Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Осин, Элементарные классы групп, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 1, 84–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm406>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:20:49

УДК 512.54

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ КЛАССЫ ГРУПП

Д. В. Осин

Пусть B – некоторый класс групп. Определим элементарный класс с базой B как наименьший класс групп, который содержит B и замкнут относительно перехода к подгруппам, факторгруппам, групповым расширениям и направленным пределам. В данной работе изучаются свойства таких классов. Обсуждаются некоторые приложения к теории элементарных аменабельных групп и связь с классами Куроша–Черникова обобщенных разрешимых групп.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. В настоящей работе мы рассматриваем некоторые семейства групп, которые могут быть получены естественным образом из заданных. Более точно, пусть B – некоторый класс групп. Определим *элементарный класс с базой B* , $\mathcal{E}(B)$, как наименьший класс групп, который содержит B и замкнут относительно следующих четырех стандартных операций:

- (S) взятие подгрупп;
- (Q) взятие фактор групп;
- (E) расширения групп;
- (L) взятие направленных (индуктивных) пределов.

Идея рассмотрения элементарных классов возникает в связи с теорией элементарных аменабельных групп, восходящей к классическим работам фон Неймана [1] и Дэя [2]. В наших терминах класс элементарных аменабельных групп EG – это в точности элементарный класс с базой, состоящей из всех абелевых и конечных групп.

Мы получаем описание элементарных классов с произвольной базой, которое обобщает и улучшает данное Чоу описание элементарных аменабельных групп [3]. Используя полученный результат, мы исследуем свойства групп, которые переносятся с базы на весь элементарный класс. В частности, мы находим достаточное условие для такого переноса и рассматриваем его приложения в ряде случаев. Также изучается связь между элементарными классами и теорией обобщенных разрешимых групп Куроша–Черникова [4], [5].

Основная часть настоящей заметки была написана во время визита автора в Женевский университет; я благодарен П. де ля Арпу за приглашение, а также за постоянное внимание к данной работе. Также я хотел бы поблагодарить Р. И. Григорчука и А. Ю. Ольшанского за полезные замечания и комментарии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00894, и Швейцарского национального научного фонда.

2. Основные результаты. Для описания элементарных классов групп нам требуется следующая вспомогательная конструкция. Пусть B – заданный базовый класс и класс $\mathcal{E}_0(B)$ состоит из одной тривиальной группы. Предположим, что $\alpha > 0$ – некоторый ординал и что мы уже определили классы $\mathcal{E}_\beta(B)$ для всех ординалов $\beta < \alpha$. Тогда положим

$$\mathcal{E}_\alpha(B) = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{E}_\beta(B),$$

если α является предельным ординалом. Если же α – непредельный ординал, определим $\mathcal{E}_\alpha$ как класс всех групп, которые могут быть получены из групп класса $\mathcal{E}_{\alpha-1}$ однократным применением операции (L) или следующей операции.

(E₀) Для заданной группы берется ее расширение с помощью группы из класса B .

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть B – некоторый класс групп. Предположим, что B замкнут относительно операций (S) и (Q). Тогда

$$\mathcal{E}_\alpha(B) = \bigcup_{\alpha} \mathcal{E}_\beta(B),$$

где объединение берется по всем ординальным числам.

Следующее описание немедленно вытекает из теоремы 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Элементарный класс $\mathcal{E}(B)$ есть наименьший класс групп, содержащий B и замкнутый относительно (E₀) и (L).

Пусть теперь P – некоторое свойство, т.е. предикат на классе всех групп. Скажем, что P является S -замкнутым (соответственно Q -замкнутым, E -замкнутым), если для всякой группы G , обладающей P , любая подгруппа G (гомоморфный образ или расширение с помощью группы, обладающей P , соответственно) обладает P . Кроме того, мы будем говорить, что P является L -замкнутым, если направленный предел $H = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ обладает свойством P всегда, когда каждая из групп H_λ обладает P . Заметим, что любая группа является индуктивным пределом своих конечно порожденных подгрупп. Следовательно, P L -замкнуто тогда и только тогда, когда локальная теорема справедлива для P (это означает, что любая группа, все конечно порожденные подгруппы которой обладают свойством P , сама обладает P). Особенно мы будем интересоваться теми свойствами групп, которые L -замкнуты и E -замкнуты одновременно (или LE -замкнуты, для краткости). Используя следствие 2.1, мы легко получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть B – SQ -замкнутый класс групп, P – LE -замкнутое свойство групп. Предположим, что всякая группа из B обладает свойством P . Тогда любая группа из элементарного класса $\mathcal{E}(B)$ обладает P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что класс групп $\mathcal{C}$ является *внешним*, если для любого SQ -замкнутого класса B из $\mathcal{C} \cap B = \emptyset$ следует $\mathcal{C} \cap \mathcal{E}(B) = \emptyset$.

Например, класс неамenableных групп является внешним. Другие примеры приводятся в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.3. *Следующие классы являются внешними:*

- 1) *класс конечно порожденных бесконечных периодических групп;*
- 2) *класс нетривиальных конечно порожденных делимых групп;*
- 3) *класс конечно порожденных бесконечных простых групп;*
- 4) *класс конечно порожденных бесконечных групп, имеющих конечное число классов сопряженности.*

Необходимо заметить, что все классы, упомянутые выше, непусты (интересующихся читателей мы отсылаем к книге [6]).

Напомним, что функция роста $\gamma_G^X: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ группы G , порожденной конечным множеством X , определяется формулой

$$\gamma_G^X(n) = \text{card}\{g \in G: \|g\|_X \leq n\},$$

где $\|g\|_X$ обозначает словарную длину g . Показатель экспоненциального роста G — это число

$$\omega(G, X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\gamma_X^G(n)}.$$

Вышеупомянутый предел существует ввиду субмультипликативности γ_X^G .

Говорят, что группа G имеет экспоненциальный рост (субэкспоненциальный рост), если $\omega(G, X) > 1$ (соответственно $\omega(G, X) = 1$). Если существуют константы $C, d > 0$ такие, что $\gamma_G^X(n) \leq Cn^d$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то говорят, что G имеет полиномиальный рост. Вопрос о существовании конечно порожденной группы промежуточного (т.е. субэкспоненциального, но не полиномиального) роста известен как проблема Милнора. Отрицательный ответ был получен в 60–70-е годы в некоторых частных случаях, но лишь недавно Григорчуком найдены первые примеры конечно порожденных групп, имеющих промежуточный рост [7].

Используя теорему 2.2, мы получаем отрицательный ответ на вопрос Милнора для элементарных классов, обобщая тем самым хорошо известные результаты о разрешимых и элементарных аменабельных группах [3], [8].

ТЕОРЕМА 2.4. *Класс конечно порожденных групп промежуточного роста является внешним.*

Другое приложение теоремы 2.2 можно найти в п. 4, где мы получаем описание элементарных аменабельных групп с условиями конечности.

ТЕОРЕМА 2.5. 1) *Всякая элементарная аменабельная группа с условием максимальности для подгрупп почти полициклическая.*

2) *Всякая элементарная аменабельная группа с условием минимальности для подгрупп локально конечна.*

Наша следующая цель — описать связь между элементарными классами и классами групп Куроша–Черникова. Напомним, что множество подгрупп $\mathfrak{S} = \{G_\mu\}_{\mu \in M}$ группы G образует разрешимый субнормальный ряд, если выполнены следующие условия.

- 1) Множество индексов M упорядочено, т.е. для любых $\nu, \mu \in M$ либо $\nu \leq \mu$, либо $\mu \leq \nu$.
- 2) $G_\mu \leq G_\nu$ при $\mu < \nu$.
- 3) $\mathfrak{S}$ замкнуто относительно любых пересечений и объединений.

- 4) Положим $G_\mu^\sharp = \bigcap_{\nu > \mu} G_\nu$. Тогда $G_\mu^\sharp$ – нормальная подгруппа в G_μ и $G_\mu/G_\mu^\sharp$ абелева при любом $\mu \in M$.
- 5) $\mathfrak{S}$ содержит одновременно $\{1\}$ и G .

Ряд $\mathfrak{S}$ называется *вполне упорядоченным*, если $G_\mu^\sharp \neq G_\mu$ для любого $\mu \in M$.

Говорят, что группа G обладает свойством SN , если в G существует разрешимый субнормальный ряд. Далее, если G допускает вполне упорядоченный разрешимый субнормальный ряд, то говорят, что она обладает SN^* . Мы также обозначаем через SN и SN^* классы всех групп, обладающих свойствами SN и SN^* соответственно.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть A – класс всех абелевых групп. Тогда

$$SN^* \subset \mathcal{E}(A) \subset SN. \quad (1)$$

В частности, из теоремы 2.6 следует, что любая SN^* -группа является (элементарной) аменабельной. Это не очевидно априори; так, например, каждая свободная группа обладает свойством SN (как и любая другая группа, аппроксимируемая разрешимыми). Таким образом, включение $SN \subseteq AG$, где AG – класс всех аменабельных групп, не имеет места. Отсюда следует, что включение $\mathcal{E}(A) \subset SN$ является строгим. Более того, в п. 5 будет показано, что и первое включение в (1) строгое. Заметим также, что свойство SN^* не эквивалентно разрешимости даже в случае конечно порожденных групп (см. примеры в конце п. 5).

3. Элементарные классы. На протяжении данного пункта мы фиксируем некоторый SQ -замкнутый класс B , обозначаем класс $\mathcal{E}_\alpha(B)$ через $\mathcal{E}_\alpha$ и $\mathcal{E}(B)$ через $\mathcal{E}$ для краткости. Наша основная цель – доказать теорему 2.1. Начнем со вспомогательных лемм.

ЛЕММА 3.1. Класс $\mathcal{E}_\alpha$ является SQ -замкнутым для каждого ординала α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим трансфинитную индукцию по α . Лемма очевидна для $\mathcal{E}_0$. Предположим, что $\alpha > 0$ и что $\mathcal{E}_\beta$ является SQ -замкнутым, если $\beta < \alpha$. Пусть $G \in \mathcal{E}_\alpha$, C – подгруппа в G , и D – образ G при некотором гомоморфизме φ . Нам надо показать, что $C, D \in \mathcal{E}_\alpha$. Если α – предельный ординал, то $G \in \mathcal{E}_\beta$ для некоторого $\beta < \alpha$. Следовательно, $C, D \in \mathcal{E}_\beta \subseteq \mathcal{E}_\alpha$ по предположению индукции.

Если α – непредельный ординал, то либо G является расширением вида

$$1 \rightarrow E \rightarrow G \xrightarrow{\theta} F \rightarrow 1$$

для некоторых $E \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$ и $F \in B$, либо любая конечно порожденная подгруппа в G принадлежит $\mathcal{E}_{\alpha-1}$. В первом случае C изоморфна расширению $C_1 = C \cap E$ с помощью $C_2 = \theta(C)$, а D является расширением $D_1 = \varphi(E)$ с помощью $D_2 = \varphi(F)$. По предположению $C_1, D_1 \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$. Так как B является SQ -замкнутым, C_2 и D_2 принадлежат B . Следовательно, $C, D \in \mathcal{E}_\alpha$. Во втором случае заметим, что всякая конечно порожденная подгруппа в C и в D принадлежит $\mathcal{E}_\alpha$, будучи подгруппой или факторгруппой конечно порожденной подгруппы в G . Значит, снова $C, D \in \mathcal{E}_\alpha$.

ЛЕММА 3.2. Пусть группа G является расширением группы $F \in \mathcal{E}_\alpha$ при помощи группы $H \in \mathcal{E}_\beta$ для некоторых ординалов α и β . Тогда существует ординал γ такой, что $G \in \mathcal{E}_\gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим трансфинитную индукцию по β . Случай $\beta = 0$ тривиален. Предположим, что $\beta > 0$ и мы доказали лемму для всех ординалов $\delta < \beta$. Если β – предельный ординал, то $H \in \mathcal{E}_\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon < \beta$ и требуемое γ существует по предположению индукции. Теперь пусть β – непредельный ординал. Существуют две возможности получения H из групп класса $\mathcal{E}_{\beta-1}$.

Сначала предположим, что H является расширением D при помощи E , где $D \in \mathcal{E}_{\beta-1}$ и $E \in B$. Рассмотрим полный прообраз D при естественном гомоморфизме $G \rightarrow H$ и обозначим его D_0 . Ясно, что D_0 – расширение F с помощью D и, таким образом, $D_0 \in \mathcal{E}_\xi$ для некоторого ξ по предположению индукции. Следовательно, $G \in \mathcal{E}_{\xi+1}$, так как $G/D_0 \cong H/D \in B$.

Далее, пусть H – направленный предел семейства групп $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и вложений $H_\lambda \cup H_\mu \subseteq H - \nu$. Рассмотрим полные прообразы H_λ^0 групп H_λ в G . По нашему предположению $H_\lambda \in \mathcal{E}_{\beta-1}$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Значит, $H_\lambda^0 \in \mathcal{E}_{\xi_\lambda}$ для некоторых ξ_λ по предположению индукции. Возьмем сумму $\xi = \sum_{\lambda \in \Lambda} \xi_\lambda$. Как известно, ξ – ординал, не меньший, чем любой из ξ_λ . Это влечет $\mathcal{E}_{\xi_\lambda} \subseteq \mathcal{E}_\xi$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и, таким образом, $H_\lambda^0 \in \mathcal{E}_\xi$ для всех λ . Заметим, что вложения $H_\lambda \rightarrow H_\mu$ могут быть расширены до вложений $H_\lambda^0 \rightarrow H_\mu^0$ естественным образом; тогда соответствующий направленный предел $G_0 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda^0$ будет изоморфен G . Отсюда следует, что $G \in \mathcal{E}_{\xi+1}$.

Теорема 2.1 немедленно следует из леммы 3.1 и леммы 3.2.

4. Свойства элементарных классов. Продемонстрируем примеры конструирования LE -замкнутых свойств групп.

ЛЕММА 4.1. Пусть P_1 – некоторое SQ -замкнутое, а P_2 – некоторое LE -замкнутое свойство групп. Тогда свойство “если группа обладает P_1 , то она обладает P_2 ” ($P_1 \implies P_2$ для краткости) является LE -замкнутым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что $P_1 \implies P_2$ является L -замкнутым. Предположим, что любая конечно порожденная подгруппа группы G обладает $P_1 \implies P_2$. Если G не обладает свойством P_1 , то импликация $P_1 \implies P_2$ истинна. Если же G обладает P_1 , то любая ее подгруппа обладает P_1 , так как P_1 является S -замкнутым. Следовательно, любая конечно порожденная подгруппа в G обладает P_2 по нашему предположению. Принимая во внимание, что P_2 является L -замкнутым, заключаем, что G обладает P_2 и, таким образом, обладает $P_1 \implies P_2$.

Теперь предположим, что имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow M \rightarrow G \rightarrow N \rightarrow 1,$$

где M и N обладают $P_1 \implies P_2$. Если G не обладает P_1 , то импликация $P_1 \implies P_2$ справедлива, как и выше. Предположим, что G обладает P_1 . Так как P_1 является SQ -замкнутым, M и N обладают P_1 . Следовательно, M и N обладают P_2 . Значит, G обладает P_2 , так как P_2 является E -замкнутым.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим следующие свойства:

P_1 . периодичность;

P_2 . локальная конечность.

Нетрудно видеть, что P_1 и P_2 удовлетворяют условиям предыдущей леммы (E -замкнутость P_2 следует из хорошо известной теоремы Шмидта [9, теорема 22.3.1]). Следовательно, $P_1 \implies P_2$ является LE -замкнутым. Это означает, что если всякая периодическая группа локально конечна в базе B , то то же самое справедливо для любой группы из $\mathcal{E}(B)$. Таким образом, мы обобщили хорошо известный факт, касающийся элементарных аменабельных групп, и доказали первое утверждение теоремы 2.3.

ПРИМЕР 4.2. Рассмотрим также свойство

P_3 . конечность ранга (напомним, что группа G имеет конечный ранг d , если любая конечно порожденная подгруппа в G может быть порождена не более чем d элементами).

Ясно, что P_3 является SQ -замкнутым. Следовательно, свойство $P_1 \& P_3$ является SQ -замкнутым, а свойство $(P_1 \& P_3) \implies P_2$ — LE -замкнутым. Заметим, что существуют группы, не обладающие $(P_1 \& P_3) \implies P_2$ (например, монстры Тарского, см. [6, гл. 9]; эти группы 2-порождены, бесконечны, конечной экспоненты и таковы, что любая их собственная подгруппа циклическа). Таким образом, мы показали, что если группы типа монстров Тарского отсутствуют в базе B , то они не появляются и в $\mathcal{E}(B)$.

Свойство $(P_1 \& P_3) \implies P_2$ может быть интересно, скажем, для элементарных классов, которые не обладают $P_1 \implies P_2$, т.е. содержат конечно порожденные бесконечные периодические группы. Пример такого класса может быть построен следующим образом. Пусть $B_0 = \{G\}$, где G — 2-группа Григорчука (см. [7]). Обозначим через B SQ -замыкание B_0 . Заметим, что любая собственная факторгруппа G конечна, так же, как и любая подгруппа конечного ранга в G (как известно [10], любая конечно порожденная подгруппа группы Григорчука соизмерима с прямым произведением конечного числа копий G). Отсюда следует, что любая группа из $\mathcal{E}(B)$ удовлетворяет $(P_1 \& P_3) \implies P_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Трансфинитной индукций по α мы покажем, что свойством P обладает каждая группа $G \in \mathcal{E}_\alpha$. Случай $\alpha = 0$ тривиален. Предположим теперь, что $\alpha > 0$. Если α — предельный ординал, то $G \in \mathcal{E}_\beta$ для некоторого $\beta < \alpha$ и, таким образом, G обладает P по предположению индукции. Если же ординал α непредельный, то из LE -замкнутости P следует, что G обладает P . Это завершает доказательство ввиду теоремы 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Первое утверждение теоремы уже доказано в примере 4.1. Остается показать, что следующие свойства являются LE -замкнутыми (мы записываем их в сокращенных обозначениях):

P_1 . ((делимость) & (конечная порожденность)) $\implies$ (тривиальность);

P_2 . ((простота) & (конечная порожденность)) $\implies$ (конечность);

P_3 . ((существование лишь конечного числа классов сопряженности) & (конечная порожденность)) $\implies$ (конечность).

Заметим, что добавление требования конечной порожденности в посылку импликаций делает свойства P_1 , P_2 , P_3 L -замкнутыми. Таким образом, достаточно проверить E -замкнутость. Пусть некоторая группа G есть расширение F при помощи H .

Сначала предположим, что F и H обладают P_1 . Если G не является делимой или конечно порожденной, то P_1 истинно. Теперь заметим, что всякая факторгруппа конечно порожденной делимой группы конечно порождена и делима. Следовательно, H

тривиальна по предположению индукции. Это означает, что G совпадает с F и, следовательно, обладает P_1 . Второе утверждение теоремы доказано.

Теперь, предполагая, что F и H обладают P_2 , докажем, что и G обладает P_2 . Если G не является простой, то P_2 истинно. Если G проста, мы имеем $F = 1$ или $F = G$. Группа G обладает P_2 в обоих случаях по предположению индукции.

Наконец, предположим, что F и H обладают P_3 . Как и выше, мы можем считать G конечно порожденной и имеющей лишь конечное число классов сопряженных элементов. Очевидно, эти свойства переносятся на H . Значит, группа H конечна, а F конечно порождена, так как она имеет конечный индекс в G . Более того, F имеет конечное число классов сопряженности по той же причине. Из наших предположений следует, что F конечна, а значит, такова и G .

Напомним, что группа называется почти полициклической, если она содержит полициклическую подгруппу конечного индекса.

ЛЕММА 4.2. *Пусть G – расширение конечной группы K при помощи полициклической группы H . Тогда G почти полициклическая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $m = |K|$. Тогда для любого $g \in G$ действие элемента $g^{m!}$ на K сопряжениями тривиально, так как орбита действия $\langle g \rangle$ содержит не более m элементов. Рассмотрим подгруппу $G_0 = \langle g^{m!} : g \in G \rangle$ и положим $K_0 = G_0 \cap K$. Ясно, что K_0 центральна в G (в частности, K конечная абелева). Далее, имеем

$$G_0/K_0 \cong G_0K/K \leq H.$$

Это влечет полициклическость G_0 . Наконец, мы имеем точную последовательность

$$1 \rightarrow K/K_0 \cong G_0K/G_0 \rightarrow G/G_0 \rightarrow G/G_0K \rightarrow 1,$$

где K/K_0 и G/G_0K являются конечными, будучи факторгруппой конечной группы и разрешимой периодической группой соответственно. Следовательно, индекс $[G: G_0]$ конечен.

ЛЕММА 4.3. *Пусть G – расширение вида*

$$1 \rightarrow F \rightarrow G \xrightarrow{\varphi} P \rightarrow 1,$$

где F и P – почти полициклические группы. Тогда G почти полициклическа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через P_0 и F_0 нормальные полициклические подгруппы конечного индекса в P и F соответственно и рассмотрим $G_0 = \varphi^{-1}(P_0)$. Пусть $|F/F_0| = i$. Тогда подгруппа $F^i = \langle f^i : f \in F \rangle$ лежит в F_0 и, таким образом, является полициклической. Более того, F^i – характеристическая подгруппа в F . Следовательно, F^i – нормальная подгруппа в G_0 . Очевидно, что факторгруппа G_0/F^i есть расширение конечной группы при помощи полициклической. По лемме 4.2 существует полициклическая подгруппа Q конечного индекса в G_0/F^i . Обозначим через L полный прообраз Q при естественном гомоморфизме $G_0 \rightarrow G_0/F^i$. Тогда L – расширение F^i при помощи Q и, таким образом, L полициклическа. Легко видеть, что индекс $[G: L]$ конечен.

Нам необходим также следующий результат, принадлежащий Россету.

ЛЕММА 4.4 (Россет, [11]). Пусть G – конечно порожденное расширение некоторой группы F с помощью почти разрешимой группы. Если F не является конечно порожденной, то G имеет экспоненциальный рост.

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы 2.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Достаточно доказать E -замкнутость свойства M . (конечная порожденность) $\implies$ (либо полиномиальность, либо экспоненциальность роста).

Допустим, мы имеем точную последовательность

$$1 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1,$$

где F и H обладают M . Очевидно, мы можем считать, что G конечно порождена. Тогда H тоже конечно порождена и имеет либо полиномиальный, либо экспоненциальный рост. Если H – группа экспоненциального роста, то такова и G . Таким образом, мы можем считать, что рост H полиномиален, т.е. H почти нильпотентна по теореме Громова [12]. Если F не конечно порождена, G имеет экспоненциальный рост по лемме 4.4. Далее, если F конечно порождена, то она является группой либо экспоненциального, либо полиномиального роста. Во втором случае G снова имеет экспоненциальный рост. Наконец, если F – группа полиномиального роста, т.е. F почти нильпотентна, то G почти разрешима по лемме 4.3. Значит, G имеет либо полиномиальный, либо экспоненциальный рост [8].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5. 1) Рассмотрим следующие свойства:

R_1 . условие максимальности для подгрупп;

R_2 . почти полициклическость.

Заметим, что R_2 является E -замкнутым по лемме 4.3, но не является L -замкнутым. Однако легко проверить, что свойство $R_1 \implies R_2$ L -замкнуто, так как группа с условием максимальности для подгрупп должна быть конечно порождена. Кроме того, поскольку R_1 SQ -замкнуто, мы заключаем, что $R_1 \implies R_2$ является E -замкнутым. Действительно, пусть некоторая группа G есть расширение F при помощи H , а F и H обе обладают $R_1 \implies R_2$. Если R_1 ложно для G , то $R_1 \implies R_2$ истинно. Если R_1 истинно, то F и H обладают R_1 ввиду SQ -замкнутости R_1 , а следовательно, F и H обладают R_2 . Так как R_2 E -замкнуто, то G обладает R_2 и импликация $R_1 \implies R_2$ опять справедлива. Для доказательства теоремы остается заметить, что всякая абелева группа с условием максимальности для подгрупп является полициклической и применить теорему 2.2.

2) Если группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, то она периодична. Остается сослаться на первое утверждение теоремы 2.3.

5. Связь с классами Куроша–Черникова. Рассмотрим некоторую группу $G \in SN^*$. Если $\mathfrak{S}$ – вполне упорядоченная разрешимая субнормальная система в G , обозначим через $\tau(\mathfrak{S})$ ее порядковый тип и определим $\min G$ формулой $\tau(G) = \min \tau(\mathfrak{S})$, где минимум берется по всем вполне упорядоченным разрешимым системам в G . Существование минимального элемента следует из вполне упорядоченности любого множества ординальных чисел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.6. Прежде всего докажем, что $SN^* \subset \mathcal{E}(A)$. Обозначим через SN_θ^* подкласс SN^* , состоящий из всех групп G с условием $\tau(G) \leq \theta$. Доказательство будет проводиться индукцией по θ .

Заметим, что θ не меньше 2 для любой группы G , так как всякий субнормальный ряд должен содержать G и $\{1\}$. Случай $\theta = 2$ тривиален. Действительно, SN_2^* состоит только из абелевых групп. Пусть теперь $\theta > 2$; допустим, что мы уже доказали вхождение $SN_\pi^* \subset \mathcal{E}(A)$ для всех $\pi < \theta$. Пусть G — группа из SN_θ^* . Заметим, что G является направленным пределом своих подгрупп, образующих субнормальный ряд, каждая из которых имеет меньший тип и, следовательно, лежит в $\mathcal{E}(A)$ по предположению индукции. Так как $\mathcal{E}(A)$ является L -замкнутым, мы получаем $G \in \mathcal{E}(A)$.

Для того чтобы доказать, что $\mathcal{E}(A) \subset SN$, достаточно заметить, что свойство SN E -замкнуто по очевидным причинам и L -замкнуто ввиду глубокого результата Куроша и Черникова, передоказанного Мальцевым (см. [9, теорема 22.3.2]). Таким образом, $\mathcal{E}(A) \subset SN$ по теореме 2.2.

ПРИМЕР 5.1. Чтобы показать, что $SN^* \neq \mathcal{E}(A)$, рассмотрим группу, строящуюся следующим образом. Положим $Z_0 = \mathbb{Z}$ и $Z_{i+1} = \mathbb{Z} \wr Z_i$. Затем возьмем индуктивный предел Z_ω семейства групп Z_i с естественными вложениями $Z_i \rightarrow Z_{i+1}$. Ясно, что $Z_\omega \in \mathcal{E}(A)$. Мы собираемся доказать, что $Z_\omega \notin SN^*$.

Пусть $\mathfrak{D} = \{D_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — вполне упорядоченный субнормальный ряд в Z_ω . Так как $\mathfrak{D}$ вполне упорядочен, множество индексов Λ также вполне упорядочено. Рассмотрим $A = \{1\}^\sharp$. По определению $A \neq \{1\}$. Пусть $A \cap Z_i \neq \{1\}$ для некоторого i . Мы хотим показать, что $D_\lambda \leq Z_i$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Это повлекло бы $Z_\omega \leq Z_i$ и привело бы к противоречию.

Применим трансфинитную индукцию по λ . Обозначим через λ_0 минимальный элемент множества Λ . Если $\lambda = \lambda_0$, то $D_\lambda = 1$ и наше утверждение справедливо. Допустим, что $\lambda > \lambda_0$ и что мы уже доказали включение $D_\mu \leq Z_i$ для всех $\mu < \lambda$. Положим

$$D_\lambda^b = \bigcup_{\mu < \lambda} D_\mu.$$

По определению субнормального ряда $D_\lambda^b \in \mathfrak{D}$. Если $D_\lambda^b = D_\lambda$, то $D_\lambda \leq Z_i$, так как каждая из групп D_μ лежит в Z_i по предположению индукции. Предположим теперь, что $D_\lambda^b \neq D_\lambda$. Тогда, очевидно, $D_\lambda = (D_\lambda^b)^\sharp$. Пусть D_λ содержит элемент $z \in Z_k \setminus Z_i$ для некоторого $k > i$. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $z \notin Z_{k-1}$. В частности, это означает, что z обладает разложением вида $z = z_1 z_2$ с нетривиальным z_2 , где $z_1 \in Z_{k-1}$ а z_2 принадлежит базе сплетения $\mathbb{Z} \wr Z_{k-1}$. Далее, рассмотрим произвольный нетривиальный элемент $d \in D_\lambda$ такой, что $d \in Z_i$. Такой элемент существует, так как $A \leq D_\lambda$ для всех $\lambda > \lambda_0$ по выбору A . Имеем

$$[d, z] = d^{-1} z_2^{-1} z_1^{-1} d z_1 z_2 = [d, z_1] (z_2^{-1})^{z_1^{-1} d z_1} z_2.$$

Так как $z_1^{-1} d z_1 \neq 1$, мы имеем $(z_2^{-1})^{z_1^{-1} d z_1} z_2 \neq 1$. Поскольку $(z_2^{-1})^{z_1^{-1} d z_1} z_2$ принадлежит базе сплетения $\mathbb{Z} \wr Z_{k-1}$, то $[d, z] \notin D_\lambda^b$. Это означает, что коммутатор $[d, z]$ имеет нетривиальный образ в D_λ / D_λ^b , что противоречит предположению об абелевости D_λ / D_λ^b .

ПРИМЕР 5.2. Построим пример конечно порожденной SN^* -группы, которая не является разрешимой. Для этого возьмем любое неразрешимое локально нильпотентное многообразие $\mathcal{V}$ (скажем, многообразие Кострикина $\mathcal{K}_p$ для простого $p \geq 5$). Затем рассмотрим свободную 2-порожденную группу F в многообразии $\mathcal{V}\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ – многообразие всех абелевых групп. Заметим, что коммутант $[F, F]$ локально нильпотентен и, таким образом, является индуктивным пределом нильпотентных групп. Напомним, что всякая подгруппа нильпотентной группы субнормальна, т.е. может быть включена в некоторый субнормальный ряд. Нетрудно видеть, что группа F лежит в SN^* (на самом деле, она допускает вполне упорядоченный субнормальный ряд порядкового типа $\omega + 1$), но F не является разрешимой, так как $[F, F]$ – $\mathcal{V}$ -свободная группа счетного ранга. Все отмеченные здесь факты должны быть вполне очевидными для читателя, хорошо знакомого с теорией многообразий групп. Мы не объясняем подробно всех деталей и отсылаем заинтересованных читателей к книгам [6] и [13].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] von Neumann J. Zur allgemeinen Theorie des Masses // Fund. Math. 1929. V. 13. P. 73–116.
- [2] Day M. M. Amenable semigroups // Illinois J. Math. 1957. V. 1. P. 509–544.
- [3] Chou Ch. Elementary amenable groups // Illinois J. Math. 1980. V. 24. P. 396–407.
- [4] Черников С. Н., Курош А. Г. Разрешимые и нильпотентные группы // УМН. 1947. Т. 2. С. 18–59.
- [5] Razmyslov Yu. P. Identities of Algebras and their Representations. Transl. Math. Monographs. V. 138. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc, 1994.
- [6] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
- [7] Григорчук Р. И. К проблеме Милнора о групповом росте // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. С. 30–33.
- [8] Wolf J. A. Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds // J. Diff. Geom. 1968. V. 2. P. 421–446.
- [9] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
- [10] Grigorchuk R. I., Wilson J. Rigidity Properties of Branch Groups. Preprint: University of Geneva, 2001.
- [11] Rosset S. A property of groups of non-exponential growth // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 54. P. 24–26.
- [12] Gromov M. Groups of polynomial growth and expanding maps // Publ. Math. IHES. 1981. V. 53. P. 53–73.
- [13] Нейман Х. Многообразия групп. М.: Мир, 1969.