Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Юхименко, Об одном классе функций типа синуса,
Матем. заметки, 2008, том 83, выпуск 6, 941–954

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4056>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:39:11

Об одном классе функций типа синуса

А. А. Юхименко

Рассмотрено бесконечное произведение $F_\Lambda(z)$ с нулями $\lambda_n = n + l(|n|)$, $n \in \mathbb{Z}$, где $l(t)$ – вогнутая функция и $l(t) = o(t)$. Найден критерий принадлежности $F_\Lambda(z)$ классу функций типа синуса. В частном случае, когда $l(t)$ – правильно меняющаяся функция, для $F_\Lambda(z)$ найдены точные асимптотические оценки.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. В связи с задачей о базисах Рисса из экспонент в $L^2(-\pi, \pi)$ Левиным в конце 1960-х годов [1] были введены так называемые *функции типа синуса* (ф.т.с), т.е. целые функции экспоненциального типа, для которых выполняется оценка

$$|F(z)| \asymp e^{\pi |\operatorname{Im} z|}, \quad |\operatorname{Im} z| \geq h = h(F) > 0.$$

Функции типа синуса нашли применение не только в негармоническом анализе, но и в спектральной теории и дифференциальных уравнениях. Большой интерес представляет вопрос о распределении нулей функций типа синуса.

Будем обозначать класс ф.т.с. через S . Важный подкласс в S образуют функции вида

$$F(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} d\sigma(t), \quad \operatorname{var} \sigma(t) < +\infty, \quad (1)$$

где $\sigma(t)$ имеет скачки в обеих точках $\pm\pi$ [2]; в этом случае нули λ_n функции $F(z)$ удовлетворяют условию

$$\lambda_n = n + O(1), \quad n \rightarrow \pm\infty. \quad (2)$$

Но функции вида (1) с условием $\sigma(\pm\pi) \neq \sigma(\pm\pi \mp 0)$ не исчерпывают весь класс S . В ряде работ строились ф.т.с., не являющиеся преобразованием Фурье–Стилтьеса, т.е. не представимые в виде (1) (об этом см. [2]); во всех случаях нули построенных функций также удовлетворяли условию (2).

Обозначим через ${}_1F_1(a, c; z)$ вырожденную гипергеометрическую функцию (см., например, [3]). В [4] показано, что при определенных условиях на a и c функция

$$F(z) = e^{-i\pi z} {}_1F_1(a, c; 2\pi iz)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00326) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4564.2006.1).

принадлежит классу S , но вместе с тем имеет следующую асимптотику нулей:

$$\lambda_n = n + A + B \cdot \ln |n| + O\left(\frac{\ln |n|}{|n|}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty, \quad A \in \mathbb{C}, \quad B \in \mathbb{R}, \quad B \neq 0.$$

Это, по-видимому, первый пример функции типа синуса с асимптотикой нулей, не укладывающейся в рамки формулы (2). В связи с этим результатом естественно возникает вопрос об описании функций $l(t) \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow \infty$, таких, что последовательность

$$\lambda_n = n + l(|n|), \quad l(n) = o(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

является множеством нулей ф.т.с. Этот вопрос и рассматривается в настоящей статье. Сформулируем ее основной результат. Пусть $l(t)$ – вогнутая дифференцируемая функция такая, что $l(t) = O(t^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. Тогда для того чтобы последовательность (3) была множеством нулей некоторой ф.т.с, необходимо и достаточно выполнения условия

$$t \cdot l'(t) = O(1), \quad t \rightarrow +\infty.$$

2. Вспомогательные предложения.

ЛЕММА А. Если $f(t)$ – дифференцируемая вогнутая функция и $f(t) > 0$ при $t > 0$, то $f'(t) = O(f(t)/t)$, $t \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу невозрастания $f'(t)$ имеем

$$f(t) = c + \int_a^t f'(u) du \geq (t - a)f'(t) + c.$$

Для завершения доказательства остается разделить обе части неравенства на $t \cdot f(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [6; § 1.1]. Положительная функция $l(t)$ называется *медленно меняющейся* (на бесконечности), если она измерима на полуоси $[A, \infty]$, $A > 0$, и при всех $\lambda > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{l(\lambda t)}{l(t)} = 1.$$

Класс медленно меняющихся функций обозначается L_∞ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [6; § 1.1]. Функция $R(x)$ называется *правильно меняющейся* на бесконечности, если она представима в виде

$$R(x) = x^\alpha l(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad l(x) \in L_\infty.$$

При этом α называют *порядком* функции $R(x)$. Класс правильно меняющихся функций порядка α обозначают через R_α .

ТЕОРЕМА А. Пусть $l(t) \in R_\alpha$, $\alpha \geq 0$, $l(t)$ дифференцируема на $(0, \infty)$ и $l'(t) = O(l(t)/t)$. Пусть функция $g(t)$ измерима на $[0, \infty)$ и обладает ограниченной производной в некоторой окрестности точки 1. Пусть также для некоторого $\rho > 0$

$$\int_1^\infty |g(t)| t^{\alpha-1+\rho} dt < \infty, \quad \int_0^1 |g(t)| t^{\alpha-\rho} dt < \infty. \quad (4)$$

Тогда равномерно относительно $\varphi \in (-\pi, \pi]$

$$\int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)}{t - e^{i\varphi}} \right) l(xt) dt = l(x) \left(\int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)t^\alpha}{t - e^{i\varphi}} \right) dt + o(1) \right), \quad x \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(1 - h, 1 + h)$ – та окрестность точки 1, в которой по условию функция $g(t)$ обладает ограниченной производной. Выделим два случая: $\arccos(1 - h/2) \leq |\varphi| \leq \pi$ и $|\varphi| < \arccos(1 - h/2)$. Рассмотрим первый. Обозначим

$$f_\varphi(t) = \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)t^\alpha}{t - e^{i\varphi}} \right), \quad s(t) = l(t)t^{-\alpha} \in L_\infty.$$

Из условий (4) видно, что

$$f_\varphi(t) \cdot t^\rho \in L(1, \infty), \quad f_\varphi(t) \cdot t^{-\rho} \in L(0, 1).$$

Пусть $0 < y < Y < \infty$, тогда имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)}{t - e^{i\varphi}} \right) \left(\frac{l(xt)}{l(x)} - t^\alpha \right) dt \right| \\ &= \left| \int_0^\infty f_\varphi(t) \left(\frac{s(xt)}{s(x)} - 1 \right) dt \right| = \left| \int_0^y + \int_y^Y + \int_Y^\infty \right| \\ &\leq \left| \int_y^Y f_\varphi(t) \left(\frac{s(xt)}{s(x)} - 1 \right) dt \right| + \left| \int_0^y f_\varphi(t) \frac{s(xt)}{s(x)} dt \right| \\ &\quad + \left| \int_0^y f_\varphi(t) dt \right| + \left| \int_Y^\infty f_\varphi(t) \frac{s(xt)}{s(x)} dt \right| + \left| \int_Y^\infty f_\varphi(t) dt \right|. \end{aligned} \quad (5)$$

Как показано в [6; § 2.3], найдутся такие константы M и A , не зависящие от функции $f_\varphi(t)$, что при всех $x > A$

$$\left| \int_Y^\infty f_\varphi(t) \frac{s(xt)}{s(x)} dt \right| \leq M \cdot \int_Y^\infty |f_\varphi(t)t^\eta| dt, \quad \left| \int_0^y f_\varphi(t) \frac{s(xt)}{s(x)} dt \right| \leq M \cdot \int_0^y |f_\varphi(t)t^{-\eta}| dt.$$

Кроме того, в [6; § 2.3] доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое X (не зависящее от $f_\varphi(t)$), что для всех $x > X$

$$\left| \int_y^Y f_\varphi(t) \left(\frac{s(xt)}{s(x)} - 1 \right) dt \right| \leq \varepsilon \int_y^Y |f_\varphi(t)| dt.$$

Применяя эти оценки к неравенству (5), получаем: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся X и M , не зависящие от $f_\varphi(t)$, такие, что для всех $x > X$

$$\left| \int_0^\infty f_\varphi(t) \left(\frac{l(xt)}{t^\alpha l(x)} - 1 \right) dt \right| \leq M \cdot \int_0^y |f_\varphi(t)t^{-\eta}| dt + M \cdot \int_Y^\infty |f_\varphi(t)t^{-\eta}| dt + \varepsilon \int_0^\infty |f_\varphi(t)| dt.$$

Устремляя в последнем неравенстве y к 0, а Y – к ∞ , получаем, что левая часть неравенства стремится к 0 при $x \rightarrow \infty$. А равномерность по $|\varphi| \geq \arccos(1 - h/2)$ следует из того, что

$$0 < k \leq \left| \frac{f_\varphi(t)}{f_\psi(t)} \right| \leq K < \infty \quad \text{при } t > 0, \quad |\varphi|, |\psi| \geq \arccos\left(1 - \frac{h}{2}\right).$$

Перейдем ко второму случаю. Зададимся произвольным $0 < \varepsilon < h/2$. Тогда очевидно, что $(\cos \varphi - \varepsilon, \cos \varphi + \varepsilon) \subset (1 - h, 1 + h)$. Разобьем исходный интеграл на три:

$$\int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)}{t - e^{i\varphi}} \right) l(xt) dt = \int_0^{\cos \varphi - \varepsilon} + \int_{\cos \varphi - \varepsilon}^{\cos \varphi + \varepsilon} + \int_{\cos \varphi + \varepsilon}^\infty.$$

Заметим, что второй интеграл в случае $\varphi = 0$ понимаем в смысле главного значения. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\cos \varphi - \varepsilon}^{\cos \varphi + \varepsilon} \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)}{t - e^{i\varphi}} \right) l(xt) dt \right| \\ & \leq \left| \int_{\cos \varphi - \varepsilon}^{\cos \varphi + \varepsilon} \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)}{t - e^{i\varphi}} \right) (l(xt) - l(x \cos \varphi)) dt \right| \\ & \quad + \left| l(x \cos \varphi) \int_{\cos \varphi - \varepsilon}^{\cos \varphi + \varepsilon} \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)}{t - e^{i\varphi}} \right) dt \right| \\ & \leq \int_{\cos \varphi - \varepsilon}^{\cos \varphi + \varepsilon} \left| \frac{l(xt) - l(x \cos \varphi)}{t - \cos \varphi} \operatorname{Re} \left(1 + \frac{i \sin \varphi}{t - e^{i\varphi}} \right) g(t) \right| dt \\ & \quad + l(x \cos \varphi) \left(\int_{\cos \varphi - \varepsilon}^{\cos \varphi + \varepsilon} \left| \frac{g(t) - g(\cos \varphi)}{t - \cos \varphi} \operatorname{Re} \left(1 + \frac{i \sin \varphi}{t - e^{i\varphi}} \right) \right| dt \right. \\ & \quad \left. + g(\cos \varphi) \left| \int_{\cos \varphi - \varepsilon}^{\cos \varphi + \varepsilon} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{t - e^{i\varphi}} \right) dt \right| \right) \\ & \leq \varepsilon O(l'(x)x) + l(x)(1 + o(1))(\varepsilon A + \varepsilon B) \\ & = l(x)(1 + o(1)) \left(\varepsilon(A + B) + \varepsilon \cdot O \left(\frac{l'(x)x}{l(x)} \right) \right) = \varepsilon \cdot l(x) \cdot O(1). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $g'(t)$ ограничена на отрезке $[\cos \varphi - \varepsilon, \cos \varphi + \varepsilon]$, а также условием $l'(t) = O(l(t)/t)$. Оценки, аналогичные тем, что мы применяли для слагаемых в (5), дают

$$\int_0^{\cos \varphi - \varepsilon} \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)}{t - e^{i\varphi}} \right) l(xt) dt = l(x) \left(\int_0^{\cos \varphi - \varepsilon} \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)t^\alpha}{t - e^{i\varphi}} \right) dt + o(1) \right), \quad (7)$$

$$\int_{\cos \varphi + \varepsilon}^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)}{t - e^{i\varphi}} \right) l(xt) dt = l(x) \left(\int_{\cos \varphi + \varepsilon}^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)t^\alpha}{t - e^{i\varphi}} \right) dt + o(1) \right) \quad (8)$$

равномерно по всем $|\varphi| < \arccos(1 - h/2)$. Складывая оценки (6), (7) и (8), получаем, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)}{t - e^{i\varphi}} \right) l(xt) dt = l(x) \left(\int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)t^\alpha}{t - e^{i\varphi}} \right) dt + \varepsilon \cdot O(1) + o(1) \right),$$

равномерно по всем $|\varphi| < \arccos(1 - h/2)$. И, значит, теорема доказана.

ЛЕММА В [2; § 2.3]. Пусть функция $F(z)$ аналитична и ограничена в полосе $|\operatorname{Im} z| < H$. Пусть, кроме того, все нули $F(z)$ лежат в полосе $|\operatorname{Im} z| < h < H$, причем на прямой $\operatorname{Im} z = h$ модуль $F(z)$ отделен от нуля. Тогда для z , лежащих в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq h$ и вне кружков радиуса δ с центрами в нулях $F(z)$, верна оценка

$$|F(z)| \geq c(\delta) > 0.$$

3. Критерий принадлежности классу функций типа синуса. Пусть функция $l(t)$ определена на положительной полуоси, положительна, дифференцируема, вогнута и

$$l(t) = O(t^\alpha), \quad t \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (9)$$

Рассмотрим последовательность

$$\Lambda = \{\lambda_n = n + l(|n|), n \in \mathbb{Z}\}$$

и порождаемую ею функцию

$$F_\Lambda(z) = z \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \prod_{|\lambda_n| < R, n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right). \quad (10)$$

То, что это произведение сходится, будет ясно из дальнейших рассуждений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $l(t)$ определена на положительной полуоси, положительна, дифференцируема, вогнута и выполнено условие (9). Тогда для принадлежности $F_\Lambda(z)$ классу функций типа синуса необходимо и достаточно, чтобы $t \cdot l'(t) = O(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму А к функции $l(t)$ и воспользуемся условием (9) и вогнутостью функции $l(t)$. Получим, что

$$l'(t) = O\left(\frac{l(t)}{t}\right) = O(t^{\alpha-1}) \downarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Поэтому $0 < l'(t) < 1$ на полуоси $t > A$ при достаточно большом A . Ясно, что замена конечного числа членов последовательности Λ не влияет на асимптотику $F_\Lambda(z)$. Поэтому можно считать, что для функции $l(t)$ на конечном отрезке $[0, A]$ выполнены дополнительные условия: $l(0) = 0$ и $0 < l'(t) < 1$. Таким образом, можно считать, что $l(0) = 0$ и $l'(t) < 1$ всюду на полуоси $t > 0$. Тогда функция $\lambda(t) := t + l(|t|)$ является строго возрастающей с областью значений $\mathbb{R}$, причем $\lambda(t) = t + o(t)$. Значит, обратная к ней функция $\lambda^{-1}(t)$ будет определена всюду на $\mathbb{R}$ и

$$\lambda^{-1}(t) = t + o(t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Найдем более точное значение $\lambda^{-1}(t)$. Подставим $x = \lambda^{-1}(t)$ в уравнение $x = \lambda(x) - l(|x|)$, получим

$$\lambda^{-1}(t) = t - l(|\lambda^{-1}(t)|) = t - l(|t|) + (l(|t|) - l(|\lambda^{-1}(t)|)). \quad (13)$$

По теореме Лагранжа

$$l(|t|) - l(|\lambda^{-1}(t)|) = \text{sign } \xi(t) \cdot l'(|\xi(t)|)(t - \lambda^{-1}(t)) = \text{sign } t \cdot l'(|\xi(t)|)(t - \lambda^{-1}(t)),$$

где $\xi(t)$ – некоторая точка, лежащая между t и $\lambda^{-1}(t)$. Поэтому, пользуясь оценкой (12), заключаем, что

$$\xi(t) \sim t, \quad t \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Обозначим $A(t) := \text{sign } t \cdot l'(|\xi(t)|)$. Воспользовавшись оценками (11) и (14), получаем, что

$$A(t) = O\left(l'\left(\frac{|t|}{2}\right)\right) = o(1), \quad t \rightarrow \infty. \quad (15)$$

В новых обозначениях (13) переписывается следующим образом:

$$\lambda^{-1}(t)(1 + A(t)) = t - l(|t|) + A(t).$$

Разделим левую и правую часть равенства на $1 + A(t)$ и применим оценку (15):

$$\lambda^{-1}(t) = t - l(|t|) + l(|t|) \frac{A(t)}{1 + A(t)} = t - l(|t|) + O\left(l(|t|)l'\left(\frac{|t|}{2}\right)\right). \quad (16)$$

Используя это, приходим к следующим оценкам:

$$n(t) := \lambda^{-1}(t) + \lambda^{-1}(-t) = -2l(|t|) + O\left(l(|t|)l'\left(\frac{|t|}{2}\right)\right), \quad (17)$$

$$m(t) := \lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t) = 2t + O\left(l(|t|)l'\left(\frac{|t|}{2}\right)\right). \quad (18)$$

Обозначим через $\Lambda(t)$ считающую функцию последовательности Λ , т.е. функцию, которая при $t > 0$ равна количеству точек последовательности Λ на интервале $(0, t)$, а при $t < 0$ равна минус количеству точек последовательности Λ на промежутке $(t, 0]$. Поскольку последовательность Λ имеет вид $\Lambda = \{\lambda(n), n \in \mathbb{Z}\}$ и функция $\lambda(t)$ строго монотонна, то $\Lambda(t) = [\lambda^{-1}(t)]$. Пользуясь оценкой (12), заключаем, что $\Lambda(t) = t + o(t)$, $t \rightarrow \infty$. Выберем действительное число c следующим образом:

$$0 < c < \min(|\lambda_{-1}|, |\lambda_1|),$$

тогда (10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \ln |F_{\Lambda}(z)| &= \ln |z| + \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R} \setminus (-c, c)} \ln \left(1 - \frac{z}{t}\right) d\Lambda(t) \\ &= \ln |z| + \Lambda(-c) \ln \left|1 + \frac{z}{c}\right| \\ &\quad + \operatorname{Re} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \ln \left(1 - \frac{z}{t}\right) \Lambda(t) \right)_{-R}^R + \int_{\mathbb{R} \setminus (-c, c)} \frac{z}{t(z-t)} \Lambda(t) dt, \\ &|\operatorname{Im} z| \geq 1. \end{aligned}$$

Здесь и далее все интегралы в смысле главного значения. Поскольку $\Lambda(t) = t + o(t)$, то

$$\ln \left(1 - \frac{z}{t}\right) \Lambda(t) \Big|_{-R}^R = \left(-\frac{z}{t} + O\left(\frac{z^2}{t^2}\right)\right) \Lambda(t) \Big|_{-R}^R = -z \frac{o(R)}{R} + O\left(\frac{z^2}{R}\right) = z \cdot o(1) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Пользуясь этим и тем, что $\Lambda(-c) = -1$, можно записать

$$\ln |F_{\Lambda}(z)| = O(1) + \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R} \setminus (-c, c)} \frac{z}{t(z-t)} \Lambda(t) dt, \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1. \quad (19)$$

Покажем, что если в (19) заменить $\Lambda(t) = [\lambda^{-1}(t)]$ на $\lambda^{-1}(t) - 1/2$, то при этом $\ln |F_{\Lambda}(z)|$ на множестве $|\operatorname{Im} z| \geq 1$ изменится не более, чем на $O(1)$. Пусть $\rho(t) := 1/2 - \{t\}$, где $\{\cdot\}$ — стандартное обозначение для дробной части. Тогда

$$\psi(t) := \Lambda(t) - \left(\lambda^{-1}(t) - \frac{1}{2}\right) = [\lambda^{-1}(t)] - \left(\lambda^{-1}(t) - \frac{1}{2}\right) = \rho(\lambda^{-1}(t)).$$

Докажем ограниченность первообразной $\Psi(t)$ функции $\psi(t)$, т.е.

$$|\Psi(x)| = \left| \int_0^x \rho(\lambda^{-1}(t)) dt \right| \leq C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^x \rho(\lambda^{-1}(t)) dt &\stackrel{\{u=\lambda^{-1}(t)\}}{=} \int_0^{\lambda^{-1}(x)} \rho(u) \lambda'(u) du = \int_0^{\lambda^{-1}(x)} \rho(u) (1 + \operatorname{sign} u \cdot l'(|u|)) du \\ &= \int_0^{\lambda^{-1}(x)} \rho(u) du + \operatorname{sign} x \cdot \int_0^{\lambda^{-1}(x)} \rho(u) \cdot l'(|u|) du \\ &= I_1(x) + I_2(x). \end{aligned}$$

Ясно, что $|I_1(x)| \leq 1/8$. А $I_2(x)$ в силу оценки (11) сходится к конечному пределу по признаку Дирихле сходимости интеграла.

Итак, $|\Psi(t)| < C$, $t \in \mathbb{R}$. Воспользовавшись этим, проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R} \setminus (-c, c)} \frac{2z}{t(z-t)} \psi(t) dt \right| &= \left| O(1) + \int_{\mathbb{R} \setminus (-c, c)} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(z-t)^2} \right) \Psi(t) dt \right| \\ &\leq A + C \int_{\mathbb{R} \setminus (-c, c)} \frac{dt}{t^2} + C \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t-x)^2 + y^2} \leq D, \\ z &= x + iy, \quad |y| \geq 1. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\begin{aligned} \ln |F_\Lambda(z)| &= O(1) + \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R} \setminus (-c, c)} \left(\lambda^{-1}(t) - \frac{1}{2} \right) \frac{z}{t(z-t)} dt \\ &= O(1) + \operatorname{Re} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_c^R \left(\lambda^{-1}(t) - \frac{1}{2} \right) \frac{z}{t(z-t)} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_c^R \left(\lambda^{-1}(-t) - \frac{1}{2} \right) \frac{z}{t(z+t)} dt \right), \\ |\operatorname{Im} z| &\geq 1. \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые в правой части этого равенства следующим образом:

$$\ln |F_\Lambda(z)| = O(1) + I_1(z) + I_2(z) + I_3(z) + I_4(z), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \operatorname{Re} \left(\int_c^\infty \frac{2z^2}{z^2 - t^2} dt - \int_0^\infty \frac{z}{z^2 - t^2} dt \right) = \pi |\operatorname{Im} z| + O(1), \quad z \in \mathbb{C}; \\ I_2(z) &= \operatorname{Re} \int_c^\infty \frac{z^2}{t(z^2 - t^2)} (m(t) - 2t) dt; \\ I_3(z) &= \operatorname{Re} \int_c^\infty \frac{z}{z^2 - t^2} (n(t) + 2l(t)) dt; \\ I_4(z) &= \operatorname{Re} \int_c^\infty \frac{2z}{t^2 - z^2} l(t) dt. \end{aligned}$$

Теперь ясно, что $F_\Lambda(z) \in S$ тогда и только тогда, когда

$$I_2(z) + I_3(z) + I_4(z) = O(1), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1. \quad (21)$$

Оценим $I_2(z)$. Обозначим для удобства $p(t) := m(t) - 2t$. Пользуясь по очереди оценками (18), (11) и (9), получим

$$p(t) = O\left(l(|t|)l'\left(\frac{|t|}{2}\right)\right) = O\left(\frac{l^2(|t|)}{|t|}\right) = O(t^{2\alpha-1}), \quad p'(t) = o(1). \quad (22)$$

Сделаем в интеграле $I_2(z)$ замену переменной: $u = t/|z|$. Получим

$$I_2(z) = \int_{c/|z|}^{\infty} p(u|z|) \operatorname{Re} \frac{e^{2i\varphi}}{u(e^{2i\varphi} - u^2)} du.$$

Видно, что $I_2(z) = I_2(-z)$, поэтому можно рассматривать z только из правой полуплоскости. Рассмотрим отдельно два случая: $\pi/4 < |\varphi| < \pi/2$ и $|\varphi| < \pi/4$. В первом случае, пользуясь оценкой (22), имеем

$$\begin{aligned} |I_2(z)| &\leq \left| \int_{c/|z|}^{\infty} p(u|z|) \operatorname{Re} \frac{e^{2i\varphi}}{u(e^{2i\varphi} - u^2)} du \right| \\ &\leq D|z|^{2\alpha-1} \int_{c/|z|}^{\infty} \frac{u^{2\alpha-2}}{|e^{2i\varphi} - u^2|} du = O(1) + O(|z|^{2\alpha-1}), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1. \end{aligned}$$

А во втором случае разобьем $I_2(z)$ на три интеграла:

$$I_2(z) = \int_{c/|z|}^{\cos \varphi - 1/|z|} + \int_{\cos \varphi - 1/|z|}^{\cos \varphi + 1/|z|} + \int_{\cos \varphi + 1/|z|}^{\infty} = J_1(z) + J_2(z) + J_3(z).$$

Оценим первый из них:

$$|J_1(z)| \leq D|z|^{2\alpha-1} \int_{c/|z|}^{\cos \varphi - 1/|z|} \frac{u^{2\alpha-2} du}{\cos \varphi - u} = O(1) + O(|z|^{2\alpha-1} \ln |z|), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1.$$

Аналогично $J_3(z) = O(1) + O(|z|^{2\alpha-1} \ln |z|)$. Теперь оценим $J_2(z)$ способом, аналогичным, использованному в (6). Имеем

$$\begin{aligned} J_2(z) &= \int_{\cos \varphi - 1/|z|}^{\cos \varphi + 1/|z|} p(u|z|) \operatorname{Re} \frac{e^{2i\varphi}}{u(u^2 - e^{2i\varphi})} du \\ &= \int_{\cos \varphi - 1/|z|}^{\cos \varphi + 1/|z|} (p(u|z|) - p(\cos \varphi |z|)) \operatorname{Re} \frac{e^{2i\varphi}}{u(u^2 - e^{2i\varphi})} du \\ &\quad + p(\cos \varphi |z|) \int_{\cos \varphi - 1/|z|}^{\cos \varphi + 1/|z|} \operatorname{Re} \frac{e^{2i\varphi}}{u(u^2 - e^{2i\varphi})} du \\ &= \int_{\cos \varphi - 1/|z|}^{\cos \varphi + 1/|z|} \frac{p(u|z|) - p(\cos \varphi |z|)}{u - \cos \varphi} \operatorname{Re} \frac{e^{2i\varphi}}{u} \left(1 + \frac{i \sin \varphi}{u - e^{i\varphi}}\right) du + O\left(\frac{l^2(|z|)}{|z|}\right) \\ &= O(|z|^{2\alpha-1}) + O(1) \cdot \max_{u>0} p'(u) = O(|z|^{2\alpha-1}) + O(1), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали, что

$$I_2(z) = O(|z|^{2\alpha-1} \ln |z|) + O(1), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1. \quad (23)$$

Аналогично доказывается, что

$$I_3(z) = O(|z|^{2\alpha-1} \ln |z|) + O(1), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1. \quad (24)$$

Теперь перейдем к оценке $I_4(z)$:

$$\begin{aligned} I_4(z) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sign} x \int_c^\infty l(t) d \ln \frac{(t+|x|)^2 + y^2}{(t-|x|)^2 + y^2} \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{sign} x \cdot l(t) \ln \left(1 + \frac{4t|x|}{(t-|x|)^2 + y^2} \right) \Big|_c^\infty \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{sign} x \int_c^\infty l'(t) \ln \left(1 + \frac{4t|x|}{(t-|x|)^2 + y^2} \right) dt. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных: $t = |x|u$. Получим

$$I_4(z) = o(1) + \frac{1}{2} \operatorname{sign} x \int_{c/|x|}^\infty |x| \cdot l'(u|x|) \ln \left(1 + \frac{4u}{(u-1)^2 + y^2/x^2} \right) du, \quad |y| \geq 1. \quad (25)$$

Достаточность. Итак, дано, что $t \cdot l'(t) = O(1)$. Тогда $l(t) = O(\ln t)$, поэтому (9) верно с любым $\alpha > 0$, следовательно (по оценкам (23) и (24)), $I_2(z) = O(1)$, $I_3(z) = O(1)$. Обозначим $k(t) = t \cdot l'(t) = O(1)$. Тогда в силу (25)

$$\begin{aligned} |I_4(z) - o(1)| &\leq \left| \int_{c/|x|}^\infty |x| \cdot l'(u|x|) \ln \left(1 + \frac{4u}{(u-1)^2 + y^2/x^2} \right) du \right| \\ &\leq \|k(t)\|_{C[c,\infty)} \int_0^\infty \frac{1}{u} \ln \left(1 + \frac{4u}{(u-1)^2} \right) du < A. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено условие (21) и, значит, $F_\Lambda(z) \in S$.

Необходимость. Дано: $F_\Lambda(z) \in S$, т.е. выполнено (21). Пусть $z = x + i$, $x > 2$. Тогда при $u \in [1, 2]$:

$$\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{4u}{(u-1)^2 + 1/x^2} \right) \geq \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{4u}{(u-1)^2 + 1/4} \right) \geq 1.$$

Пользуясь этим, а также (25), получаем оценку снизу для $I_4(z)$:

$$\begin{aligned} I_4(z) - o(1) &= \frac{1}{2} \int_{c/|x|}^\infty x \cdot l'(x \cdot u) \ln \left(1 + \frac{4u}{(u-1)^2 + 1/x^2} \right) du \\ &\geq \int_1^2 x \cdot l'(x \cdot u) du \geq x \cdot l'(2x) = \frac{k(2x)}{2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Положим

$$\beta = \inf \{ \alpha \mid l(t) = O(t^\alpha) \}.$$

Тогда ясно, что $l'(x) \neq O(x^{\beta-1-\varepsilon})$ для любого $\varepsilon > 0$, поэтому $l'(x) = M(x) \cdot x^{\beta-1-\varepsilon}$, где $M(x)$ – некоторая неограниченная функция. И, значит, по оценке (26)

$$I_4(z) \geq \frac{k(2x)}{2} = C \cdot M(2x) \cdot x^{\beta-\varepsilon}. \quad (27)$$

А оценки (23) и (24) показывают, что

$$I_2(z) + I_3(z) = O(x^{2\beta-1+\varepsilon} + 1). \quad (28)$$

Но для $0 \leq \beta < 1$ очевидно неравенство $\beta - \varepsilon > 2\beta - 1 + \varepsilon$ при достаточно малом ε . Поэтому, если предположить, что $t \cdot l'(t) \neq O(1)$, то найдется последовательность $\{x_k\}$, $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, такая, что

$$I_2(x_k + i) + I_3(x_k + i) + I_4(x_k + i) \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

А это означает, что $F_\Lambda(z) \notin S$, – противоречие.

Обозначим через S_α , $\alpha \in \mathbb{R}$, класс целых функций экспоненциального типа, для которых выполняется оценка

$$|F(z)| \asymp |z|^{-\alpha} e^{\pi |\operatorname{Im} z|}, \quad |\operatorname{Im} z| \geq h = h(F) > 0. \quad (29)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $l(t)$ – функция из предыдущей теоремы. Тогда из совокупности классов $\{S_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ единственный, где может лежать $F_\Lambda(z)$, – это $S_0 = S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценок (27) и (28) следует, что главным членом асимптотики функции $\ln |F_\Lambda(x + i)|$ является $I_4(x + i)$. А оценка (25) показывает, что $I_4(x + i)$ есть (с точностью до $o(1)$) нечетная функция. Поэтому (29) может выполняться только при $\alpha = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $l(t)$ – вогнутая положительная функция и выполнено (9). Если $F_\Lambda(z) \in S$, то $l(t) = O(\ln t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, как мы уже доказали, если $F_\Lambda(z) \in S$, то $l'(t) \cdot t = O(1)$. Но тогда $l(t) = O(1/t)$ и, значит,

$$l(t) = l(1) + \int_1^t l'(u) du = l(1) + \int_1^t \frac{du}{u} = O(\ln t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Это следствие согласуется со следующим утверждением, приведенном в [5] без доказательства: корни ф.т.с. имеют вид $\lambda_n = n + \psi(n)$, где $\psi(n) = O(\ln |n|)$.

В теореме 1 рассматриваются лишь вогнутые функции $l(t)$, но в некоторых случаях можно отказаться от этого требования.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть функции $l_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, и $l(t) = (1/n) \sum_{k=1}^n l_k(t)$ являются положительными вогнутыми или отрицательными выпуклыми и выполнено $l_k(t) = O(t^\alpha)$, $\alpha < 1/2$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Обозначим $\lambda_k(t) = t + l_k(t)$. Составим последовательности

$$\Lambda_k = \{\lambda_k(n \cdot m + k), m \in \mathbb{Z}\}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Пусть $\Lambda = (\bigcup_{k=1}^n \Lambda_k) \cup \{0\}$. Тогда для принадлежности $F_\Lambda(z)$ классу функций типа синуса необходимо и достаточно, чтобы $t \cdot l'(t) = O(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\Lambda_k(t)$ считающую функцию последовательности Λ_k . Тогда ясно, что $\Lambda_k(t) = [\tilde{\lambda}_k^{-1}(t)]$, где $\tilde{\lambda}_k^{-1}(t)$ – функция обратная к $\tilde{\lambda}_k(t) = \lambda_k(n \cdot t + k)$, поэтому

$$\tilde{\lambda}_k^{-1}(t) = \frac{\lambda_k^{-1}(t) - k}{n}. \quad (30)$$

Заменяя всюду в доказательстве теоремы 1 $\lambda^{-1}(t)$ на $\tilde{\lambda}_k^{-1}(t)$ и используя равенство (30), получаем, что

$$|F_{\Lambda_k}(z)| \asymp \exp\left(\frac{\pi}{n} |\operatorname{Im} z| + \operatorname{Re} \int_c^\infty \frac{2z}{t^2 - z^2} \frac{l_k(t)}{n} dt\right),$$

Поэтому

$$|F_\Lambda(z)| = \left| \prod_{k=0}^{n-1} F_{\Lambda_k}(z) \right| \asymp \exp\left(\pi |\operatorname{Im} z| + \operatorname{Re} \int_c^\infty \frac{2z}{t^2 - z^2} l(t) dt\right).$$

А интеграл, стоящий в скобках, есть $O(1)$, если и только если $t \cdot l'(t) = O(1)$.

ПРИМЕР 1. Определим функцию $l(t)$ в натуральных точках следующим образом:

$$l(n) = \begin{cases} \ln n, & n = 2k, \\ \ln n - \frac{1}{2}, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

А на все $\mathbb{R}_+$ доопределим по линейности. Тогда очевидно, что $l'(t) \not\rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Но вместе с тем, $F_\Lambda(z) \in S$.

ПРИМЕР 2. Пусть функция $l(t)$ вогнута и $l(t) = O(t^\alpha)$, $\alpha < 1/2$. Определим последовательность l_n следующим образом: $l_n = (-1)^n l(n)$. Тогда бесконечное произведение $F_\Lambda(z)$ с нулями вида $\lambda_n = n + l_n$ принадлежит согласно предыдущему следствию 3 классу функций типа синуса. Но видно, что такая последовательность Λ пронумерована не по возрастанию элементов. Покажем, что перенумерацией можно свести Λ к последовательности M вида $\{\mu_n = n + O(1)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Обозначим $\lambda_0(t) = t + l(t)$, $\lambda_1(t) = t - l(t)$. Как следует из формулы (30), считающая функция последовательности $\{\lambda_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ имеет вид $[\lambda_0^{-1}(t)/2]$, а считающая функция последовательности $\{\lambda_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – $[(\lambda_1^{-1}(t) - 1)/2]$. Оценки (16), (11) и (9), а также условие $\alpha < 1/2$ дают

$$\lambda_0^{-1}(t) = t - l(t) + o(1) \quad \text{и} \quad \lambda_1^{-1}(t) = t + l(t) + o(1).$$

Поэтому на отрезке между 0 и n расположено $n + O(1)$ точек последовательности Λ . А это и означает, что перенумерацией можно свести Λ к последовательности M вида $\{\mu_n = n + O(1)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

4. Точные оценки для бесконечных произведений. В теореме 1 мы выяснили, что на рост $|F_\Lambda(z)|$ определенным образом влияет функция $t \cdot l'(t)$, и получили оценку для $|F_\Lambda(z)|$ в случае $t \cdot l'(t) = O(1)$. В этом пункте мы найдем точную асимптотику для $|F_\Lambda(z)|$ при $l(t) \in R_\alpha$.

Ясно, что класс функций $l(t)$ таких, что $F_\Lambda(z)$ есть целая функция, не ограничивается только теми, для которых верно (9). На самом деле, для сходимости $F_\Lambda(z)$ достаточно, чтобы

$$\int_1^\infty \frac{l(t)}{t^2} dt < \infty. \quad (31)$$

Пусть $\delta > 0$. Обозначим

$$\Omega_\delta(\Lambda) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_n| \geq \delta \quad \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $l(t)$ – вогнутая дифференцируемая функция из R_α , $0 \leq \alpha \leq 1$. Пусть также $t \cdot l'(t) \in L_\infty$ в случае $\alpha = 0$, а в случае $\alpha = 1$ выполняется условие (31) и $l(t)/t$ убывает. Тогда имеет место следующая асимптотика:

$$\ln |F_\Lambda(z)| = \pi |\operatorname{Im} z| + K_\alpha(z) + O(1), \quad z \in \Omega_\delta(\Lambda), \quad (32)$$

где

$$K_0(z) = |z| \cdot l'(|z|) \left(\pi \left(\frac{\pi}{2} - |\varphi| \right) + o(1) \right), \quad (33)$$

$$K_\alpha(z) = l(|z|) \left(\pi \frac{\sin \alpha(\pi/2 - |\varphi|)}{\cos(\pi\alpha/2)} + o(1) \right), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (34)$$

$$K_1(z) = 2 \cos \varphi \int_1^\infty \frac{l(t|z|)}{t^2} dt + O(l(|z|))$$

и все $o(1)$ и $O(1)$ равномерны по $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из (20),

$$\ln |F_\Lambda(z)| = \pi |\operatorname{Im} z| + I_2(z) + I_3(z) + I_4(z) + O(1), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1. \quad (35)$$

1. Если $0 < \alpha < 1$, то, пользуясь теоремой А, получаем

$$\begin{aligned} I_4(z) &= \operatorname{Re} \int_c^\infty \frac{2z}{t^2 - z^2} l(t) dt = O\left(\frac{1}{|z|}\right) + |z|^\alpha \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{2e^{i\varphi} t^\alpha}{t^2 - e^{2i\varphi}} \right) s(t|z|) dt \\ &= l(|z|)(1 + o(1)) \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{2e^{i\varphi} t^\alpha}{t^2 - e^{2i\varphi}} dt \\ &= l(|z|) \left(\pi \frac{\sin \alpha(\pi/2 - |\varphi|)}{\cos(\pi\alpha/2)} + o(1) \right), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1. \end{aligned}$$

Здесь так же, как и в теореме А, $s(t) = l(t)t^{-\alpha}$. Выкладки, аналогичные тем, что привели нас к (23) и (24), дают в случае правильно меняющейся функции $l(t)$ следующее:

$$I_2(z) = O\left(\frac{l^2(|z|) \ln |z|}{|z|} + 1\right) = I_3(z), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1. \quad (36)$$

Поэтому при $0 < \alpha < 1$ имеют место следующие оценки: $I_2(|z|), I_3(|z|) = o(l(|z|)) + O(1)$. Подставляя найденные асимптотики для $I_2(z)$, $I_3(z)$ и $I_4(z)$ в (35), получаем (32) с $K_\alpha(z)$ в виде (34).

Теперь рассмотрим крайние случаи: $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

2. При $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} I_4(z) &= \operatorname{Re} \int_c^\infty \frac{2z}{t^2 - z^2} l(t) dt = O(1) + \int_{c/|z|}^\infty |z|u \cdot l'(|z|u) \frac{1}{u} \ln \left| \frac{u - e^{i\varphi}}{u + e^{i\varphi}} \right| du \\ &= O(1) + |z|l'(|z|)(1 + o(1)) \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{2e^{i\varphi}}{u^2 - e^{2i\varphi}} \ln u du \\ &= |z|l'(|z|) \left(\pi \left(\frac{\pi}{2} - |\varphi| \right) + o(1) \right), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1. \end{aligned}$$

К тому же, как следует из (36), $I_2(z), I_3(z) = O(1)$ при $\alpha = 0$. Получаем (32) с $K_\alpha(z)$ в виде (33).

3. При $\alpha = 1$ имеем

$$\begin{aligned} I_4(z) &= \operatorname{Re} \int_{c/|z|}^\infty \frac{2e^{i\varphi}}{u^2 - e^{2i\varphi}} l(u|z|) du = \operatorname{Re} \left(\int_{c/|z|}^2 + \int_2^\infty \right) \\ &= O(l(|z|)) + \operatorname{Re} \int_2^\infty l(u|z|) \left(\frac{2e^{i\varphi}}{u^2} + \frac{2e^{3i\varphi}}{u^2(u^2 - e^{2i\varphi})} \right) du \\ &= O(l(|z|)) + 2 \cos \varphi \int_1^\infty \frac{l(u|z|)}{u^2} du, \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что $I_2(z), I_3(z) = O(l(|z|))$ в случае $\alpha = 1$. Нужно просто проверить, что в оценке (36)

$$\frac{l^2(|z|) \ln |z|}{|z|} = O(l(|z|)). \quad (37)$$

Действительно, если предположить, что (37) не выполняется для $l(t) = t \cdot s(t)$, то $\ln t \cdot s(t) = M(t)$ — неограниченная функция. Но тогда в силу монотонного убывания функции $s(t)$

$$\int_1^\infty \frac{s(t)}{t} dt \geq \int_1^x \frac{s(t)}{t} dt \geq s(x) \int_1^x \frac{1}{t} dt = M(x),$$

что противоречит (31).

По определению класса L_∞ для любого $C > 1$ при достаточно больших $|z|$

$$\int_1^\infty \frac{l(|z|t)}{t^2} dt \geq |z| \int_1^C \frac{s(|z|t)}{t} dt = \ln C \cdot l(|z|)(1 + o(1)) \geq \frac{1}{2} \ln C \cdot l(|z|),$$

поэтому

$$l(|z|) = o \left(\int_1^\infty \frac{l(t|z|)}{t^2} dt \right).$$

Таким образом, главным членом асимптотики функции $K_1(z)$ является

$$2 \cos \varphi \cdot \int_1^\infty \frac{l(|z|t)}{t^2} dt.$$

Итак, мы доказали, что

$$\ln |F_\Lambda(z)| = \pi |\operatorname{Im} z| + K_\alpha(z) + O(1), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1. \quad (38)$$

Остается показать, что эта оценка верна и на множестве $\Omega_\delta(\Lambda)$. Рассмотрим функцию $F(z) = F_\Lambda(z)/F_\Lambda(z+4i)$. В полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 2$ она аналитична и ограничена, поскольку

$$\left| \frac{1 - z/\lambda_n}{1 - (z+4i)/\lambda_n} \right|^2 = \frac{(\lambda_n - x)^2 + y^2}{(\lambda_n - x)^2 + (y+4)^2} = 1 - \frac{8(2+y)}{(\lambda_n - x)^2 + (y+2)^2} \leq 1, \quad |y| \leq 2.$$

Кроме того, все нули $F(z)$ действительные и, как следует из оценки (38), модуль $F(z)$ отделен от нуля прямой $\operatorname{Im} z = 1$. Таким образом, выполнены все условия леммы В и, значит, в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 1$ и вне кружков радиуса δ с центрами в точках последовательности Λ

$$1 \geq \left| \frac{F_\Lambda(z)}{F_\Lambda(z+4i)} \right| \geq c(\delta) > 0.$$

Соединяем это с оценкой (38) и получаем, что имеет место (32).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. Я. Левин, “Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа”, *Математическая физика и функциональный анализ*, вып. 1, ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1969, 136–146.
- [2] А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005.
- [3] Ф. Олвер, *Введение в асимптотические методы и специальные функции*, Наука, М., 1978.
- [4] А. М. Седлецкий, “Асимптотика нулей вырожденной гипергеометрической функции”, *Матем. заметки*, **82:2** (2007), 262–271.
- [5] Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский, “Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39:3** (1975), 657–702.
- [6] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985.

А. А. Юхименко

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: yukhimenko@gmail.com

Поступило

03.08.2007

Исправленный вариант

11.11.2007