Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Ушаков, О. В. Сырникова, О поведении при больших значениях времени решений второй краевой задачи для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в неограниченной области, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 2, 318–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4061>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 08:03:15

О поведении при больших значениях времени решений второй краевой задачи для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в неограниченной области

В. И. Ушаков, О. В. Сырникова

В цилиндре $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ бесконечной меры, рассмотрим вторую краевую задачу для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной [1]

$$u_t - \Delta u_t = \Delta u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \quad (3)$$

Цель поставленной задачи состоит в том, чтобы найти такую геометрическую характеристику области Ω , которая определяет скорость убывания решения задачи (1)–(3) при $t \rightarrow \infty$. В случае параболического уравнения второго порядка в работах [2]–[5] для широкого класса неограниченных областей установлено, что такой характеристикой является функция $V(\sqrt{t})$, где $V(R) = \text{mes}(\Omega \cap \{|x| < R\})$ (считаем, что начало координат принадлежит замыканию Ω). Например, в [5] показано, что если $\varphi \in L_2(\Omega) \cap L_1(\Omega)$, $\int_{\Omega} \varphi(x) dx \neq 0$ и $W(t, x)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности и условиям (2), (3), то (при некоторых ограничениях на область Ω) справедливы неравенства

$$\frac{\tilde{c}}{V(\sqrt{t} + C_0)} \leq \|W(t, x)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{\tilde{C}}{V(\sqrt{t})} \|\varphi(x)\|_{L_1}^2. \quad (4)$$

Оператор $\Delta: W_2^1(\Omega) \rightarrow (W_2^1(\Omega))^*$ с граничным условием Неймана (2) определим интегральным тождеством

$$\langle \Delta u, v \rangle = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

для всех $v \in W_2^1(\Omega)$, тогда операторы Δ и $I - \Delta$ будут ограничены, причем, как известно, оператор $I - \Delta$ непрерывно обратим.

Под решением задачи (2) будем понимать функцию $u(t, \cdot) \in C^\infty([0, \infty), W_2^1(\Omega))$, удовлетворяющую (1) и (3). Тогда уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$\dot{u} = (I - \Delta)^{-1} \Delta u$$

и, следовательно, задача (1)–(3) имеет единственное решение для любой функции $\varphi \in W_2^1(\Omega)$. Более того, оператор $(I - \Delta)^{-1} \Delta$ с первоначальной областью определения $W_2^1(\Omega)$ продолжается по непрерывности до отображения

$$(I - \Delta)^{-1} \Delta: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega).$$

Поэтому для любой функции $\varphi \in L_2(\Omega)$ задача

$$\dot{u} = (I - \Delta)^{-1} \Delta u, \quad u|_{t=0} = \varphi(x),$$

также однозначно разрешима. Это решение имеет вид

$$u(t, x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t/(1+\lambda)} dE_\lambda \varphi, \quad (5)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-96030-р_урал_a).

где E_λ – спектральная мера [6] оператора $-\Delta$ с граничными условиями (2). (Обзор проблематики, связанной с разрешимостью краевых задач для уравнений соболевского типа, можно найти в [7]).

Перейдем к описанию класса рассматриваемых областей.

Пусть $\ell(v) = \inf \text{mes}_{n-1}(\partial Q \cap \Omega)$, где нижняя грань берется по всем открытым подмножествам $Q \subset \Omega$, имеющим объем v и гладкую часть границы $\partial Q \cap \Omega$. Пусть $g(v)$ – некоторая положительная неубывающая при $v \in (0, +\infty)$ функция такая, что $v^{1-\varepsilon_0}/g(v)$ не убывает при некотором $\varepsilon_0 > 0$, а $R(v)$ – функция, обратная к $V(R)$. Будем предполагать, что при некоторой константе $c_0 > 0$ справедливы неравенства

$$\frac{c_0 v}{R(v)} \leq g(v) \leq \ell(v) \quad (6)$$

для всех $v > 0$.

Отметим, что неравенства (6) выполнены для области вида

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < ax_n^{2\beta}, 0 < x_n < \infty, 0 < \beta \leq 1\}. \quad (7)$$

Несложно проверить [8; с. 198], что в этом случае можно взять функцию

$$g(v) = C \cdot \min(v^{(n-1)/n}, v^{(n-1)/(\beta+n-1)}),$$

при этом при больших значениях t левое и правое выражения в неравенстве (4) с точностью до постоянного множителя принимают вид

$$\frac{1}{t^{(n-1+\beta)/(2\beta)}}.$$

ТЕОРЕМА. Пусть область Ω бесконечной меры удовлетворяет (6), $\varphi(x) \in L_2(\Omega) \cap L_1(\Omega)$, $u(t, x)$ – решение задачи (1)–(3). Тогда при всех $t > 0$

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \leq \frac{C_1}{V(\sqrt{t})} \|\varphi(x)\|_{L_1(\Omega)}^2 + e^{-t} \|\varphi(x)\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (8)$$

Если, дополнительно, $\int_{\Omega} \varphi(x) dx \neq 0$, то

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \geq \frac{C_2}{V(\sqrt{t} + C_3)}, \quad (9)$$

где C_1 зависит только от области Ω (а именно, от постоянных ε_0 и c_0), а C_2 и C_3 зависят также и от начальной функции $\varphi(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (5)

$$\|u(t, x)\|_{L_2}^2 = \int_0^\infty e^{-2\lambda t/(1+\lambda)} d\|E_\lambda \varphi\|^2 \geq \int_0^\infty e^{-2\lambda t} d\|E_\lambda \varphi\|^2 = \|W(t, x)\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

где $W(t, x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dE_\lambda \varphi$ – решение уравнения теплопроводности с граничным условием (2) и начальным (3). Таким образом, (9) следует из (4).

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \|u(t, x)\|_{L_2}^2 &= \int_0^1 e^{-2\lambda t/(1+\lambda)} d\|E_\lambda \varphi\|^2 + \int_1^\infty e^{-2\lambda t/(1+\lambda)} d\|E_\lambda \varphi\|^2 \\ &\leq \int_0^1 e^{-\lambda t} d\|E_\lambda \varphi\|^2 + e^{-t} \int_1^\infty d\|E_\lambda \varphi\|^2 \leq \int_0^\infty e^{-2\lambda(t/2)} d\|E_\lambda \varphi\|^2 + e^{-t} \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Заметим, что первый интеграл в правой части этого неравенства есть $\int_{\Omega} W^2(t/2, x) dx$ и, следовательно, из (4) вытекает, что

$$\|u(t, x)\|_{L_2}^2 \leq \frac{\tilde{C}}{V(\sqrt{t/2})} \|\varphi\|_{L_1(\Omega)}^2 + e^{-t} \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Осталось заметить [5], что из (6) следует неравенство $V(\sqrt{t/2}) \geq kV(\sqrt{t})$ с некоторой постоянной k , зависящей только от ε_0 и c_0 .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина, *ПММ*, **24**:5 (1960), 58–73.
 [2] А.К. Гущин, *Матем. сб.*, **101**:4 (1976), 459–499. [3] А.К. Гущин, *Краевые задачи для дифференциальных уравнений*. 3, Сборник статей, Тр. МИАН, **126**, Наука, М., 1973, 5–45. [4] А.К. Гущин, *Матем. сб.*, **119**:4 (1982), 451–508. [5] В.И. Ушаков, *Матем. сб.*, **111**:1 (1980), 95–115. [6] Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, ИЛ, М., 1954. [7] Г.А. Свиридюк, *УМН*, **49**:4 (1994), 47–74. [8] В.Г. Мазья, *Пространства С.Л. Соболева*, ЛГУ, Л., 1985.

В. И. Ушаков

Челябинский государственный университет

О. В. Сырникова

Челябинский государственный университет

E-mail: olga_syr@mail.ru

Поступило

10.04.2007

Исправленный вариант

02.03.2009