1}, \quad j = 1, \dots, d,$$

где $K_u(x) = 2^d \prod_{j=1}^d K_u(x_j)$, а $K_u(x_j)$ – ядро Фейера порядка u . В [2] установлено, что

$$E_{Q(N)}(\Psi)_1 \gg |\Theta(N)|, \quad (33)$$

а также показано, что функция $f_1(x) = (C_{10}/N)\Psi(x)$ при соответствующей постоянной $C_{10} > 0$ принадлежит классу H_1^Ω , т.е.

$$\|A_s(f_1, \cdot)\|_1 \ll \Omega(2^{-s}). \quad (34)$$

Используя последнее соотношение, несложно показать, что функция

$$f_2(x) = C_{11} \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \Psi(x), \quad C_{11} > 0,$$

при некоторой постоянной $C_{11} > 0$ принадлежит классу $B_{1,\theta}^\Omega$.

Действительно, согласно (34) и (32) будем иметь

$$\begin{aligned} \|f_2\|_{B_{1,\theta}^\Omega} &\asymp \left(\sum_s (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|A_s(f_2, \cdot)\|_1^\theta \right)^{1/\theta} \\ &= C_{11} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \bar{\Theta}(N)} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|A_s(f_1, \cdot)\|_1^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \bar{\Theta}(N)} 1 \right)^{1/\theta} = (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} |\bar{\Theta}(N)|^{1/\theta} \asymp 1. \end{aligned}$$

Таким образом, принимая во внимание (33) и (7), получим

$$\begin{aligned} E_{Q(N)}(B_{1,\theta}^\Omega)_1 &\gg E_{Q(N)}(f_2)_1 = C_{11} \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} E_{Q(N)}(\Psi)_1 \\ &\gg \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} |\Theta(N)| \asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(1-1/\theta)}. \end{aligned}$$

5) $1 \leq q < p \leq 2$, $p < \theta < \infty$. Рассмотрим функцию

$$f_3(x) = C_{12} \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} u^{-d(1-1/p)} \Psi(x), \quad C_{12} > 0.$$

Покажем, что $f_3 \in B_{p,\theta}^\Omega$. Поскольку для ядра Фейера одной переменной имеет место оценка

$$\|K_u(\tau)\|_q \asymp u^{1-1/q}, \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

воспользовавшись соотношением (30), получим

$$\begin{aligned} \|f_3\|_{B_{p,\theta}^\Omega} &\asymp \left(\sum_s (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|\delta_s(f_3, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} u^{-d(1-\frac{1}{p})} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} (u^{1-1/p})^{d\theta} \right)^{1/\theta} \\ &\asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} N \left(\sum_{s \in \Theta(N)} 1 \right)^{1/\theta} \asymp 1. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая (33) и (31), будем иметь

$$\begin{aligned} E_{Q(N)}(f_3)_1 &= C_{12} \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} u^{-d(1-1/p)} E_{Q(N)}(\Psi)_1 \\ &\gg \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(1-1/\theta)} ((\log_2 N)^{(d-1)/d})^{-d(1-1/p)} \\ &= \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(1/p-1/\theta)}. \end{aligned}$$

6) Если $1 \leq q < p \leq 2$, $1 \leq \theta \leq p$, то установленная выше оценка сверху величины $E_{Q(N)}(B_{p,\theta}^\Omega)_q$ не зависит от размерности d пространства $\mathbb{R}^d$. Поэтому искомую оценку снизу достаточно получить в одномерном случае, т.е. при $d = 1$. Для этого следует повторить выкладки, которые использовались при получении оценки снизу величины $E_{Q(N)}(B_{p,\theta}^\Omega)_q$ при $1 \leq q < p \leq 2$, $p < \theta < \infty$, в предположении $d = 1$.

7) Пусть $1 < q < p \leq \infty$, $p \geq 2$. В этом случае в качестве экстремальных функций будем брать рассмотренные выше функции g_Ω и $f_{N,\theta}$ при $1 \leq \theta < 2$ и $2 \leq \theta < \infty$ соответственно. Покажем, что при $p = \infty$ (случай $1 < p < \infty$ рассмотрен при установлении оценок снизу в 3) и 1); см. (27) и (23) соответственно) $g_\Omega \in B_{\infty,\theta}^\Omega$, $f_{N,\theta} \in B_{\infty,\theta}^\Omega$. Имеем

$$\begin{aligned} \|g_\Omega\|_{B_{\infty,\theta}^\Omega} &\asymp \left(\sum_s (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|A_s(g_\Omega, \cdot)\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \asymp ((\Omega(2^{-\tilde{s}}))^{-\theta} (\Omega(2^{-\tilde{s}}))^\theta)^{1/\theta} = 1, \\ \|f_{N,\theta}\|_{B_{\infty,\theta}^\Omega} &\asymp \left(\sum_s (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|A_s(f_{N,\theta}, \cdot)\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\asymp (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} (\Omega(2^{-s}))^\theta \|A_s(e^{i(k^s, \cdot)}, \cdot)\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\asymp (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} 1 \right)^{1/\theta} \asymp 1. \end{aligned}$$

Тогда для $1 \leq \theta < 2$, $2 \leq p \leq \infty$, аналогично как и в (28) можно показать, что

$$E_{Q(N)}(B_{p,\theta}^\Omega)_q \gg \|g_\Omega\|_q \asymp \frac{1}{N}.$$

Если же $2 \leq \theta < \infty$, $2 \leq p \leq \infty$, то учитывая (11), (24), теорему А, соотношения (6) и (7), получаем

$$\begin{aligned} E_{Q(N)}(B_{p,\theta}^\Omega)_q &\asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(B_{p,\theta}^\Omega)_q \geq \mathcal{E}_{Q(N)}(f_{N,\theta})_q = \|f_{N,\theta}\|_q \asymp \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f_{N,\theta}, \cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \\ &= C_5 (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \left\| \left(\sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^2 |e^{i(k_s, \cdot)}|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \\ &\asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} 1 \right)^{1/2} \asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(1/2-1/\theta)}. \end{aligned}$$

Оценки снизу установлены.

Теорема доказана.

В заключение работы прокомментируем полученные результаты и приведем некоторые следствия.

Предположим, что функция $\omega(\tau)$ одной переменной типа модуля непрерывности порядка l удовлетворяет условиям (S) и (S_l) . Введем смешанный модуль непрерывности порядка l вида

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d) = \omega \left(\prod_{j=1}^d t_j \right). \quad (35)$$

Нетрудно видеть, что при условиях, наложенных на ω , функция $\Omega(t)$ является функцией типа смешанного модуля непрерывности порядка l , которая удовлетворяет условиям (S) и (S_l) .

Принимая во внимание специальный вид функции $\Omega(t)$, заданной формулой (35), в качестве аппарата приближения будем брать тригонометрические полиномы с “номерами” гармоник из множества

$$Q_n = \bigcup_{\|s\|_1 \leq n} \rho(s),$$

которое называют *ступенчатым гиперболическим крестом*, и которое определенным образом связано с множеством $Q(N)$. Об этом более подробно будет идти речь ниже.

Известно (см., например, работы [12], [14], [15] и ссылки в них), что подпространство тригонометрических полиномов с “номерами” гармоник из Q_n во многих случаях есть оптимальным аппаратом приближения для классов $B_{p,\theta}^r$, которые получаются из $B_{p,\theta}^\Omega$ при

$$\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^r, \quad 0 < r < l.$$

Обратим внимание, что число $n \in \mathbb{N}$, которое присутствует в определении множества Q_n , согласно (1)–(6) находится из соотношения

$$\omega(2^{-n}) \asymp \frac{1}{N}. \quad (36)$$

Приведем кроме (36) еще одно соотношение, которое связывает n и N , и которое будем использовать ниже.

Поскольку $\Omega(t)$ удовлетворяет условию (S) при некотором $\alpha > 0$, функция $\Omega(t)/\prod_{j=1}^d t_j^\alpha$ является почти возрастающей по каждой переменной и поэтому

$$\Omega(t) = \frac{\Omega(t)}{\prod_{j=1}^d t_j^\alpha} \prod_{j=1}^d t_j^\alpha \leq C_{13} \Omega(1, \dots, 1) \prod_{j=1}^d t_j^\alpha.$$

Иными словами, найдется постоянная $C_{14} > 0$ такая, что будет выполняться неравенство

$$\Omega(t) \leq C_{14} \prod_{j=1}^d t_j^\alpha. \quad (37)$$

Следовательно, согласно неравенствам (29) и (37) можем записать

$$C_9 2^{-l\|s\|_1} \leq \Omega(2^{-s}) \leq C_{14} 2^{-\alpha\|s\|_1}. \quad (38)$$

Таким образом, принимая во внимание, что $s \in \Theta(N)$ и функция $\Omega(t)$ имеет вид (35), после элементарных преобразований из (5) и (38) получим

$$\log_2 N \asymp n. \quad (39)$$

Наконец, воспользовавшись результатом теоремы 1 в силу соотношений (36) и (39) приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2. Пусть параметры p и q удовлетворяют условиям теоремы 1, а функция $\Omega(t)$ определена формулой (35). Тогда для $1 \leq \theta < \infty$

$$E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/p_0-1/\theta)_+}. \quad (40)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях теорем 1 и 2 (кроме случая $q = 1$) из соотношений (17) и (40), принимая во внимание (11), получим

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(B_{p,\theta}^\Omega)_q \asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(1/p_0-1/\theta)_+}, \quad (41)$$

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/p_0-1/\theta)_+}. \quad (42)$$

Оценки (40) и (42) при некоторых соотношениях между параметрами p и q установлены раньше. Именно, при $1 < p = q < \infty$ – в работе [6], а при $1 < q < p < \infty$, $p \geq 2$, – в работе [16].

Соотношения, аналогичные к (17), (40)–(42) для случая $\theta = \infty$, т.е. когда $B_{p,\infty}^\Omega = H_p^\Omega$, получены Пустовойтовым в работах [2], [7], [17].

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. С. Романюку за полезные замечания и ценные советы, сделанные им в процессе обсуждения результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, “Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций”, Тр. ММО, **5**, УРСС, М., 1956, 483–522.

- [2] Н. Н. Пустовойтов, “Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности”, *Матем. заметки*, **65**:1 (1999), 107–117.
- [3] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969.
- [4] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 1, 2, Мир, М., 1965.
- [5] V. N. Temlyakov, *Approximation of Periodic Functions*, Comput. Math. Anal. Ser., Nova Science Publ., Commack, NY, 1993.
- [6] S. Yongsheng, W. Heping, “Representation and Approximation of Multivariate Periodic Functions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness”, *Теория приближений. Гармонический анализ*, Сборник статей, посвященный памяти профессора Сергея Борисовича Стечкина, Тр. МИАН, **219**, Наука, М., 1997, 356–377.
- [7] Н. Н. Пустовойтов, “Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности”, *Anal. Math.*, **20**:1 (1994), 35–48.
- [8] С. А. Стасюк, О. В. Федунук, “Апроксимативні характеристики класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних”, *Укр. матем. журн.*, **58**:5 (2006), 692–704.
- [9] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, “Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 13*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **187**, Наука, М., 1989, 143–161.
- [10] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Полла, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.
- [11] Р. С. Исмаилов, “Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами”, *УМН*, **29**:3 (1974), 161–178.
- [12] А. С. Романюк, “Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q ”, *Укр. матем. журн.*, **43**:10 (1991), 1398–1408.
- [13] В. Н. Темляков, “Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью”, *Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций* (Душанбе, август 1986 г.), Тр. МИАН СССР, **189**, Наука, М., 1989, 138–168.
- [14] А. С. Романюк, “Приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения”, *Матем. сб.*, **195**:2 (2004), 91–116.
- [15] А. С. Романюк, “Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:2 (2006), 69–98.
- [16] С. А. Стасюк, “Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних”, *Укр. матем. журн.*, **56**:11 (2004), 1557–1568.
- [17] Н. Н. Пустовойтов, “О приближении и характеристизации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида”, *Anal. Math.*, **29**:3 (2003), 201–218.

С. А. Стасюк

Институт математики НАН Украины, г. Киев

E-mail: stasyuk@imath.kiev.ua

Поступило

22.05.2007