Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Интегральные функционалы для экспоненты от винеровского процесса и броуновского моста: точные асимптотики и функции Лежандра, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 1, 84–105

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4060>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 05:26:09

Интегральные функционалы для экспоненты от винеровского процесса и броуновского моста: точные асимптотики и функции Лежандра

В. Р. Фаталов

В статье доказаны результаты о точных асимптотиках вероятностей

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^1 e^{\varepsilon \xi(t)} dt < b\right\}, \quad \mathbb{P}\left\{\int_0^1 e^{\varepsilon |\xi(t)|} dt < b\right\}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $0 < b < 1$ для двух гауссовских процессов $\xi(t)$ – винеровского процесса и броуновского моста. Получены также асимптотические формулы для интегралов типа Лапласа. Метод исследования – метод Лапласа для гауссовских мер в банаховых пространствах. Вычисления констант сведены к решению экстремальной задачи для функционала действия и исследованию спектра дифференциального оператора второго порядка типа Штурма–Лиувилля при помощи функций Лежандра.

Библиография: 49 названий.

1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть $w(t)$, $t \geq 0$, – стандартный винеровский процесс, $w(0) = 0$ п.н., $w_0(t)$, $t \in [0, 1]$, – стандартный броуновский мост. В данной статье на основе метода Лапласа [1]–[3] вычислим точные асимптотики вероятностей

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\int_0^1 e^{\varepsilon w(t)} dt < b\right\}, & \quad \mathbb{P}\left\{\int_0^1 e^{\varepsilon w_0(t)} dt < b\right\}, \\ \mathbb{P}\left\{\int_0^1 e^{-\varepsilon |w(t)|} dt < b\right\}, & \quad \mathbb{P}\left\{\int_0^1 e^{-\varepsilon |w_0(t)|} dt < b\right\} \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $0 < b < 1$. Также дадим некоторые родственные асимптотические формулы для математических ожиданий.

В справочнике [4; с. 586] приведена формула 1.8.4 типа Йора [5; с. 528] для плотности распределения интегрального функционала

$$\int_0^1 e^{\sigma w(t)} dt, \quad \sigma > 0. \tag{1.1}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 07-01-00077, 11-01-00050).

В формуле 1.8.4 из [4; с. 586] при $\nu = 0$ присутствует довольно сложный интеграл, содержащий вырожденную гипергеометрическую функцию $M(1/2, 3/2, z)$, вследствие чего проводить вычисления по указанной формуле непросто, см. также [6; §§ 5, 22]. Поэтому представляет большой интерес вывод различных асимптотических формул для распределений функционалов типа (1.1).

В работе [7] выделено пять типов задач, связанных с вычислением различных точных асимптотик для распределений функционалов типа (1.1). Задачи первого типа решены в [7]; там же указано, что некоторые задачи третьего типа решены в [8]; в данной статье мы дадим решения задач второго типа. Перейдем к точной формулировке полученных результатов.

На протяжении всей статьи $P_\nu^\mu(s)$, $Q_\nu^\mu(s)$, $s \in (0, 1)$, обозначают функции Лежандра первого и второго рода, см. [9; гл. 8], [10; гл. 3], [11]. Определение стандартного броуновского моста $w_0(t) \equiv \{w(t) \mid w(1) = 0\}$, $t \in [0, 1]$, имеется в книгах [12; § 2.6, п. 3] и [13; гл. 4, пример 8.5], [14].

Для фиксированного $0 < b < 1$ обозначим через $\alpha_0 \equiv \alpha_0(b) > 0$ единственный корень уравнения

$$\sin \alpha = b\alpha, \quad 0 < \alpha < \pi. \quad (1.2)$$

Несложно убедиться, что $\alpha_0(b) \downarrow 0$ при $b \uparrow 1$ и $\alpha_0(b) \uparrow \pi$ при $b \downarrow 0$.

Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ – положительные числа, которые удовлетворяют уравнению

$$P_{-1/2}^{-i\mu} \left(\sin \frac{\alpha_0}{2} \right) + P_{-1/2}^{-i\mu} \left(-\sin \frac{\alpha_0}{2} \right) = 0, \quad \text{где } \mu > 0. \quad (1.3)$$

Здесь и ниже $i = \sqrt{-1}$. Отметим, что в уравнении (1.3) параметр $\alpha_0(b)/2$ при изменении b от 1 до 0 принимает любое значение из интервала $(0, \pi/2)$.

Пусть $\{\tilde{\mu}_n\}_{n=1}^\infty$ – положительные числа, которые удовлетворяют уравнению

$$P_{-1/2}^{-i\mu} \left(\sin \frac{\alpha_0}{2} \right) - P_{-1/2}^{-i\mu} \left(-\sin \frac{\alpha_0}{2} \right) = 0, \quad \text{где } \mu > 0. \quad (1.4)$$

Несложно показать, что последовательности чисел $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\tilde{\mu}_n\}_{n=1}^\infty$ существуют (см. леммы 4 и 7 ниже), при этом для них выполнены асимптотические соотношения

$$\mu_n = \tilde{\mu}_n(1 + o(1)) = \frac{\pi n}{\log \operatorname{tg}((\alpha_0 + \pi)/4)}(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < b < 1$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы утверждения.

(i) Выполнены асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 e^{-\varepsilon|w(t)|} dt < b \right\} &= 2\mathbf{P} \left\{ \int_0^1 e^{-\varepsilon w(t)} dt < b \right\} (1 + o(1)) \\ &= \exp \left\{ -\frac{K_1}{\varepsilon^2} \right\} \frac{\varepsilon \sqrt{2}}{\sqrt{\pi q_1 \Delta_1}} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$K_1 = \frac{\alpha_0^2}{2} \left[\frac{b}{\cos^2(\alpha_0/2)} - 1 \right] = \alpha_0 \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\alpha_0^2}{2} > 0, \quad (1.7)$$

$$q_1 = \frac{\alpha_0 \operatorname{tg}(\alpha_0/2)}{2 + \alpha_0 \operatorname{tg}(\alpha_0/2)} \left[1 - \frac{\alpha_0}{\operatorname{tg} \alpha_0} \right] > 0, \quad (1.8)$$

$$\Delta_1 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \rho_n) > 1, \quad -8 < \rho_n = -\frac{8}{4\mu_n^2 + 1} < 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

при этом $-8 < \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n < \dots < 0$ и

$$\rho_n = - \left[\log \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_0 + \pi}{4} \right) \right]^2 \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

(ii) Выполнены асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 e^{-\varepsilon |w_0(t)|} dt < b \right\} &= 2\mathbf{P} \left\{ \int_0^1 e^{-\varepsilon w_0(t)} dt < b \right\} (1 + o(1)) \\ &= \exp \left\{ -\frac{4K_1}{\varepsilon^2} \right\} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi q_1 \Delta_1 \Delta_2}} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где K_1, q_1, Δ_1 определены в п. (i),

$$\Delta_2 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \tilde{\rho}_n) > 1, \quad -8 < \tilde{\rho}_n = -\frac{8}{4\tilde{\mu}_n^2 + 1} < 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.12)$$

при этом $-8 < \tilde{\rho}_1 < \tilde{\rho}_2 < \dots < \tilde{\rho}_n < \dots < 0$ и

$$\tilde{\rho}_n = \rho_n (1 + o(1)) = - \left[\log \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_0 + \pi}{4} \right) \right]^2 \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко видеть, что асимптотическое соотношение (1.5) вытекает из формул (1.9), (1.10), (1.12) и (1.13).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что процесс $-w(t)$, $t \in [0, 1]$, является стандартным винеровским процессом, а процесс $-w_0(t)$, $t \in [0, 1]$, представляет собой стандартный броуновский мост. Поэтому выполнены равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 e^{\varepsilon w(t)} dt < b \right\} &= \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 e^{-\varepsilon w(t)} dt < b \right\}, \\ \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 e^{\varepsilon w_0(t)} dt < b \right\} &= \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 e^{-\varepsilon w_0(t)} dt < b \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, к вероятностям из правых частей данных равенств применимы утверждения (i) и (ii) теоремы 1. Это замечание справедливо и для всех остальных формул, в которых присутствуют функционалы $\int_0^1 e^{\varepsilon w(t)} dt$ и $\int_0^1 e^{\varepsilon w_0(t)} dt$.

1.1. Точные асимптотики математических ожиданий экспонент. Во многих разделах теории вероятностей и математической физики возникает необходимость вычисления приближенных (асимптотических) значений математических ожиданий экспонент от функционалов для винеровского и других гауссовских и марковских процессов, см., например, [1; гл. 1], [15; § 3], [16; § 18], [17], [18], [19; гл. 5], [20]–[22]. Выяснилось, что наиболее эффективным и общим методом вычисления точных асимптотик указанных математических ожиданий, зависящих от большого (малого) параметра, является метод Лапласа в банаховых пространствах. В данной статье мы рассмотрим некоторые аналоги теоремы 1, сформулированные для средних.

Пусть $d > 0$ – фиксированное число. Обозначим через $\theta_0 \equiv \theta_0(d) > 0$ единственный корень уравнения

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{d}} \theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (1.14)$$

Несложно убедиться, что $\theta_0(d) \downarrow 0$ при $d \downarrow 0$ и $\theta_0(d) \uparrow \pi/2$ при $d \uparrow \infty$.

Пусть $\{\hat{\mu}_n\}_{n=1}^{\infty}$ – положительные числа, которые удовлетворяют уравнению

$$P_{-1/2}^{-i\mu}(\sin \theta_0) + P_{-1/2}^{-i\mu}(-\sin \theta_0) = 0, \quad \text{где } \mu > 0. \quad (1.15)$$

Последовательность чисел $\{\hat{\mu}_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует. Это следует из аналогичного факта, доказанного для уравнения (1.3), поскольку уравнение (1.15) относится к классу уравнений типа (1.3). Кроме того, имеет место асимптотическое соотношение

$$\hat{\mu}_n = \frac{\pi n}{\log \operatorname{tg}(\theta_0/2 + \pi/4)}(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.16)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $d > 0$ фиксировано. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left\{ -\frac{d}{\varepsilon^2} \int_0^1 e^{-\varepsilon |w(t)|} dt \right\} &= 2 \mathbb{E} \exp \left\{ -\frac{d}{\varepsilon^2} \int_0^1 e^{-\varepsilon w(t)} dt \right\} (1 + o(1)) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\Delta_3}} \exp \left\{ -\frac{K_2}{\varepsilon^2} \right\} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.17)$$

где

$$d > K_2 \equiv K_2(d) = \sqrt{2d} \cos \theta_0 (2 \operatorname{tg} \theta_0 - \theta_0) = 2\theta_0 (2 \operatorname{tg} \theta_0 - \theta_0) > 2\theta_0 \operatorname{tg} \theta_0 > 0, \quad (1.18)$$

$$\Delta_3 \equiv \Delta_3(d) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \hat{\beta}_n) > 1, \quad 8 > \hat{\beta}_n = \frac{8}{4\hat{\mu}_n^2 + 1} > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.19)$$

при этом $8 > \hat{\beta}_1 > \hat{\beta}_2 > \dots > \hat{\beta}_n > \dots > 0$ и

$$\hat{\beta}_n = \left[\log \operatorname{tg} \left(\frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2 \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.20)$$

Отметим, что асимптотическое соотношение (1.16) вытекает непосредственно из формул (1.19) и (1.20).

Приведем результат для броуновского моста, аналогичный теореме 2. Для фиксированного $d > 0$ обозначим через $\varphi_0 \equiv \varphi_0(d) > 0$ единственный корень уравнения

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{d}} \varphi, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}. \quad (1.21)$$

Из формул (1.14), (1.21) следует, что $\varphi_0(d) = \theta_0(d/4)$.

Пусть $\{\bar{\mu}_n\}_{n=1}^{\infty}$ – положительные числа, которые удовлетворяют уравнению

$$P_{-1/2}^{-i\mu}(\sin \varphi_0) - P_{-1/2}^{-i\mu}(-\sin \varphi_0) = 0, \quad \text{где } \mu > 0. \quad (1.22)$$

Последовательность чисел $\{\bar{\mu}_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует. Это следует из аналогичного факта, верного для уравнения (1.4), поскольку уравнение (1.22) относится к классу уравнений типа (1.4). Кроме того, имеет место асимптотическое соотношение

$$\bar{\mu}_n = \frac{\pi n}{\log \operatorname{tg}(\varphi_0/2 + \pi/4)}(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.23)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $d > 0$ фиксировано. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left\{ -\frac{d}{\varepsilon^2} \int_0^1 e^{-\varepsilon|w_0(t)|} dt \right\} &= 2\mathbb{E} \exp \left\{ -\frac{d}{\varepsilon^2} \int_0^1 e^{-\varepsilon w_0(t)} dt \right\} (1 + o(1)) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\Delta_4 \Delta_5}} \exp \left\{ -\frac{K_3}{\varepsilon^2} \right\} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.24)$$

где

$$\begin{aligned} d > K_3 \equiv K_3(d) &= 4K_2 \left(\frac{d}{4} \right) = 2\sqrt{2d} \cos \varphi_0 (2 \operatorname{tg} \varphi_0 - \varphi_0) \\ &= 8\varphi_0 (2 \operatorname{tg} \varphi_0 - \varphi_0) > 8\varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0 > 0, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\Delta_4 \equiv \Delta_4(d) = \Delta_3 \left(\frac{d}{4} \right) > 1, \quad (1.26)$$

K_2, Δ_3 определены в теореме 2,

$$\Delta_5 \equiv \Delta_5(d) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \bar{\beta}_n) > 1, \quad 8 > \bar{\beta}_n = \frac{8}{4\bar{\mu}_n^2 + 1} > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.27)$$

при этом $8 > \bar{\beta}_1 > \bar{\beta}_2 > \dots > \bar{\beta}_n > \dots > 0$ и

$$\bar{\beta}_n = \left[\log \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2 \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.28)$$

Отметим, что асимптотическое соотношение (1.23) следует непосредственно из формул (1.27) и (1.28).

Рассмотрим теперь некоторые другие, более сложные, задачи нахождения асимптотик математических ожиданий экспонент. Здесь на основе метода Лапласа пока возможно вычисление только *логарифмических* асимптотик.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $d > 0$ фиксировано. Тогда выполнены следующие асимптотические соотношения:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{E} \exp \left\{ -\frac{d}{\varepsilon^2} \int_0^1 e^{\varepsilon |w(t)|} dt \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{E} \exp \left\{ -\frac{d}{\varepsilon^2} \int_0^1 e^{\varepsilon |w_0(t)|} dt \right\} = -d,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{d}{\varepsilon^2} \int_0^1 e^{-\varepsilon |w(t)|} dt \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{d}{\varepsilon^2} \int_0^1 e^{-\varepsilon |w_0(t)|} dt \right\} = d.$$

2. Метод Лапласа для гладких функционалов от гауссовских процессов

В работах [2], [3] был построен чрезвычайно эффективный метод Лапласа, предназначенный для вычисления точных асимптотик больших уклонений распределений гладких функционалов от гауссовских процессов, см. также [23]–[27]. Сформулируем результат, лежащий в основе метода Лапласа для гауссовских процессов. Этот результат удобно излагать на языке гауссовских мер. Необходимые сведения о гауссовских мерах в банаховых пространствах имеются в книгах [28]–[32].

Пусть $(B, \|\cdot\|)$ – действительное сепарабельное банахово пространство, B – борелевская σ -алгебра в B , B^* – сопряженное к B пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – линейная форма, устанавливающая двойственность между B и B^* . Пусть P_A – гауссовская мера, определенная на B , и имеющая среднее значение нуль и инъективный ковариационный оператор $A: B^* \rightarrow B$. Напомним, что ковариационный оператор A является: симметричным, т.е. $\langle Ax, y \rangle = \langle Ay, x \rangle$ для всех $x, y \in B^*$; положительным, т.е. $\langle Ay, y \rangle \geq 0$ для всех $y \in B^*$; ядерным (см. [30; гл. 3, § 1, п. 1, § 2, п. 3]).

Инъективность оператора A означает, что $\langle Ay, y \rangle > 0$ для всех $0 \neq y \in B^*$.

Будем обозначать первую и вторую производные по Фреше числовой функции $S: B \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x через $S'(x)$ и $S''(x)$; необходимые определения можно найти в книгах [33; § 2], [34; § 2.2]. Мы будем предполагать, что производные $S'(x)$ и $S''(x)$ можно рассматривать как ограниченные линейные операторы из B в $\mathbb{R}$ и из B в B^* соответственно, при этом будем употреблять запись $S'(x)[h] = \langle h, S'(x) \rangle$, $S''(x)[h, v] = \langle h, S''(x)v \rangle$ при $h, v \in B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть U – открытое множество в B и $0 < \alpha < 1$. Обозначим через $\text{Hol}_\alpha^2(U)$ множество дважды дифференцируемых по Фреше на U числовых функций $S: B \rightarrow \mathbb{R}$, для которых

$$\|S''(x) - S''(y)\| = O(\|x - y\|^\alpha) \quad \text{при} \quad \|x - y\| \rightarrow 0, \quad x, y \in U.$$

Здесь и ниже операторная норма также обозначена символом $\|\cdot\|$. Функции, удовлетворяющие определению 1, рассмотрены, например, в статье [35; с. 880].

Обозначим также $\text{Dom}(T)$ – область определения оператора T , $\text{Ran}(T)$ – область значений оператора T , $\text{Ker } T := \{x \in B : Tx = 0\}$ – ядро оператора T , заданного на B , I – тождественный оператор в B . Через T^{-1} будем записывать обратный оператор к оператору T . Везде ниже произведение операторов означает их композицию.

2.1. Точные асимптотики больших уклонений для гауссовских мер.

Пусть $(H_A, \|\cdot\|_A)$ обозначает гильбертово пространство, ассоциированное с ковариационным оператором A , т.е. пополнение области значений $\text{Ran}(A)$ оператора A

относительно предгильбертовой нормы $\|Ay\|_A := \sqrt{\langle Ay, y \rangle}$, $y \in B^*$, см. [30; с. 126]). Скалярное произведение в $H \equiv H_A$ будем записывать в виде $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

Предположим, что выполнены следующие условия.

(C1) Пусть D_0 – открытое множество в B , которое допускает представление $D_0 = \{x \in B : Q(x) > 0\}$, где $Q(x)$ – непрерывная действительная функция. Предположим, что D_0 не содержит нулевого элемента в B .

Обозначим через $D = \{x \in B : Q(x) \geq 0\}$ замыкание множества D_0 в B .

(C2) Квадратическая форма $\langle x, A^{-1}x \rangle$ достигает своего минимума на множестве $D \cap \text{Dom}(A^{-1})$ в конечном числе точек $x^1, x^2, \dots, x^m$ из границы множества D . Предположим, что минимум $\inf_{x \in D \cap H_A} \|x\|_A^2$ также достигается только в точках $x^1, x^2, \dots, x^m$.

(C3) Пусть в пространстве $(B, \|\cdot\|)$ существуют окрестности U_i точек x^i и плотные в U_i множества S_i такие, что $x^i \in S_i$, функция Q дважды дифференцируема по Фреше в точках множеств S_i , Q принадлежит классам $\text{Hol}_\alpha^2(S_i)$ при некотором $\alpha > 0$, причем $\langle x^i, Q'(x^i) \rangle \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

(C4) Для $i = 1, 2, \dots, m$ линейный ядерный оператор $AQ''(x^i): B \rightarrow B$ не имеет собственного числа, равного $1/\lambda_i$, где

$$\lambda_i = \frac{\langle x^1, A^{-1}x^1 \rangle}{\langle x^i, Q'(x^i) \rangle} > 0. \quad (2.1)$$

Из условия (C4) вытекает, что оператор $R_i := I - \lambda_i AQ''(x^i): B \rightarrow B$ является инъективным, $\text{Ker } R_i = \{0\}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Следовательно, согласно альтернативе Фредгольма (см. [36; с. 499, 504]), $\text{Ran}(R_i) = B$ и существует обратный оператор R_i^{-1} на всем B . В частности, $x^i \in \text{Dom}(R_i^{-1})$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Сведения о детерминантах, связанных с ядерными операторами в гильбертовом и банаховом пространствах имеются в книгах [16; с. 29], [37; с. 199], [38; гл. 27], [39].

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия (C1)–(C4). Предположим, что для $i = 1, 2, \dots, m$ собственные значения β_{ik} , $k = 1, 2, \dots$, ядерного оператора $AQ''(x^i): B \rightarrow B$ таковы, что конечен детерминант $\det R_i := \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_i \beta_{ik})$. Тогда имеют место равенства

$$x^i = \lambda_i AQ'(x^i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.2)$$

и при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$P_A(uD) = \exp\left\{-\frac{u^2}{2} \langle x^1, A^{-1}x^1 \rangle\right\} \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^m |\det R_i \langle R_i^{-1}x^i, A^{-1}x^i \rangle|^{-1/2} (1 + o(1)). \quad (2.3)$$

Вариант теоремы 4 был доказан в случае гильбертова пространства в работе [2], банаховозначный вариант изложен в статьях [1; следствие 3.1] и [3; теорема 1]. Условия (C1), (C3) и (C4) в теореме 4 записаны в несколько иной, более удобной для применений форме, чем соответствующие условия в работах [1] и [3].

Результаты типа теоремы 1 доказываются при помощи теоремы 4, в которой нужно положить $u = 1/\varepsilon \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.2. Точные асимптотики для гауссовских интегралов типа Лапласа.

Приведем теперь теорему, с помощью которой можно вычислять точные асимптотики средних из формул (1.17) и (1.24), полагая $\varepsilon = 1/u$, $u \rightarrow \infty$.

Предположим, что выполнены следующие условия.

(D1) Пусть f и F – непрерывные действительные функции, заданные на B , такие, что для некоторых постоянных $b_1 > 0$, $b_2 \geq 0$, $0 \leq b_3 < 1/2\|A\|$, $b_4 \geq 0$ справедливы неравенства $|f(x)| \leq b_1 \exp\{b_2\|x\|^2\}$, $F(x) \geq -b_3\|x\|^2 - b_4$ при $x \in B$.

(D2) Функционал $\Lambda(x) := F(x) + (1/2)\langle x, A^{-1}x \rangle$ достигает своего минимума на $\text{Dom}(A^{-1})$ в конечном числе точек $x^1, x^2, \dots, x^m$. Предположим, что минимум $\inf_{x \in H_A} [F(x) + 1/2\|x\|_A^2]$ также достигается только в точках $x^1, x^2, \dots, x^m$.

(D3) Пусть в пространстве B существуют окрестности U_i точек x^i и плотные в U_i множества S_i такие, что $x^i \in S_i$, функция F дважды дифференцируема по Фреше в точках множеств S_i , F принадлежит классам $\text{Hol}_\alpha^2(S_i)$ при некотором $\alpha > 0$, причем $f(x^i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

(D4) Предположим, что для $i = 1, 2, \dots, m$ собственные значения β_{ik} , $k = 1, 2, \dots$, ядерного оператора $AF''(x^i): B \rightarrow B$ таковы, что конечен и не равен нулю детерминант $\det R_i := \prod_{k=1}^\infty (1 + \beta_{ik})$, где $R_i = I + AF''(x^i): B \rightarrow B$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть P_A – гауссовская мера в B , имеющая среднее значение нуль и инъективный ковариационный оператор A . Пусть выполнены условия (D1)–(D4). Тогда $\det R_i > 0$, имеют место равенства $x^i = -AF'(x^i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, и при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\int_B f(x) \exp\{-u^2 F(x)\} dP_A(ux) = \exp\{-u^2 \Lambda(x^1)\} \sum_{i=1}^m f(x^i) [\det R_i]^{-1/2} (1 + o(1)). \quad (2.4)$$

Теорема 5 представляет собой банаховозначный вариант известного результата Эллиса и Розен [18; I, теорема 2.1] об асимптотическом разложении гауссовского интеграла типа Лапласа в гильбертовом пространстве, см. также [1; § 3].

Отметим, что условие (D3) теоремы 5 является значительно более слабым, чем соответствующее условие из [18; I] о бесконечной дифференцируемости по Фреше функций f и F на всем пространстве.

Ограничение на F из условия (D1) обеспечивает конечность интеграла в левой части формулы (2.4) – это следует из известной теоремы Ландау–Маркуса–Шеппа–Ферника об экспоненциальной интегрируемости квадрата нормы гауссовского случайного элемента, см. [29; гл. 3, теорема 3.1], [30; с. 257], [31; § 12], [32; § 2.6]. Примеры применения теоремы 5 в случае функционала $F(x) = (\int_0^1 |x(t)|^p dt)^{\alpha/p}$ при $p > 0$, $0 < \alpha < 2$ для винеровского процесса и броуновского моста даны в работе [22].

3. Выбор банахова функционального пространства, используемого при доказательствах теорем 1–3

Мы докажем теорему 1, применяя теорему 4; доказательство теорем 2 и 3 проводится при помощи теоремы 5. При этом мы будем полагать, что большой параметр u имеет вид $u = 1/\varepsilon \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть P_w и P_{w_0} обозначают распределения гауссовских процессов $w(t)$, $w_0(t)$, $t \in [0, 1]$, в пространстве $C[0, 1]$ непрерывных на $[0, 1]$ функций, снабженном нормой супремума. Возьмем в качестве банахова пространства B обычное гильбертово пространство $L^2 \equiv L^2[0, 1]$ интегрируемых в квадрате действительных измеримых функций со скалярным произведением и нормой, имеющих следующий вид:

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t) dt, \quad \|x\| = \left(\int_0^1 x^2(t) dt \right)^{1/2}, \quad x, y \in L^2.$$

Сопряженное к L^2 пространство мы отождествляем с L^2 .

Мы будем рассматривать гауссовские меры P_w и P_{w_0} , полагая их заданными в пространстве L^2 , имея в виду, что эти меры сосредоточены на $C[0, 1]$.

Как известно, в этом случае меры P_w и P_{w_0} имеют нулевые средние и инъективные ковариационные операторы, соответственно, $A_w: L^2 \rightarrow L^2$ и $A_{w_0}: L^2 \rightarrow L^2$ интегрального типа:

$$A_w x(t) = \int_0^1 \min(t, s)x(s) ds, \quad A_{w_0} x(t) = \int_0^1 [\min(t, s) - ts]x(s) ds, \quad x \in L^2, \quad (3.1)$$

см., например, [17; с. 51], [29; с. 47]. Пусть $C^2[0, 1]$ – множество дважды дифференцируемых на $[0, 1]$ функций $x(t)$.

ЛЕММА 1. *Области значений ковариационных операторов A_w , A_{w_0} , определенных в формуле (3.1) имеют вид*

$$\begin{aligned} \text{Ran}(A_w) &= \{x \in C^2[0, 1] : x(0) = x'(1) = 0\}, \\ \text{Ran}(A_{w_0}) &= \{x \in C^2[0, 1] : x(0) = x(1) = 0\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Обратные операторы задаются формулами

$$\begin{aligned} [A_w^{-1}y](t) &= -y''(t), \quad y \in \text{Ran}(A_w), \quad \text{для всех } t \in [0, 1], \\ [A_{w_0}^{-1}y](t) &= -y''(t), \quad y \in \text{Ran}(A_{w_0}), \quad \text{для всех } t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения леммы получаются в результате двукратного дифференцирования по t равенств $y(t) = A_w x(t)$ и $y(t) = A_{w_0} x(t)$, см., например, [28; с. 279].

Пусть $(H_{A_w}, \|\cdot\|_{A_w})$ обозначает гильбертово пространство, ассоциированное с распределением винеровского процесса $w(t)$, $t \in [0, 1]$, и $(H_{w_0}, \|\cdot\|_{w_0})$ – гильбертово пространство, ассоциированное с распределением броуновского моста $w_0(t)$, $t \in [0, 1]$. Оба эти пространства описаны в предложении 5 статьи [7].

4. Доказательство пункта (i) теоремы 1

На протяжении данного раздела фиксировано число $0 < b < 1$.

Сначала мы найдем асимптотику первой вероятности из формулы (1.6), используя теорему 4, где мы будем полагать $B = L^2$, $P_A = P_w$, $A = A_w$, $u = 1/\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.1. Выбор основного функционала. Возьмем в качестве функционала Q из теоремы 4 следующий функционал:

$$G(x) := b - \int_0^1 e^{-|x(t)|} dt, \quad x \in L^2. \quad (4.1)$$

Обозначим через $\mathcal{X}$ множество функций из $C[0, 1]$, имеющих конечное число нулей. Очевидно, множество $\mathcal{X}$ всюду плотно в $C[0, 1]$, а, следовательно, и в L^2 . Отметим, что $0 \notin \mathcal{X}$; здесь функция, тождественно равная нулю на $[0, 1]$, также обозначена через 0.

ЛЕММА 2. *Функционал (4.1) трижды дифференцируем по Фреше в каждой точке $x \in \mathcal{X}$ с производными*

$$G'(x) = e^{-|x(t)|} \operatorname{sign} x(t), \quad (4.2)$$

$$G''(x) = -e^{-|x(t)|} < 0, \quad (4.3)$$

$$G'''(x)[h, g, v] = \int_0^1 e^{-|x(t)|} \operatorname{sign} x(t) h(t) g(t) v(t) dt, \quad h, g, v \in L^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы получаем, применяя известные формулы для первых трех производных интегрального функционала (4.1), см. [34; с. 178], [40; § 20]. Отметим, что функционал (4.1) не является выпуклым вверх функционалом.

Положим $D_0 = \{x \in L^2 : G(x) > 0\}$. Тогда

$$D = \{x \in L^2 : G(x) \geq 0\}. \quad (4.4)$$

Очевидно, множество (4.4) удовлетворяет условию (C1).

4.2. Решение экстремальной задачи. Решим экстремальную задачу из условия (C2) для множества D , определенного в (4.4) и ковариационного оператора A_w , заданного в (3.1). Определим функцию

$$x_0(t) = 2 \log \left\{ \frac{\cos[(\alpha_0/2)(t-1)]}{\cos(\alpha_0/2)} \right\}, \quad t \in [0, 1], \quad (4.5)$$

где α_0 – единственный корень уравнения (1.2). Несложно убедиться, что функция (4.5) положительна, монотонно возрастает на отрезке $[0, 1]$, $x_0(0) = 0$ и $x_0 \in \mathcal{X} \cap \operatorname{Dom}(A_w^{-1})$.

ЛЕММА 3. *Минимум в экстремальной задаче*

$$\langle x, A_w^{-1} x \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in D \cap \operatorname{Dom}(A_w^{-1}), \quad (4.6)$$

равен $2K_1$ и достигается на двух функциях $x_0(t)$ и $-x_0(t)$, лежащих на границе ∂D . Число K_1 определено в формуле (1.7). Минимум $\inf_{x \in D \cap H_{A_w}} \|x\|_{A_w}^2$ также достигается только в двух точках x_0 и $-x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя первую теорему Вейерштрасса (см. теорему 9.2 и замечание 9.1 в [33; с. 114]) можно показать, что минимум в задаче (4.6) достижим. Решим экстремальную задачу (4.6) методом множителей Лагранжа, [34; с. 252].

Составляя функцию Лагранжа для задачи (4.6), несложно убедиться, что минимум в задаче (4.6) достигается на границе множества D . Уравнение (2.2) для экстремальной функции $x(t)$ согласно соотношениям (3.1) и (4.2) является нелинейным интегральным уравнением Хаммерштейна и имеет вид (индекс i опущен)

$$x(t) = \lambda \int_0^1 \min(t, s) e^{-|x(s)|} \operatorname{sign} x(s) ds, \quad t \in [0, 1], \quad (4.7)$$

где $\lambda > 0$ – множитель Лагранжа, при этом в силу (4.1) и (4.4) должно быть выполнено условие связи

$$\int_0^1 e^{-|x(t)|} dt = b. \quad (4.8)$$

Поскольку $x \in \operatorname{Dom}(A_w^{-1})$, то, учитывая (3.2), (3.3), заключаем, что экстремальная функция дважды дифференцируема на $[0, 1]$. Дважды дифференцируя обе части уравнения (4.7), убеждаемся, что интегральное уравнение (4.7) эквивалентно следующей нелинейной граничной задаче:

$$\begin{cases} x''(t) = -\lambda e^{-|x(t)|} \operatorname{sign} x(t), & t \in [0, 1], \\ x(0) = 0, & x'(1) = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Мы будем искать *положительное* решение задачи (4.8), (4.9), т.е. будем полагать, что $x(t) \geq 0$, $t \in [0, 1]$. Можно показать, что *знакопеременные* решения задачи (4.8), (4.9) не доставляют минимума в экстремальной задаче (4.6).

Для положительного $x(t)$ задача (4.8), (4.9) принимает вид

$$\begin{cases} x''(t) = -\lambda e^{-x(t)}, & t \in [0, 1], \\ x(0) = 0, & x'(1) = 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\int_0^1 e^{-x(t)} dt = b. \quad (4.11)$$

Из первого уравнения в (4.10) следует, что $x''(t) < 0$ при $t \in [0, 1]$, поэтому искомая экстремаль $x(t)$ является выпуклой вверх функцией. Поскольку $x(0) = 0$ и $x'(1) = 0$, отсюда следует, что экстремальная функция монотонно возрастает на отрезке $[0, 1]$ и достигает своего максимума в точке $t = 1$. Записывая первое уравнение в (4.10) в виде $d(x'(t))^2 = 2\lambda de^{-x(t)}$, получаем

$$(x'(t))^2 = 2\lambda(e^{-x(t)} - C), \quad t \in [0, 1], \quad (4.12)$$

где

$$0 < C = e^{-x(1)} < 1. \quad (4.13)$$

Учитывая возрастание экстремали $x(t)$ на отрезке $[0, 1]$, убеждаемся, что уравнение (4.12) вместе с первым граничным условием из (4.10) эквивалентно следующей задаче:

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{2\lambda} \sqrt{e^{-x(t)} - C}, & t \in [0, 1], \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение в (4.14), получаем следующее уравнение:

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{e^{-x} - C}} = \sqrt{2\lambda} t, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.15)$$

Используя формулу 17 из п. 1.1.2 справочника [41; с. 24], находим

$$\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{e^{-x} - C}} = \frac{2}{\sqrt{C}} [\arcsin(\sqrt{C} e^{y/2}) - \arcsin \sqrt{C}] \quad \text{при } 0 \leq y \leq x(1). \quad (4.16)$$

Принимая во внимание формулы (4.15) и (4.16), получаем искомую экстремаль

$$x_0(t) = 2 \log \left[\sin \left(\frac{\sqrt{\lambda C}}{\sqrt{2}} t + \arcsin \sqrt{C} \right) \right] - \log C, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.17)$$

Вычислим постоянные C и λ . Положив в формуле (4.17) $t = 1$ и учитывая (4.13), получаем первое уравнение для параметров C и λ

$$\frac{\sqrt{\lambda C}}{\sqrt{2}} = \arccos \sqrt{C}. \quad (4.18)$$

Запишем второе уравнение. Почленно интегрируя уравнение в (4.10) и применяя формулу (4.11), находим

$$\int_0^1 x''(t) dt = -\lambda \int_0^1 e^{-x(t)} dt = -\lambda b.$$

Учитывая второе граничное условие в (4.10), получаем

$$\int_0^1 x''(t) dt = -x'(0).$$

Из двух приведенных равенств следует равенство $x'(0) = \lambda b$. Далее, положив в уравнении из формулы (4.14) $t = 0$, находим $x'(0) = \sqrt{2\lambda} \sqrt{1 - C}$. Из последних двух равенств вытекает второе уравнение для параметров $1 > C > 0$ и $\lambda > 0$:

$$\sqrt{\lambda} b = \sqrt{2} \sqrt{1 - C}. \quad (4.19)$$

Решая совместно уравнения (4.18) и (4.19), получаем следующее уравнение для параметра C :

$$\sqrt{C} \sqrt{1 - C} = b \arccos \sqrt{C}. \quad (4.20)$$

Для решения этого уравнения введем новый параметр

$$\alpha = 2 \arccos \sqrt{C} \in (0, \pi). \quad (4.21)$$

Имеют место равенства $\sqrt{C} = \cos(\alpha/2)$ и $\sqrt{1 - C} = \sin(\alpha/2)$. Используя эти формулы, убеждаемся, что уравнение (4.20) в результате замены (4.21) принимает следующий вид: $\sin \alpha = b\alpha$, $\alpha \in (0, \pi)$. Это есть уравнение (1.2), единственный корень которого мы обозначили через α_0 . Используя формулы (4.18), (4.19) и (4.21), находим искомые значения C_0 и λ_0 параметров C и λ :

$$C_0 = \cos^2 \frac{\alpha_0}{2}, \quad \lambda_0 = \frac{2}{b^2} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} = \frac{\alpha_0^2}{2 \cos^2(\alpha_0/2)}. \quad (4.22)$$

Подставляя значения (4.22) в формулу (4.17) и учитывая вышеизложенное, приходим к выводу, что единственная положительная функция x_0 , доставляющая минимум в задаче (4.6), имеет вид (4.5). Ясно, что в силу формулы (4.11) $x_0(t)$ принадлежит границе множества D . Очевидно, что отрицательная функция $-x_0(t)$ также доставляет минимум в задаче (4.6).

Докажем, что минимальное значение $\langle x_0, A_w^{-1}x_0 \rangle$ в задаче (4.6) равно $2K_1$. Используя формулы (3.2), (3.3), (4.11) и (4.12) с $C = C_0$ и $\lambda = \lambda_0$, в результате интегрирования по частям, получаем цепочку равенств

$$\langle x_0, A_w^{-1}x_0 \rangle = - \int_0^1 x_0(t)x_0''(t) dt = \int_0^1 (x_0'(t))^2 dt = 2\lambda_0(b - C_0). \quad (4.23)$$

Подставляя значения (4.22) в формулу (4.23), получаем

$$\langle x_0, A_w^{-1}x_0 \rangle = \alpha_0^2 \left[\frac{b}{\cos^2(\alpha_0/2)} - 1 \right] = 2K_1.$$

Второе равенство в формуле (1.7) выводится с учетом равенства $\sin \alpha_0 = b\alpha_0$. Последнее неравенство в формуле (1.7) вытекает из известной оценки $\operatorname{tg} x > x$, верной при $0 < x < \pi/2$, см., например, п. 4.3.80 в книге [9; с. 40].

Применяя предложение 5 из [7], несложно доказать, что минимум $\inf_{x \in D \cap H_{A_w}} \|x\|_{A_w}^2$ также достигается только в двух точках x_0 и $-x_0$. Лемма 3 доказана.

4.3. Исследование спектра интегрального оператора $A_w G''(x_0)$. Как видно, вследствие лемм 2 и 3 гауссовская мера P_w и множество (4.4) удовлетворяют условиям (C1)–(C3) теоремы 4 с $m = 2$, $x^1 = x_0$ и $x^2 = -x_0$. При этом, в силу соотношений (4.2), (4.22) для чисел λ_i из формулы (2.1) выполнены равенства $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$. Согласно формуле (4.3) справедливо равенство $G''(x_0) = G''(-x_0)$, поэтому достаточно исследовать спектр интегрального оператора $A_w G''(x_0): L^2 \rightarrow L^2$. Этот оператор является ядерным как композиция ядерного оператора A_w и ограниченного оператора $G''(x_0)$, см. [38; с. 99].

Напомним, что в условиях гильбертова пространства L^2 в силу теоремы В. Лидского о следе детерминант оператора $R_1 = I - \lambda_0 A_w G''(x_0)$ конечен, см. [37; с. 199], [39], [42; с. 195, 220]. Согласно формулам (4.3), (4.5) выполнены равенства

$$G''(x_0) = -e^{-x_0(t)} = -\frac{\cos^2(\alpha_0/2)}{\cos^2[(\alpha_0/2)(1-t)]}, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.24)$$

ЛЕММА 4. *Собственные числа $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ ядерного интегрального оператора $A_w G''(x_0)$ имеют следующий вид:*

$$\beta_n = \frac{\rho_n}{\lambda_0}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \text{при этом} \quad -\frac{8}{\lambda_0} < \beta_n < 0; \quad (4.25)$$

здесь числа $\{\rho_n\}_{n=1}^\infty$ определены в формуле (1.9). Справедливо равенство

$$\det R_1 \equiv \det[I - \lambda_0 A_w G''(x_0)] = \Delta_1 \quad (4.26)$$

и выполнено соотношение (1.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем множество собственных чисел $\{\beta_n\}$ интегрального оператора $A_w G''(x_0)$. С этой целью рассмотрим линейное интегральное уравнение (относительно β и z)

$$A_w G''(x_0)z = \beta z, \quad z \in L^2. \quad (4.27)$$

В силу формул (3.1) и (4.3) оператор $A_w G''(x_0)$ является отрицательным, поэтому в уравнении (4.27) параметр $\beta < 0$. Кроме того, в (4.27) z принадлежит области значений оператора A_w . В силу инъективности оператора A_w уравнение (4.27) эквивалентно следующему уравнению: $G''(x_0)z = \beta A_w^{-1}z$, $z \in \text{Dom}(A_w^{-1})$. Согласно соотношениям (3.2), (3.3), (4.24) это уравнение равносильно следующей граничной задаче:

$$\begin{cases} z''(t) = \frac{\cos^2(\alpha_0/2)}{\beta \cos[(\alpha_0/2)(1-t)]} z(t), & t \in [0, 1], \\ z(0) = z'(1) = 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Самосопряженная граничная задача на собственные значения (4.28) представляет собой задачу Штурма–Лиувилля (см. [43; ч. 1, п. 9.2], [44; с. 42]), в качестве параметра берется $1/\beta$. Согласно осцилляционной теореме Штурма ([43; ч. 1, п. 9.2]) задача (4.28) имеет счетное множество однократных собственных чисел $\{1/\beta_n\}_{n=1}^\infty$, при этом $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \dots < 0$. В силу известной теоремы (см. [45; с. 125]) выполнены следующие асимптотические соотношения при $n \rightarrow \infty$:

$$\beta_n = -\frac{1}{\pi^2 n^2} \left[\int_0^1 \sqrt{h(t)} dt \right]^2 (1 + o(1)) = \frac{\cos^2(\alpha_0/2)}{\pi^2 n^2} \left[\int_0^1 \frac{dt}{\cos[(\alpha_0/2)(1-t)]} \right]^2 (1 + o(1)). \quad (4.29)$$

Используя формулу 14 из п. 1.1.2 справочника [41; с. 24], находим

$$\int_0^1 \frac{dt}{\cos[(\alpha_0/2)(1-t)]} = \frac{2}{\alpha_0} \int_0^{\alpha_0/2} \frac{ds}{\cos s} = \frac{2}{\alpha_0} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_0 + \pi}{4} \right). \quad (4.30)$$

Учитывая формулы (4.22), (4.29) и (4.30), получаем следующие асимптотические соотношения при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \beta_n &= -\frac{4 \cos^2(\alpha_0/2)}{\alpha_0^2 \pi^2 n^2} \left[\log \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_0 + \pi}{4} \right) \right]^2 (1 + o(1)) \\ &= -\frac{2}{\lambda_0 \pi^2 n^2} \left[\log \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_0 + \pi}{4} \right) \right]^2 (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Решим теперь граничную задачу на собственные значения (4.28). В результате замены переменных $z(t) = y(s)$, $s = \alpha_0/2(1-t)$, $t \in [0, 1]$, граничная задача (4.28) перейдет в следующую граничную задачу:

$$\begin{cases} y''(s) = \frac{2y(s)}{\lambda_0 \beta \cos^2 s}, & 0 \leq s \leq \frac{\alpha_0}{2}, \\ y\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) = 0, & y'(0) = 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Дифференциальное уравнение из формулы (4.32) рассмотрено в п. 2.25 книги [43; с. 415]. Введем новый параметр

$$m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8}{\lambda_0 \beta}}, \quad \beta < 0, \quad (4.33)$$

который может принимать и комплексные значения. Несложно убедиться, что дифференциальное уравнение из формулы (4.32) представляет собой частный случай дифференциального уравнения из пункта 2.25 книги [43; с. 415], если в указанном пункте взяты параметры $n = 0$, $a = 0$ и m задано в (4.33).

Следуя [43; с. 415], сделаем в задаче (4.32) замену переменных

$$y(s) = \eta(\xi) \cos^m s, \quad \xi = \sin^2 s, \quad 0 \leq s \leq \frac{\alpha_0}{2}.$$

Используя формулы из пункта 2.25 книги [43; с. 415], убеждаемся, что в результате указанной замены, граничная задача (4.32) переходит в следующую граничную задачу для гипергеометрического уравнения:

$$\begin{cases} \xi(1-\xi)\eta''(\xi) + \left[\frac{1}{2} - (2a+1)\xi\right]\eta'(\xi) - a^2\eta(\xi) = 0, & 0 \leq \xi \leq \tau, \\ \eta(\tau) = 0, \quad \lim_{\xi \downarrow 0} \sqrt{\xi} [2\eta'(\xi) - 2a\eta(\xi)] = 0, \end{cases} \quad (4.34)$$

где

$$0 < \tau = \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} < 1, \quad a = \frac{m}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{8}{\lambda_0 \beta}}, \quad \beta < 0. \quad (4.35)$$

Отметим, что в качестве трех параметров гипергеометрического уравнения из формулы (4.34) выступают числа a , $b = a$ и $c = 1/2$, см. [9; гл. 15], [10; гл. 2]. Учитывая сведения, изложенные в [46; с. 156, 160], приходим к выводу, что общее решение гипергеометрического уравнения из формулы (4.34) можно записать в следующем виде:

$$\eta_0(\xi) = C_1 F\left(a, a; \frac{1}{2}; \xi\right) + C_2 \sqrt{\xi} F\left(a + \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \xi\right), \quad 0 \leq \xi \leq \tau, \quad (4.36)$$

где $C_1 = C_1(a)$, $C_2 = C_2(a)$ – постоянные, не равные нулю одновременно. Здесь и ниже $F(a, b; c; \xi)$ – гипергеометрическая функция, см. [9; гл. 15]. Принимая во внимание граничные условия из (4.34), уточним значения постоянных C_1 и C_2 .

Дифференцируя почленно равенство (4.36) и используя формулы 15.2.1, 15.2.4 из [9; с. 372], получаем следующее выражение для производной:

$$\eta'_0(\xi) = 2a^2 C_1 F\left(a + 1, a + 1; \frac{3}{2}; \xi\right) + \frac{C_2}{2\sqrt{\xi}} F\left(a + \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \xi\right), \quad 0 \leq \xi \leq \tau. \quad (4.37)$$

Поскольку $F(a, b; c; 0) = 1$ при всех допустимых c (см. п. 15.1.1 в [9; с. 370]), учитывая соотношения (4.36) и (4.37), находим

$$\lim_{\xi \downarrow 0} \sqrt{\xi} \eta_0(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \downarrow 0} \sqrt{\xi} \eta'_0(\xi) = \frac{C_2}{2}. \quad (4.38)$$

Принимая во внимание второе граничное условие из (4.34) и используя формулы (4.38), заключаем, что $C_2 = 0$. Следовательно, решение (4.36) задачи (4.34) имеет вид $\eta_0(\xi) = C_1 F(a, a; 1/2; \xi)$, $0 \leq \xi \leq \tau$. Отсюда, учитывая первое граничное условие из (4.34), получаем следующее уравнение для параметра a :

$$F\left(a, a; \frac{1}{2}; \tau\right) = 0. \quad (4.39)$$

Рассмотрим далее отдельно два случая.

1) Пусть a является действительным числом, т.е. пусть число $\beta < 0$ таково, что $0 \leq 1 + 8/(\lambda_0\beta) < 1$. Тогда действительное число a удовлетворяет неравенству $1/4 \leq a < 1/2$. Записывая представление гипергеометрической функции $F(a, a; 1/2; \tau)$ в виде степенного ряда (см. п. 15.1.1 в [9; гл. 15]), заключаем, что при $a > 0$ указанный ряд является рядом с положительными членами, поэтому для рассматриваемых значений a выполнено неравенство $F(a, a; 1/2; \tau) \geq 1$, поскольку $\tau > 0$, см. (4.35).

Таким образом, при действительных a , удовлетворяющих (4.35), уравнение (4.39) не имеет корней.

2) Пусть a из формулы (4.35) является комплексным числом с ненулевой мнимой частью, т.е. пусть число β таково, что

$$-\frac{8}{\lambda_0} < \beta < 0. \quad (4.40)$$

Привлекая функции Лежандра $P_\nu^\mu(s)$, запишем в этом случае уравнение (4.39) в более удобной эквивалентной форме, а именно, в форме уравнения (1.3). Применяя формулу 15.4.23 из [9; гл. 15] при $a = b$, убеждаемся, что в рассматриваемом случае уравнение (4.39) эквивалентно уравнению

$$P_{-1/2}^{1/2-2a}(\sqrt{\tau}) + P_{-1/2}^{1/2-2a}(-\sqrt{\tau}) = 0, \quad (4.41)$$

где a удовлетворяет соотношениям (4.35), (4.40). Введем новый параметр

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{-1 - \frac{8}{\lambda_0\beta}} > 0; \quad (4.42)$$

этот параметр принимает действительные положительные значения вследствие неравенства (4.40). Из формул (4.35) и (4.42) находим $1/2 - 2a = -i\mu$.

Учитывая последнее равенство и формулы (4.35), (4.42), заключаем, что уравнение (4.41) для параметра a эквивалентно уравнению (1.3) для параметра $\mu > 0$.

Уравнение (1.3) имеет счетное число корней $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ — это следует из формулы (4.42) и того факта, что граничная задача Штурма–Лиувилля (4.28) имеет счетное множество однократных собственных чисел $\{1/\beta_n\}_{n=1}^\infty$. При этом, согласно (4.42), справедлива формула

$$\beta_n = -\frac{8}{\lambda_0(4\mu_n^2 + 1)} = \frac{\rho_n}{\lambda_0}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.43)$$

где числа $\{\rho_n\}_{n=1}^\infty$ определены в соотношении (1.9).

Из рассмотрения двух случаев приходим к выводу, что уравнение (4.39), а следовательно, и задача (4.28), эквивалентны уравнению (1.3). Таким образом, из соотношений (4.40), (1.3) и (4.43) следует формула (4.25). Первое утверждение леммы доказано.

Равенство (4.26) вытекает непосредственно из формул (1.9) и (4.25). Асимптотику (1.10) получаем, применяя соотношения (4.25) и (4.31). Лемма 4 доказана.

4.4. Вычисление константы $\langle R_1^{-1}x_0, A_w^{-1}x_0 \rangle$.

ЛЕММА 5. (i) Уравнение $[I - \lambda_0 A_w G''(x_0)]g = x_0$, $g \in L^2$, имеет единственное решение

$$g_0(t) = \frac{\alpha_0}{2 + \alpha_0 \operatorname{tg}(\alpha_0/2)} \left\{ \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) - (1-t) \operatorname{tg}\left[\frac{\alpha_0}{2}(1-t)\right] \right\}, \quad t \in [0, 1].$$

Таким образом, $x_0 \in \operatorname{Dom}(R_1^{-1})$ и $R_1^{-1}x_0 = g_0$.

(ii) Справедливо равенство $\langle R_1^{-1}x_0, A_w^{-1}x_0 \rangle = q_1$, где величина q_1 определена в формуле (1.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) леммы доказывается тем же методом, что и лемма 4, но рассуждения здесь проще. При этом используется решение дифференциального уравнения из п. 2.422 книги [43; с. 528]. Утверждение (ii) леммы получаем при помощи утверждения (i) в результате прямых вычислений.

4.5. Доказательство пункта (i) теоремы 1. Найдем асимптотику первой вероятности из формулы (1.6), применяя теорему 4, где мы полагаем $B = L^2$, $P_A = P_w$, $A = A_w$, $Q = G$, $m = 2$, $u = 1/\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Согласно лемме 3 у нас две экстремальные точки: функции $x_0(t)$ и $-x_0(t)$. Несложно видеть, что константы из правой части формулы (2.3) для обеих экстремальных функций совпадают. Используя леммы 3–5 и формулу (2.3), получаем при $\varepsilon \rightarrow 0$ соотношение

$$\begin{aligned} P \left\{ \int_0^1 e^{-\varepsilon |w(t)|} dt < b \right\} &= P_w \left\{ x \in L^2 : \int_0^1 e^{-\varepsilon |x(t)|} dt < b \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{K_1}{\varepsilon^2} \right\} \frac{\varepsilon \sqrt{2}}{\sqrt{\pi q_1 \Delta_1}} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где величины K_1 , q_1 , Δ_1 определены в формулах (1.7)–(1.9). Таким образом, доказана формула (1.6) для первой вероятности.

Аналогично, учитывая леммы 3–5 и применяя теорему 4, доказываем формулу (1.6) для второй вероятности. Здесь нужно использовать вместо (4.1) следующий функционал: $G_1(x) := b - \int_0^1 e^{-x(t)} dt$, $x \in L^2$. Отметим, что в случае функционала $G_1(x)$ экстремальная задача из условия (C2) имеет единственное решение – функцию $x_0(t)$, заданную в формуле (4.5). В этом можно убедиться, просматривая доказательство леммы 3, в частности, вывод решения задачи (4.10).

Формула (1.6) полностью доказана. Асимптотика (1.10) доказана в лемме 4. Таким образом, пункт (i) теоремы 1 доказан.

5. Доказательство пункта (ii) теоремы 1

Действуя по той же схеме, что и в разделе 4, найдем асимптотику первой вероятности из формулы (1.11), используя теорему 4. Приведем без доказательства соответствующие аналоги лемм 3–5. Определим функцию

$$x_1(t) = 2 \log \left\{ \frac{\cos[\alpha_0(t - 1/2)]}{\cos(\alpha_0/2)} \right\}, \quad t \in [0, 1], \quad (5.1)$$

где α_0 – единственный корень уравнения (1.2). Несложно убедиться, что функция (5.1) положительна, симметрична относительно точки $t = 1/2$, т.е. $x_1(t) = x_1(1-t)$, $t \in [0, 1]$. Кроме того, функция (5.1) монотонно возрастает на отрезке $[0, 1/2]$, имеет максимум в точке $t = 1/2$ и монотонно убывает на отрезке $[1/2, 1]$, $x_1(0) = x_1(1) = 0$ и $x_1 \in \mathcal{X} \cap \text{Dom}(A_{w_0}^{-1})$. Функционал G и множество D определены в формулах (4.1) и (4.4) для фиксированного числа $0 < b < 1$.

ЛЕММА 6. *Минимум в экстремальной задаче*

$$\langle x, A_{w_0}^{-1}x \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in D,$$

равен $8K_1$ и достигается на двух функциях $x_1(t)$ и $-x_1(t)$, лежащих на границе ∂D . Число K_1 определено в формуле (1.7). Минимум $\inf_{x \in D \cap H_{w_0}} \|x\|_{w_0}^2$ также достигается только в двух точках x_1 и $-x_1$.

Положим $\lambda_1 := 4\lambda_0 = 2\alpha_0^2/\cos^2(\alpha_0/2)$; здесь λ_0 задано в (4.22). В силу теоремы Лидского о следе детерминант оператора $R_2 = I - \lambda_1 A_{w_0} G''(x_1)$ конечен.

ЛЕММА 7. *Множество собственных чисел ядерного интегрального оператора $A_{w_0} G''(x_1)$ состоит из двух последовательностей $\{\beta_n/4\}_{n=1}^\infty$ и $\{\tilde{\beta}_n\}_{n=1}^\infty$ и не содержит числа $1/\lambda_1$. Числа β_n заданы в формуле (4.25), а числа $\tilde{\beta}_n$ имеют вид $\tilde{\beta}_n = \tilde{\rho}_n/\lambda_1$, где числа $\{\tilde{\rho}_n\}_{n=1}^\infty$ определены в формуле (1.12), при этом $-8/\lambda_1 < \tilde{\beta}_n < 0$, $n = 1, 2, \dots$. Справедливо равенство $\det R_2 = \Delta_1 \Delta_2$ и выполнено соотношение (1.13).*

ЛЕММА 8. (i) Уравнение $[I - \lambda_1 A_{w_0} G''(x_1)]g = x_1$, $g \in L^2$, имеет единственное решение

$$g_1(t) = \frac{\alpha_0}{2 + \alpha_0 \operatorname{tg}(\alpha_0/2)} \left\{ \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) - (1-2t) \operatorname{tg}\left[\alpha_0\left(\frac{1}{2} - t\right)\right] \right\}, \quad t \in [0, 1].$$

Таким образом, $x_1 \in \text{Dom}(R_2^{-1})$ и $R_2^{-1}x_1 = g_1$.

(ii) Справедливо равенство $\langle R_2^{-1}x_1, A_{w_0}^{-1}x_1 \rangle = 4q_1$, где величина q_1 определена в формуле (1.8).

Для вычисления асимптотики первой вероятности из соотношения (1.11) применим теорему 4, где мы полагаем $B = L^2$, $P_A = P_{w_0}$, $A = A_{w_0}$, $Q = G$, $m = 2$, $u = 1/\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Используя леммы 6–8 и формулу (2.3), получаем искомую асимптотику.

Вычисление асимптотики второй вероятности из соотношения (1.11) проводится на основе теоремы 4, примененной к функционалу $G_1(x)$. Отметим, что в случае функционала G_1 и ковариационного оператора A_{w_0} , экстремальная задача из условия (C2) имеет единственное решение – функцию $x_1(t)$, заданную в формуле (5.1). Теорема 1 полностью доказана.

6. Доказательство теорем 2 и 3

На протяжении данного раздела фиксировано число $d > 0$.

Доказательство теоремы 2 проводится при помощи теоремы 5 по той же схеме, что и в разделе 4. Сначала найдем асимптотику первой вероятности из формулы (1.17). Приведем без доказательства соответствующие аналоги лемм 3, 4.

Возьмем в качестве функционала F из теоремы 5 следующий функционал (ср. с (4.1)):

$$F(x) := d \int_0^1 e^{-|x(t)|} dt, \quad x \in L^2. \quad (6.1)$$

Функционал (6.1) ограничен сверху и снизу и трижды дифференцируем по Фреше в каждой точке $x \in \mathcal{X}$ с производными

$$F'(x) = -de^{-|x(t)|} \operatorname{sign} x(t), \quad F''(x) = de^{-|x(t)|} > 0, \quad x \in \mathcal{X}. \quad (6.2)$$

Опишем решение безусловной экстремальной задачи из условия (D2) для функционала (6.1) и ковариационного оператора A_w , заданного в (3.1). Определим функцию (ср. с (4.5))

$$x_0(t) = 2 \log \left\{ \frac{\cos[\theta_0(1-t)]}{\cos \theta_0} \right\}, \quad t \in [0, 1], \quad (6.3)$$

где $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ – единственный корень уравнения (1.14). Несложно убедиться, что функция (6.3) положительна, монотонно возрастает на отрезке $[0, 1]$, $x_0(0) = 0$ и $x_0 \in \mathcal{X} \cap \operatorname{Dom}(A_w^{-1})$.

ЛЕММА 9. *Минимум в экстремальной задаче*

$$\Lambda(x) \equiv F(x) + \frac{1}{2} \langle x, A_w^{-1} x \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in \operatorname{Dom}(A_w^{-1}),$$

равен K_2 и достигается на двух функциях $x_0(t)$ и $-x_0(t)$, заданных в (6.3). Число K_2 определено в формуле (1.18). Минимум $\inf_{x \in H_{A_w}} [F(x) + 1/2 \|x\|_{A_w}^2]$ также достигается только в двух точках x_0 и $-x_0$.

Опишем спектр интегрального ядерного оператора $A_w F''(x_0): L^2 \rightarrow L^2$. Здесь также детерминант оператора $R_3 := I + A_w F''(x_0)$ конечен.

ЛЕММА 10. *Собственные числа $\{\hat{\beta}_n\}_{n=1}^\infty$ ядерного интегрального оператора $A_w F''(x_0)$ заданы в формуле (1.19), т.е. имеют следующий вид:*

$$8 > \hat{\beta}_n = \frac{8}{4\hat{\mu}_n^2 + 1} > 0, \quad n = 1, 2, \dots;$$

числа $\{\hat{\mu}_n\}_{n=1}^\infty$ определяются по формуле (1.15). Справедливо равенство $\det R_3 = \Delta_3$ и выполнены соотношения (1.16) и (1.20).

Найдем асимптотику первой вероятности из формулы (1.17), применяя теорему 5, где мы полагаем $B = L^2$, $P_A = P_w$, $A = A_w$, $f(x) \equiv 1$, $m = 2$, $u = 1/\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, функционал F задан в (6.1).

Согласно лемме 9 у нас две экстремальные точки: функции $x_0(t)$ и $-x_0(t)$. Несложно видеть, что константы из правой части формулы (2.4) для обеих экстремальных функций совпадают. В частности, укажем, что в силу формулы (6.2) справедливо равенство $F''(x_0) = F''(-x_0)$. Используя леммы 9, 10 и формулу (2.4), получаем при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left\{ -\frac{d}{\varepsilon^2} \int_0^1 e^{-\varepsilon |w(t)|} dt \right\} &= \int_{L^2} \exp \left\{ -\frac{d}{\varepsilon^2} \int_0^1 e^{-\varepsilon |x(t)|} dt \right\} dP_w(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\Delta_5}} \exp \left\{ -\frac{K_2}{\varepsilon^2} \right\} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где величины K_2 , Δ_3 определены в формулах (1.18), (1.19). Таким образом, доказана формула (1.17) для первой вероятности.

Аналогично, учитывая леммы 9, 10 и применяя теорему 5, доказываем формулу (1.17) для второй вероятности. Здесь нужно использовать вместо (6.1) функционал $F_1(x) := d \int_0^1 e^{-x(t)} dt > 0$, $x \in L^2$. Отметим, что в случае функционала $F_1(x)$, экстремальная задача из условия (D2) имеет единственное решение – функцию $x_0(t)$, заданную в формуле (6.3). Соотношение (1.17) доказано.

Доказательство теоремы 3 проводится при помощи теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 2, при этом также используется функционал (6.1).

Справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 11. *Минимум в экстремальной задаче*

$$F(x) + \frac{1}{2} \langle x, A_{w_0}^{-1} x \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in \text{Dom}(A_{w_0}^{-1}),$$

равен K_3 и достигается на двух функциях: $x_1(t)$ и $-x_1(t)$, где

$$x_1(t) = 2 \log \left\{ \frac{\cos[\varphi_0(2t-1)]}{\cos \varphi_0} \right\}, \quad t \in [0, 1], \quad \varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

– единственный корень уравнения (1.21). Число K_3 определено в формуле (1.25). Минимум $\inf_{x \in H_{w_0}} [F(x) + 1/2 \|x\|_{w_0}^2]$ также достигается только в двух точках x_1 и $-x_1$.

ЛЕММА 12. *Множество собственных чисел ядерного интегрального оператора $A_{w_0} F''(x_1)$ состоит из двух последовательностей $\{\bar{\beta}_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$. При этом для собственных чисел $\bar{\beta}_n$ выполнено соотношение $\bar{\beta}_n \equiv \bar{\beta}_n(d) = \hat{\beta}_n(d/4)$, $n = 1, 2, \dots$, где числа $\hat{\beta}_n \equiv \tilde{\beta}_n(d)$ определены в формуле (1.19). Собственные числа $\bar{\beta}_n$ заданы в формуле (1.27). Справедливо равенство $\det[I + A_{w_0} F''(x_1)] = \Delta_4 \Delta_5$, где Δ_4 , Δ_5 определены в формулах (1.26), (1.27).*

Доказательство предложения 1 проводится на основе принципа больших отклонений для гауссовских мер, см. [1; § 2, пример 2.4], [31; § 12], [47; приложение 8], [48], [49]. Отметим, что здесь экстремальная задача из условия (D2) во всех четырех случаях имеет единственное решение $x = 0$ и в этой точке соответствующая функция F недифференцируема.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Питербарг, В. Р. Фаталов, “Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах”, *УМН*, **50:6** (1995), 57–150.
- [2] В. Р. Фаталов, “Точные асимптотики больших отклонений для гауссовских мер в гильбертовом пространстве”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **27:5** (1992), 43–61.
- [3] В. Р. Фаталов, “Большие отклонения гауссовских мер в пространствах l^p и L^p , $p \geq 2$ ”, *ТВП*, **41:3** (1996), 682–689.
- [4] А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению*, Лань, СПб., 2000.
- [5] M. Yor, “On some exponential functionals of Brownian motion”, *Adv. Appl. Prob.*, **24:3** (1992), 509–531.

- [6] P. Carr, M. Schröder, “Bessel processes, the integral of geometric Brownian motion, and Asian options”, *ТВП*, **48**:3 (2003), 503–533.
- [7] В. Р. Фаталов, “Точные асимптотики распределений интегральных функционалов от геометрического броуновского движения и иные родственные формулы”, *Пробл. передачи информ.*, **43**:3 (2007), 75–96.
- [8] S. Albeverio, V. Fatalov, V. I. Piterbarg, “Asymptotic behavior of the sample mean of a function of the Wiener process and the Macdonald function”, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **16**:1 (2009), 55–93.
- [9] *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, ред. М. Абрамовиц, И. Стиган, Наука, М., 1979.
- [10] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1973.
- [11] L. Robin, *Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales*, Tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1957; Tome 2, Gauthier-Villars, Paris, 1958; Tome 3, Gauthier-Villars, Paris, 1959.
- [12] Т. Хида, *Броуновское движение*, Наука, М., 1987.
- [13] И. Ватанабэ, Н. Икэда, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, Наука, М., 1986.
- [14] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Grundlehren Math. Wiss., **293**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [15] И. М. Ковальчик, “Интеграл Винера”, *УМН*, **18**:1 (1963), 97–134.
- [16] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Pure Appl. Math., **86**, Academic Press, New York, 1979.
- [17] R. S. Ellis, J. S. Rosen, “Laplace’s method for Gaussian integrals with an application to statistical mechanics”, *Ann. Probab.*, **10**:1 (1982), 47–66; Correction, **11**:2 (1983), 456.
- [18] R. S. Ellis, J. S. Rosen, “Asymptotic analysis of Gaussian integrals. I. Isolated minimum points”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273**:2 (1982), 447–481; “Asymptotic analysis of Gaussian integrals. II. Manifold of minimum points”, *Comm. Math. Phys.*, **82**:2 (1981), 153–181.
- [19] А. Д. Вентцель, *Предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов*, Теория вероятностей и математическая статистика, Наука, М., 1986.
- [20] S. Kusuoka, Y. Tamura, “Precise estimate for large deviation of Donsker–Varadhan type”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **38**:3 (1991), 533–565.
- [21] S. Liang, “Laplace approximations for large deviations of diffusion processes on Euclidean spaces”, *J. Math. Soc. Japan*, **57**:2 (2005), 557–592.
- [22] В. Р. Фаталов, “Точные асимптотики винеровских интегралов типа Лапласа для L^p -функционалов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:1 (2010), 197–224.
- [23] В. Р. Фаталов, “Большие отклонения L^p -нормы винеровского процесса со сносом”, *Матем. заметки*, **65**:3 (1999), 429–436.
- [24] В. Р. Фаталов, “Асимптотики больших отклонений винеровских полей в L^p -норме, нелинейные уравнения Хаммерштейна и гиперболические краевые задачи высокого порядка”, *ТВП*, **47**:4 (2002), 710–726.
- [25] В. Р. Фаталов, “Точные асимптотики типа Лапласа для умеренных отклонений распределений сумм независимых банаховозначных случайных элементов”, *ТВП*, **48**:4 (2003), 720–744.
- [26] В. Р. Фаталов, “Точные асимптотики больших отклонений стационарных процессов Орнштейна–Уленбека для L^p -функционалов, $p > 0$ ”, *Пробл. передачи информ.*, **42**:1 (2006), 52–71.
- [27] В. Р. Фаталов, “Метод Лапласа для гауссовских мер в банаховом пространстве (многообразие точек минимума) с применением к статистике Ватсона”, *ТВП* (в печати).
- [28] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, Т. 1, Теория вероятностей и математическая статистика, Наука, М., 1971.

- [29] Х.-С. Го, *Гауссовские меры в банаховых пространствах*, Мир, М., 1979.
- [30] Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, Наука, М., 1985.
- [31] М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции*, ТВИМС, Киев, 1995.
- [32] В. И. Богачев, *Гауссовские меры*, Наука, М., 1997.
- [33] М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, М., 1972.
- [34] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979.
- [35] R. Bonic, J. Frampton, "Smooth functions on Banach manifolds", *J. Math. Mech.*, **15**:5 (1966), 877–898.
- [36] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977.
- [37] *Функциональный анализ*, ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972.
- [38] А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М., 1982.
- [39] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [40] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.
- [41] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981.
- [42] В. А. Садовничий, *Теория операторов*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1979.
- [43] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1961.
- [44] А. Г. Костюченко, И. С. Саргсян, *Распределение собственных значений. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1979.
- [45] Л. Коллатц, *Задачи на собственные значения с техническими приложениями*, Наука, М., 1968.
- [46] Ф. Олвер, *Асимптотики и специальные функции*, Наука, М., 1990.
- [47] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2003.
- [48] J.-D. Deuschel, D. Stroock, *Large Deviations*, Pure Appl. Math., **137**, Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [49] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Appl. Math. (N. Y.), **38**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

В. Р. Фаталов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: vrfatalov@yandex.ru

Поступило

15.03.2007

Исправленный вариант

21.11.2011