Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, Теорема периодичности Ботта и дифференциалы спектральной последовательности Адамса гомотопических групп сфер, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 5, 763–771

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4055>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 08:27:16

УДК 513.83

Теорема периодичности Ботта и дифференциалы спектральной последовательности Адамса гомотопических групп сфер

В. А. Смирнов

Теорема периодичности Ботта применяется для вычисления высших дифференциалов спектральной последовательности Адамса гомотопических групп $\pi_*(SO)$. Полученные формулы используются для нахождения высших дифференциалов спектральной последовательности Адамса гомотопических групп сфер.

Библиография: 12 названий.

Один из основных методов вычисления гомотопических групп топологических пространств и, в частности, гомотопических групп сфер, основан на использовании спектральных последовательностей. Первую такую последовательность построил Адамс [1]. Она сходится к стабильным гомотопическим группам топологического пространства, и ее начальный член выражается через алгебру Стиррода и гомологии пространства. В дальнейшем Масси и Петерсон [2], а также Боусфилд и Кан [3] построили нестабильные аналоги спектральной последовательности Адамса, сходящиеся к гомотопическим группам топологического пространства.

Для описания начального члена E^1 этих спектральных последовательностей используется алгебра Λ [4]. Это дифференциальная градуированная алгебра, порожденная образующими λ_i размерности $i \geq 0$ и соотношениями

$$\lambda_{2i+n+1}\lambda_i = \sum_j \binom{n-j-1}{j} \lambda_{2i+j+1}\lambda_{i+n-j}.$$

Здесь и в дальнейшем основным кольцом считается поле $\mathbb{Z}/2$.

Как градуированный модуль алгебра Λ порождается допустимыми последовательностями $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$, т.е. такими, у которых $i_1 \leq 2i_2, \dots, i_{k-1} \leq 2i_k$.

Дифференциал на образующих определен формулой

$$d(\lambda_i) = \sum_j \binom{i-j}{j} \lambda_{j-1} \lambda_{i-j}.$$

Алгебра Λ изоморфна члену E^1 спектральной последовательности Адамса стабильных гомотопических групп сфер, а ее гомологии относительно дифференциала d изоморфны члену E^2 этой последовательности.

Для градуированного модуля M обозначим через $\Lambda(M)$ подмодуль тензорного произведения $\Lambda \otimes M$, порожденный элементами вида $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes x_n$, где x_n — n -мерная образующая в M , $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$ — допустимая последовательность, для которой $i_k < n$.

Градуированный модуль M называется Λ -комодулем, если задано отображение $\varphi: M \rightarrow \Lambda(M)$, понижающее размерность на единицу и удовлетворяющее соотношению $d(\varphi) + \varphi \cup \varphi = 0$.

Для Λ -комодуля M на $\Lambda(M)$ можно ввести новый дифференциал d_φ , положив $d_\varphi = d + \varphi \cap$. Соответствующий комплекс обозначим $\Lambda_\varphi(M)$.

Масси и Петерсон в работе [2] доказали, что если гомологии односвязного топологического пространства изоморфны внешней алгебре над градуированным модулем M , то имеет место спектральная последовательность, сходящаяся к гомотопическим группам этого пространства, член E^1 которой изоморфен $\Lambda(M)$. Более того, операции Стиррода на гомологиях топологического пространства определяют на M структуру Λ -комодуля, для которой гомологии комплекса $\Lambda_\varphi(M)$ изоморфны члену E^2 этой спектральной последовательности.

В частности, гомологии n -мерной сферы S^n имеют тривиальную структуру Λ -комодуля и, следовательно, гомологии комплекса $\Lambda(S^n)$ будут изоморфны члену E^2 спектральной последовательности Адамса гомотопических групп n -мерной сферы.

Задача нахождения высших дифференциалов спектральной последовательности Адамса является чрезвычайно трудной. Для ее решения использовались как геометрические, так и алгебраические методы. Первоначально высшие дифференциалы определялись геометрически через высшие гомологические операции на гомологиях топологического пространства [5]. Однако геометрическая конструкция высших гомологических операций является довольно сложной и позволяет провести вычисления только в некоторых частных случаях.

Другой, алгебраический путь, состоит в использовании структуры E_∞ -коалгебры, имеющейся на гомологиях топологического пространства. В работе [6] было показано, что эта структура определяет слабый гомотопический тип топологического пространства и может быть использована для вычисления высших дифференциалов спектральной последовательности Адамса. Более того, с помощью этой структуры на $\Lambda(M)$ можно определить дифференциал $\tilde{d}$, дополняющий дифференциал d_φ , гомологии относительно которого изоморфны члену E^∞ спектральной последовательности Адамса. На основе этого в работах [7], [8] были проведены некоторые вычисления, однако и здесь возникают серьезные трудности, не позволяющие довести их до конца.

Несмотря на то, что задача нахождения высших дифференциалов спектральной последовательности Адамса до сих пор не решена, тем не менее гомотопические группы некоторых топологических пространств удается полностью вычислить. Среди таких пространств классические топологические группы SO , U , Sp , вычисления для которых проводятся с использованием периодичности Ботта [9]: $\pi_i(SO) \cong \pi_{i+8}(SO)$, $\pi_i(U) \cong \pi_{i+2}(U)$, $\pi_i(Sp) \cong \pi_{i+8}(Sp)$.

Ситуация здесь интересна тем, что гомотопические группы классических топологических групп вычисляются без использования спектральной последовательности Адамса. Более того, с помощью спектральной последовательности Адамса вычисления этих групп провести не удастся. Так, до сих пор не вычислены члены E^2

соответствующих спектральных последовательностей, не говоря уже о высших дифференциалах.

Здесь мы применим периодичность Ботта для вычисления высших дифференциалов спектральной последовательности Адамса гомотопических групп $\pi_*(SO)$ и используем полученные формулы для нахождения высших дифференциалов спектральной последовательности Адамса гомотопических групп сфер.

Напомним [10], что гомологии $H_*(SO)$ специальной ортогональной группы SO изоморфны внешней алгебре над градуированным модулем X , порожденным элементами x_n размерности $n \geq 1$. При этом сам градуированный модуль X является модулем гомологий вещественного проективного пространства RP^∞ . Гомологии $H_*(U)$ унитарной группы U изоморфны внешней алгебре над градуированным модулем Y , порожденным элементами y_{2n-1} , $n \geq 1$, размерности $2n - 1$. Гомологии $H_*(SU)$ специальной унитарной группы SU изоморфны внешней алгебре над градуированным модулем Y' , порожденным элементами y_{2n+1} , $n \geq 1$, размерности $2n + 1$. Гомологии $H_*(Sp)$ симплектической группы Sp изоморфны внешней алгебре над градуированным модулем Z , порожденным элементами z_{4n-1} , $n \geq 1$, размерности $4n - 1$.

Из сказанного выше следует, что для гомотопических групп $\pi_*(SO)$, $\pi_*(U)$, $\pi_*(Sp)$ имеют место спектральные последовательности, начальные члены которых изоморфны соответственно комплексам $\Lambda(X)$, $\Lambda(Y)$, $\Lambda(Z)$. Дифференциал d_φ на образующих $x_n \in X$, $y_{2n-1} \in Y$, $z_{4n-1} \in Z$ задается формулами

$$\begin{aligned} d_\varphi(x_n) &= \sum_i \binom{n-i}{i} \lambda_{i-1} x_{n-i}, \\ d_\varphi(y_{2n-1}) &= \sum_i \binom{2n-1-i}{i} \lambda_{i-1} y_{2n-1-i} = \sum_i \binom{n-i-1}{i} \lambda_{2i-1} y_{2(n-i)-1}, \\ d_\varphi(z_{4n-1}) &= \sum_i \binom{4n-1-i}{i} \lambda_{i-1} z_{4n-1-i} = \sum_i \binom{n-i-1}{i} \lambda_{4i-1} z_{4(n-i)-1}. \end{aligned}$$

Более того, в комплексы $\Lambda(X)$, $\Lambda(Y)$, $\Lambda(Z)$ можно ввести новые дифференциалы $\tilde{d}$, гомологии относительно которых будут изоморфны членам E^∞ соответствующих спектральных последовательностей Адамса.

Отметим связь между группами $\pi_*(SO)$ и стабильными гомотопическими группами сфер σ_* , которая имеется благодаря J -гомоморфизму $J: \pi_*(SO) \rightarrow \sigma_*$ [4]. На члене E^1 спектральной последовательности Адамса он задается формулой $J(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes x_n) = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \lambda_n$ и, в частности, $J(x_n) = \lambda_n$.

Из этого следует, что для вычисления дифференциала $\tilde{d}$ на элементах λ_n комплекса Λ достаточно найти его на элементах x_n комплекса $\Lambda(X)$, $x_n \in X = H_*(RP^\infty)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если топологическое пространство есть специальная ортогональная группа SO , то дифференциал $\tilde{d}$ в $\Lambda(X)$ можно выбрать таким образом, чтобы высшие дифференциалы на элементах x_{2m} и x_{4m+1} были равны нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что дифференциал $\tilde{d}$ можно выбрать так, чтобы высшие дифференциалы на элементах x_{2m} были равны нулю.

Пусть $\tilde{d}$ – дифференциал в $\Lambda(X)$, гомологии относительно которого изоморфны гомотопическим группам $\pi_*(SO)$. Определим дифференциал d' на $\Lambda(X)$, положив

$$d'(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes x_n) = \begin{cases} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \lambda_{m-1} \otimes x_m, & n = 2m, \\ 0, & n = 2m - 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что гомологии $\Lambda'(X)$ относительно этого дифференциала порождаются элементами $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes x_{2m-1}$, где $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$ – допустимая последовательность, для которой $i_k < 2m - 2$.

Имеет место цепная эквивалентность комплекса $\Lambda(X)$ с дифференциалом d' и градуированного модуля $\Lambda'(X)$, рассматриваемого как комплекс с нулевым дифференциалом. Соответствующие отображения $\xi': \Lambda'(X) \rightarrow \Lambda(X)$, $\eta': \Lambda(X) \rightarrow \Lambda'(X)$ и гомотопия $h': \Lambda(X) \rightarrow \Lambda(X)$ задаются формулами

$$\begin{aligned} \xi'(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes x_{2m-1}) &= \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes x_{2m-1}, \\ \eta'(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes x_n) &= \begin{cases} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes x_n, & n = 2m - 1, \\ 0, & n = 2m, \end{cases} \\ h'(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{k-1}} \lambda_{i_k} \otimes x_n) &= \begin{cases} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{k-1}} \otimes x_{2n}, & i_k = n - 1, \\ 0, & i_k < n - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Из теории возмущений [11] следует, что на $\Lambda'(X)$ можно определить дифференциал $\tilde{d}'$, отображения $\tilde{\xi}': \Lambda'(X) \rightarrow \Lambda(X)$, $\tilde{\eta}': \Lambda(X) \rightarrow \Lambda'(X)$ и гомотопию $\tilde{h}': \Lambda(X) \rightarrow \Lambda(X)$ так, что комплекс $\Lambda'(X)$ с этим дифференциалом будет цепно эквивалентен комплексу $\Lambda(X)$ с дифференциалом $\tilde{d}$:

$$\begin{aligned} \tilde{d}' &= \eta' t \xi' + \eta' t h' t \xi' + \eta' t h' t h' t \xi' + \dots, \\ \tilde{\xi}' &= \xi' + h' t \xi' + h' t h' t \xi' + \dots, \\ \tilde{\eta}' &= \eta' + \eta' t h' + \eta' t h' t h' + \dots, \\ \tilde{h}' &= h' + h' t h' + h' t h' t h' + \dots, \end{aligned}$$

где $t = \tilde{d} - d'$.

Определим дифференциал $\hat{d}'$ на $\Lambda(X)$, положив $\hat{d}' = d' + \xi' \tilde{d}' \eta'$. Непосредственные вычисления показывают, что $\hat{d}'$ является дифференциалом на $\Lambda(X)$, высшие компоненты которого равны нулю на элементах x_{2m} .

Сделаем еще один шаг, подправив дифференциал $\hat{d}'$ так, чтобы его высшие компоненты были равны нулю и на элементах x_{4m+1} .

Определим дифференциал d'' на $\Lambda'(X)$, положив

$$d''(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes x_n) = \begin{cases} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \lambda_{2m-1} \otimes x_{2m+1}, & n = 4m + 1, \\ 0, & n = 4m + 3. \end{cases}$$

Легко видеть, что гомологии $\Lambda''(X)$ относительно этого дифференциала порождаются элементами $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes x_{4m+3}$, где $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$ – допустимая последовательность, для которой $i_k < 4m + 1$.

Имеет место цепная эквивалентность комплекса $\Lambda'(X)$ с дифференциалом d'' и градуированного модуля $\Lambda''(X)$, рассматриваемого как комплекс с нулевым дифференциалом. Соответствующие отображения $\xi'': \Lambda''(X) \rightarrow \Lambda'(X)$, $\eta'': \Lambda'(X) \rightarrow \Lambda''(X)$ и гомотопия $h'': \Lambda'(X) \rightarrow \Lambda'(X)$ задаются формулами

$$\begin{aligned}\xi''(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes x_{4m+3}) &= \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes x_{4m+3}, \\ \eta''(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes x_n) &= \begin{cases} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes x_n, & n = 4m + 3, \\ 0, & n = 4m + 1, \end{cases} \\ h''(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{k-1}} \lambda_{i_k} \otimes x_{2n+1}) &= \begin{cases} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{k-1}} \otimes x_{4n+1}, & i_k = 2n - 1, \\ 0, & i_k < 2n - 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Из теории возмущений [11] следует, что на $\Lambda''(X)$ можно определить дифференциал $\tilde{d}''$, отображения $\tilde{\xi}'': \Lambda''(X) \rightarrow \Lambda'(X)$, $\tilde{\eta}'': \Lambda'(X) \rightarrow \Lambda''(X)$ и гомотопию $\tilde{h}'': \Lambda'(X) \rightarrow \Lambda'(X)$ так, что комплекс $\Lambda''(X)$ с этим дифференциалом будет цепно эквивалентен комплексу $\Lambda'(X)$ с дифференциалом $\tilde{d}'$.

Формулы для $\tilde{d}''$, $\tilde{\xi}''$, $\tilde{\eta}''$, $\tilde{h}''$ аналогичны соответствующим формулам для $\tilde{d}'$, $\tilde{\xi}'$, $\tilde{\eta}'$, $\tilde{h}'$.

Определим на $\Lambda(X)$ дифференциал $\hat{d}$, положив $\hat{d} = d' + \xi' d'' \eta' + \xi' \xi'' \tilde{d}'' \eta'' \eta'$. Непосредственная проверка показывает, что $\hat{d}$ является искомым дифференциалом на $\Lambda(X)$,

Выясним, что дает периодичность Ботта $\pi_i(U) \cong \pi_i(\Omega^2 SU)$ для члена E^1 и дифференциалов спектральной последовательности Адамса. Для этого сначала вычислим гомологии $H_*(\Omega^2 SU)$.

Воспользуемся тем, что если гомологии односвязного пространства изоморфны внешней алгебре над градуированным модулем M , коумножение на котором тривиально, то гомологии пространства петель над этим пространством изоморфны алгебре многочленов над денадстройкой $S^{-1}M$ [5].

Из этого, например, следует, что гомологии $H_*(\Omega SU)$ пространства петель над специальной унитарной группой изоморфны алгебре многочленов от образующих $x_{2n} = s^{-1}y_{2n+1}$ размерности $2n$.

Для того, чтобы вычислить гомологии $H_*(\Omega^2 SU)$ двукратного пространства петель над SU , представим алгебру многочленов от образующих x_{2n} как внешнюю алгебру от образующих $x_{2n}^{2^k}$.

Коумножение на элементах x_{2n} не является тривиальным, а задается формулой

$$\nabla(x_{2n}^{2^k}) = \sum_i x_{2i}^{2^k} \otimes x_{2(n-i)}^{2^k}.$$

Рассматривая спектральную последовательность гомологий $H_*(\Omega^2 SU)$, получим, что член E^1 этой спектральной последовательности будет изоморфен алгебре многочленов от образующих $s^{-1}(x_{2n}^{2^k})$. Ее также можно представлять как внешнюю алгебру от образующих $(s^{-1}(x_{2n}^{2^k}))^{2^i}$.

Дифференциал d^1 на образующих задается формулой

$$d^1(s^{-1}(x_{2n}^{2^k})) = \begin{cases} (s^{-1}(x_{2n}^{2^k}))^2, & n = 2i, \\ 0, & n = 2i + 1. \end{cases}$$

Из этой формулы следует, что член E^2 спектральной последовательности будет изоморфен внешней алгебре от образующих $s^{-1}(x_{4i+2}^{2^k})$. При этом, так как высшие дифференциалы этой спектральной последовательности равны нулю, то и гомологии $H_*(\Omega^2 SU)$ будут изоморфны этой же внешней алгебре.

Таким образом, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Член E^1 спектральной последовательности гомологий пространства $\Omega^2 SU$ изоморфен внешней алгебре от образующих $(s^{-1}(x_{2n}^{2^k}))^{2^i}$. Сами гомологии изоморфны внешней алгебре от образующих $s^{-1}(x_{4i+2}^{2^k})$.

Заметим, что любое нечетное натуральное число $2n - 1$ единственным образом представляется в виде $2^k(4i + 2) - 1$ и, значит, имеет место взаимно однозначное соответствие между образующими y_{2n-1} гомологий $H_*(U)$ и образующими $s^{-1}(x_{4i+2}^{2^k})$ гомологий $H_*(\Omega^2 SU)$.

Это соответствие порождает изоморфизм гомологий $H_*(U) \cong H_*(\Omega^2 SU)$. Как показано Боттом [9], он индуцируется непрерывным отображением $U \rightarrow \Omega^2 SU$ и, следовательно, индуцирует изоморфизм гомотопических групп

$$\pi_*(U) \rightarrow \pi_*(\Omega^2 SU) \cong \pi_{*+2}(U),$$

который и дает периодичность гомотопических групп $\pi_*(U)$.

Перепишем указанные выше образующие гомологий $H_*(\Omega^2 SU)$ с использованием элементов алгебры Дайера–Лашофа, действующих на гомологиях итерированных пространств петель [12].

Напомним, что алгебра Дайера–Лашофа $\mathcal{R}$ порождается элементами Q^i размерности $i \geq 0$ и соотношениями

$$Q^{2i+n+1}Q^i = \sum_j \binom{n-j-1}{j} Q^{2i+j+1}Q^{i+n-j}.$$

Как градуированный модуль алгебра Дайера–Лашофа порождается допустимыми последовательностями $Q^{i_1} \dots Q^{i_k}$, т.е. такими, у которых $i_1 \leq 2i_2, \dots, i_{k-1} \leq 2i_k$.

Напомним, что избыточностью допустимой последовательности $Q^{i_1} \dots Q^{i_k}$ называется число $i_1 - \dots - i_k$.

Для градуированного модуля M обозначим $\mathcal{R}(M)$ подмодуль $\mathcal{R} \otimes M$, порожденный элементами вида $Q^{i_1} \dots Q^{i_k} \otimes x_n$, где x_n — n -мерная образующая в M , $Q^{i_1} \dots Q^{i_k}$ — допустимая последовательность избыточности, большей или равной n . Обозначим через $\mathcal{R}_m(M)$ подмодуль $\mathcal{R}(M)$, порожденный указанными элементами, для которых $i_k < n + m$.

Найденные выше образующие члена E^1 спектральной последовательности гомологий $H_*(\Omega^2 SU)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} s^{-1}(x_{2n}^{2^k}) &= Q^{2^k n} \dots Q^{2n} \otimes s^{-2}y_{2n+1}, \\ (s^{-1}(x_{2n}))^{2^i} &= Q^{2^i n - 2^{i-1}} \dots Q^{2n-1} \otimes s^{-2}y_{2n+1}, \\ (s^{-1}(x_{2n}^{2^k}))^{2^i} &= Q^{2^{k+i} n - 2^{i-1}} \dots Q^{2^{k+1} n - 1} Q^{2^k n} \dots Q^{2n} \otimes s^{-2}y_{2n+1}. \end{aligned}$$

Дифференциал на образующих задается формулой

$$d(Q^{2^k n} \dots Q^{2n} \otimes s^{-2}y_{2n+1}) = \begin{cases} (Q^{2^k i} \dots Q^{2i} \otimes s^{-2}y_{2i+1})^2, & n = 2i, \\ 0, & n = 2i + 1. \end{cases}$$

Для образующих гомологий $H_*(\Omega^2 SU)$ имеем

$$s^{-1}(x_{4m+2}^{2^k}) = s^{-1}Q^{2^{k-1}(4m+2)} \dots Q^{4m+2} \otimes s^{-1}y_{4m+3}.$$

Таким образом, предложение 2 можно переформулировать в следующем виде.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2'. Член E^1 спектральной последовательности гомологий пространства $\Omega^2 SU$ изоморфен внешней алгебре над модулем $\mathcal{R}_2(S^{-2}Y)$. Сами гомологии изоморфны внешней алгебре над модулем $S^{-1}\mathcal{R}_1(S^{-1}Z)$.

Перепишем найденные образующие с использованием элементов алгебры Λ . Напомним, что избыточностью допустимой последовательности $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$ называется число $i_1 - \dots - i_k$. Обозначим $\Lambda_m(M)$ подмодуль $\Lambda(M)$, порожденный элементами $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes x_n$, в которых x_n — n -мерная образующая в M , $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$ — допустимая последовательность избыточности, большей или равной $n - m$.

Алгебры $\mathcal{R}$ и Λ изоморфны; элементам Q^i алгебры $\mathcal{R}$ соответствуют элементы λ_i алгебры Λ . Для градуированного модуля M и $m \geq 1$ это соответствие задает изоморфизм $\mathcal{R}(S^{-m}M) \cong S^{-m}\Lambda_m(M)$.

Указанные выше образующие члена E^1 спектральной последовательности гомологий $H_*(\Omega^2 SU)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} s^{-1}(x_{2n}^{2^k}) &= s^{-2}\lambda_{2^k n} \dots \lambda_{2n} \otimes y_{2n+1}, \\ (s^{-1}(x_{2n}))^{2^i} &= s^{-2}\lambda_{2^{i-1}n-2^{i-1}} \dots \lambda_{2n-1} \otimes y_{2n+1}, \\ (s^{-1}(x_{2n}^{2^k}))^{2^i} &= s^{-2}\lambda_{2^{k+i}n-2^{i-1}} \dots \lambda_{2^{k+1}n-1}\lambda_{2^k n}\lambda_{2n} \otimes y_{2n+1}. \end{aligned}$$

Для образующих гомологий $H_*(\Omega^2 SU)$ имеем

$$s^{-1}(x_{4m+2}^{2^k}) = s^{-2}\lambda_{2^{k-1}(4m+2)} \dots \lambda_{4m+2} \otimes y_{4m+3}.$$

Таким образом, предложение 2' можно переписать в следующем виде.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2''. Член E^1 спектральной последовательности гомологий пространства $\Omega^2 SU$ изоморфен внешней алгебре над модулем $S^{-2}\Lambda_2(Y)$. Сами гомологии $H_*(\Omega^2 SU)$ изоморфны внешней алгебре над модулем $S^{-2}\Lambda_1(Z)$.

Изоморфизм $H_*(U) \rightarrow H_*(\Omega^2 SU)$ индуцирует отображение

$$f: \Lambda(Y) \rightarrow \Lambda(S^{-2}\Lambda_2(Y)),$$

задаваемое на образующих формулами

$$\begin{aligned} f(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes y_{4m+1}) &= \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes s^{-2}y_{4m+3}, \\ f(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes y_{2^k(2m+1)-1}) &= \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes s^{-2}\lambda_{2^{k-1}(2m+1)} \dots \lambda_{2(2m+1)} \otimes y_{4m+3}. \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что для градуированного модуля M и $m \geq 1$ имеет место изоморфизм $g_m: \Lambda(S^{-m}\Lambda_m(M)) \cong S^{-m}\Lambda(M)$, задаваемый на образующих формулой

$$g_m(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} s^{-m}\lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_l} \otimes x_n) = s^{-m}\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}\lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_l} \otimes x_n.$$

С учетом этого, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Отображение $\nu: \Lambda(Y) \rightarrow \Lambda(Y)$, повышающее размерность на два и являющееся композицией отображений f , g_2 и двукратной надстройки, задаваемое на образующих формулами*

$$\begin{aligned}\nu(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes y_{4m+1}) &= \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes y_{4m+3}, \\ \nu(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \otimes y_{2^k(2m+1)-1}) &= \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \lambda_{2^{k-1}(2m+1)} \dots \lambda_{2(2m+1)} \otimes y_{4m+3},\end{aligned}$$

перестановочно с дифференциалами и индуцирует изоморфизм спектральных последовательностей гомотопических групп $\pi_*(U)$ и $\pi_{*+2}(U)$.

Собирая вместе все вышеизложенное, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Дифференциал в комплексе $\Lambda(X)$, где $X = H_*(RP^\infty)$, гомологии относительно которого изоморфны члену E^∞ гомотопических групп $\pi_*(SO)$, можно выбрать так, чтобы высшие дифференциалы δ были равны нулю на образующих x_{2m} и x_{4m+1} , а на образующих x_{4m+3} задавались формулами*

$$\delta(x_{4m+3}) = \sum_{i \geq 0} \binom{m-i-1}{i} \lambda_{4i+1} \nu(x_{4(m-i)-1}),$$

где

$$\nu(x_{2^k(2l+1)-1}) = \lambda_{2^{k-1}(2l+1)} \dots \lambda_{2(2l+1)} x_{4l+3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 1 следует, что дифференциал $\tilde{d}$ в $\Lambda(X)$ можно выбрать так, чтобы высшие дифференциалы δ были равны нулю на образующих x_{2m} и x_{4m+1} . Образующие x_{4m+3} являются образами образующих x_{4m+1} при отображении ν , $\nu(x_{4m+1}) = x_{4m+3}$. Учитывая, что отображение ν перестановочно с дифференциалами, получаем

$$\tilde{d}(x_{4m+3}) = \nu(d(x_{4m+1})) = \sum_i \binom{2m-i}{i} \lambda_{2i-1} \nu(x_{4m-2i+1}).$$

При этом, если i – четно, то $\nu(x_{4m-2i+1}) = x_{4m-2i+3}$. Соответствующие слагаемые являются компонентами дифференциала d_1 и не дают значений высших дифференциалов δ . Отбрасывая эти слагаемые, получим сумму

$$\sum_i \binom{2m-2i-1}{2i+1} \lambda_{4i+1} \nu(x_{4(m-i)-1}) = \sum_i \binom{m-i-1}{i} \lambda_{4i+1} \nu(x_{4(m-i)-1}).$$

Используя формулы для отображения ν предложения 3, окончательно получаем требуемое выражение для высших дифференциалов δ .

СЛЕДСТВИЕ. *Дифференциал в алгебре Λ , гомологии относительно которого изоморфны члену E^∞ стабильных гомотопических групп сфер, можно выбрать так, чтобы высшие дифференциалы δ были равны нулю на образующих λ_{2m} и λ_{4m+1} , а на образующих λ_{4m+3} задавались формулами*

$$\delta(\lambda_{4m+3}) = \sum_{i \geq 0} \binom{m-i-1}{i} \lambda_{4i+1} \nu(\lambda_{4(m-i)-1}),$$

где

$$\nu(\lambda_{2^k(2l+1)-1}) = \lambda_{2^{k-1}(2l+1)} \cdots \lambda_{2(2l+1)} \lambda_{4l+3}.$$

В частности, имеют место формулы

$$\delta(\lambda_7) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad \delta(\lambda_{11}) = \lambda_1 \lambda_4 \lambda_2 \lambda_3, \quad \delta(\lambda_{15}) = \lambda_1 \lambda_6 \lambda_7 + \lambda_5 \lambda_4 \lambda_2 \lambda_3.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. F. Adams, “On the structure and applications of the Steenrod algebra”, *Comment. Math. Helv.*, **32**:1 (1958), 180–214.
- [2] W. S. Massey, F. P. Peterson, *The mod 2 Cohomology Structure of Certain Fibre Spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., **74**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1967.
- [3] A. K. Bousfield, D. M. Kan, “The homotopy spectral sequence of a space with coefficients in a ring”, *Topology*, **11**:1 (1972), 79–106.
- [4] Дж. Уайтхед, *Новейшие достижения в теории гомотопий*, Мир, М., 1974.
- [5] Р. Мошер, М. Тангора, *Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий*, Мир, М., 1970.
- [6] V. A. Smirnov, *Simplicial and Operad Methods in Algebraic Topology*, Transl. Math. Monogr., **198**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [7] В. А. Смирнов, “ A_∞ -структура и дифференциалы спектральной последовательности Адамса”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:5 (2002), 193–224.
- [8] В. А. Смирнов, “Вторичные операции Стинрода на когомологиях бесконечномерных проективных пространств”, *Матем. заметки*, **79**:3 (2006), 476–480.
- [9] R. Bott, “The stable homotopy for the classical groups”, *Ann. of Math. (2)*, **70**:2 (1959), 313–337.
- [10] Р. М. Свитцер, *Алгебраическая топология – гомотопии и гомологии*, Наука, М., 1985.
- [11] V. K. A. M. Gugenheim, L. A. Lambe, J. D. Stasheff, “Perturbation theory in differential homological algebra. II”, *Illinois J. Math.*, **35**:3 (1991), 357–373.
- [12] E. Dyer, R. Lashof, “Homology of iterated loop spaces”, *Amer. J. Math.*, **84**:1 (1962), 35–88.

В. А. Смирнов

Московский педагогический государственный университет

E-mail: V.Smirnov@ru.net

Поступило

08.05.2007