Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Я. Азизов, М. В. Чугунова, Теорема Понтрягина и анализ спектральной устойчивости солитонов, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 5, 643–658

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4062>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:35:56

Теорема Понтрягина и анализ спектральной устойчивости солитонов

Т. Я. Азизов, М. В. Чугунова

Основным результатом представленной работы является использование теоремы Понтрягина для доказательства критерия существования собственных значений со строго положительной вещественной частью (неустойчивых) у линеаризатора гамильтоновой системы в терминах разницы в количестве отрицательных собственных значений между двумя самосопряженными операторами L_- и L_+ .

Библиография: 19 названий.

Введение. Рассмотрим гамильтонову систему, заданную уравнением

$$\frac{du}{dt} = JE'(u(t)), \quad u(t) \in \mathcal{X}, \quad (1)$$

где $E: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $E \in C^2$ – функционал, определенный на некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{X}$ и $J: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $J = -J^* = -J^{-1}$. Критическая точка уравнения (1) – это такая точка $\varphi \in \mathcal{X}$, в которой $E'(\varphi) = 0$. В том случае, когда φ является локализованным (экспоненциально убывающим на бесконечности) решением, оно называется *солитоном*.

Солитонные решения были найдены для многих нелинейных эволюционных уравнений, в которых дисперсионное поведение задано дифференциальным оператором, в то время как нелинейный потенциал описывается с помощью быстро убывающей функции. Наиболее известными примерами нелинейных эволюционных уравнений с одно-пульсными солитонными решениями являются нелинейное уравнение Шрёдингера, нелинейное волновое уравнение Клейна–Гордона, а также иерархия уравнений Кортевега–де-Фриза с различными его модификациями [1], [2]. Например, уравнение Кортевега–де-Фриза пятого порядка обладает не только одно-пульсными солитонными решениями, но также и N -пульсными [3], [4]. Исследование устойчивости локализованных N -пульсных решений, как численно, так и аналитически, является одним из новых направлений в теории динамических систем [5], [6].

Устойчивость критической точки уравнения (1) или, другими словами, устойчивость решения φ , можно исследовать, линеаризуя гамильтонову систему в окрестности φ :

$$\frac{dv}{dt} = JE''(\varphi)v + O(\|v\|^2) \quad (2)$$

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00203-а); работа второго автора выполнена при поддержке фонда NSERC.

и анализируя спектр оператора $JE''(\varphi)$ [7]–[9]. В том случае, когда оператор JE'' допускает блочное представление вида

$$JE''(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & L_- \\ -L_+ & 0 \end{bmatrix},$$

задача на собственные значения оператора $JE''(\varphi)$ записывается системой

$$L_+ u = -\lambda w, \quad L_- w = \lambda u. \quad (3)$$

В статье [10] Гриллякис, исходя из модельных примеров таких, как нелинейное уравнение Шрёдингера и уравнение Клейна–Гордона, сводит задачу устойчивости солитонов к изучению линейного операторного пучка вида $R - zS$. При этом предполагается, R и S – самосопряженные операторы такие, что их ядра тривиальны:

$$\ker R = \ker S = \{0\}, \quad R = H + W, \quad S^{-1} = H + V,$$

где H – самосопряженный равномерно положительный оператор, а операторы V и W являются H -компактными, т.е. $H^{-1}V$ и $H^{-1}W$ – компактные операторы. Одним из главных признаков неустойчивости солитонов является наличие у рассматриваемого пучка отрицательных собственных значений.

В [11] показано, что при различии количества отрицательных собственных значений операторов R и S линейный пучок имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение.

В то же время в работе [12] доказан более точный результат, а именно, если $|N(R) - N(S)| = n > 0$, то у линейного пучка есть не меньше, чем n отрицательных собственных значений (см. также ниже теорему 10 и более общий результат в следствии 11), т.е. соответствующее солитонное решение будет неустойчивым. Здесь через $N(R)$ и $N(S)$ обозначено количество с учетом кратности отрицательных собственных значений операторов R и S соответственно.

Также в [12] показано, что данная оценка не является оптимальной, так как в случае равенства количества отрицательных значений у операторов R и S и выполнения дополнительного условия $C(R) \cap C(S) = \emptyset$ (где $C(R) = \{p : (Rp, p) < 0\}$) и $C(S) = \{p : (Sp, p) < 0\}$) у линейного пучка все же будет, по крайней мере, одно отрицательное собственное значение. Эти результаты использовались для изучения спектральной устойчивости солитонов во многих других нелинейных динамических системах (см., например, [13], [14]). Ниже в теореме 15 доказан более точный результат, а именно, при указанных условиях количество отрицательных собственных значений пучка совпадает с суммой количества отрицательных собственных значений операторов, образующих этот пучок.

Мотивом для настоящей работы послужило следующее утверждение [10; теорема 2.6]: *задача $(R - zS)p = 0$, $(Sp, p) \leq 0$, имеет ровно*

$$\max\{N(R), N(S)\} - d(C(R) \cap C(S))$$

отрицательных собственных значений.

Здесь $d(C(R) \cap C(S))$ – линейная размерность конуса $C(R) \cap C(S)$.

Сложность для понимания утверждения была не только в отсутствии полного доказательства, но и в том, что символ $C(\cdot)$ в цитируемой работе имеет два различных значения: в одном месте [10; с. 311] так обозначается множество нейтральных векторов (например, $C(R) = \{p : (Rp, p) = 0\}$), в другом [10; с. 325] множество

отрицательных векторов (например, $C(R) = \{p : (Rp, p) < 0\}$). Однако в любом варианте этот результат не может быть правильным хотя бы потому, что количество отрицательных собственных значений, которым отвечают S -неположительные собственные векторы: $(Sp, p) \leq 0$, не может быть более $N(S)$ (см. ниже следствие 6), $d(C(R) \cap C(S)) \leq N(S)$, однако при $N(R) > 2N(S) + 1$ мы получили бы противоречие.

Цель нашей работы – развить некоторые аспекты теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой и применить к исследованию линейного операторного пучка, в частности, к оценке числа его отрицательных собственных значений.

1. Постановка задачи. В этой работе L_+ и L_- – самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{X}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющие следующему условию:

непрерывные спектры $\sigma_c(L_+)$ и $\sigma_c(L_-)$ и множества собственных значений бесконечной кратности операторов L_+ и L_- ограничены снизу числами $\omega_+ > 0$ и $\omega_- > 0$ соответственно. (A)

Как мотивацию для введения условия (A) приведем следующий пример.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим скалярное нелинейное уравнение Шрёдингера [7], [10]

$$i\psi_t = -\Delta\psi + f(x, |\psi|^2)\psi, \quad \Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_d}^2, \quad (4)$$

где $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ и $\psi \in \mathbb{C}$. Если $f(x, |\psi|^2)$ является локализованным потенциалом, например, f принадлежит C^∞ и $f(0) = 0$, нелинейное уравнение Шрёдингера (4) обладает локализованным волновым решением $\psi = \varphi(x)e^{i\omega t}$, где $\omega > 0$ и $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Следовательно, $\varphi(x)$ является экспоненциально убывающей функцией и принадлежит C^∞ . Существование, единственность и устойчивость таких решений (4) подробно разобраны в работе [15]. Линеаризация (4) с помощью подстановки

$$\psi = (\varphi(x) + [u(x) + iw(x)]e^{\lambda t} + [\bar{u}(x) + i\bar{w}(x)]e^{\bar{\lambda}t})e^{i\omega t}, \quad (5)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $(u, w) \in \mathbb{C}^2$, приводит к гамильтоновой системе (3), где $L_\pm$ – операторы Шрёдингера:

$$L_+ = -\Delta + \omega + f(x, \varphi^2) + 2\varphi^2 f'(x, \varphi^2), \quad (6)$$

$$L_- = -\Delta + \omega + f(x, \varphi^2). \quad (7)$$

Операторы $L_\pm$ не являются ограниченными и $\sigma_c(L_\pm) = [\omega, \infty)$ с $\omega_+ = \omega_- = \omega > 0$. Ядро оператора L_- включает, по крайней мере, один собственный вектор $\varphi(x)$, и ядро оператора L_+ включает, по крайней мере, d собственных векторов $\partial_{x_j}\varphi(x)$, $j = 1, \dots, d$. В качестве гильбертова пространства $\mathcal{X}$ рассмотрим пространство Соболева $\mathcal{X} := W_2^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$; ограничение (A) на спектральные свойства операторов выполнено, поскольку потенциальные функции $f(x, \varphi^2)$ и $\varphi^2 f'(x, \varphi^2)$ экспоненциально убывают.

Мы будем изучать задачу (3), где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $(u, w) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Таким образом, нас будут интересовать спектральные свойства оператора

$$\mathfrak{A} := \begin{bmatrix} 0 & L_- \\ -L_+ & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Так как из определения оператора $\mathfrak{A}$ следует, что $\ker \mathfrak{A} = \ker L_+ \times \ker L_-$, сосредоточимся на изучении ненулевых собственных значений и соответствующих корневых линейалов.

В силу условия (A) ядро $\ker L_-$ оператора L_- конечномерно, собственное значение $\lambda = 0$ этого оператора изолировано, а потому его область значений $\operatorname{ran} L_- =: \mathcal{H}$ замкнута. Отсюда $\mathcal{X} = \ker L_- \oplus \mathcal{H}$ и

$$\mathcal{X} \times \mathcal{X} = (\ker L_- \oplus \mathcal{H}) \times (\ker L_- \oplus \mathcal{H}). \quad (9)$$

Если предположить дополнительно, что $\ker L_-$ содержится в области определения $\operatorname{dom} L_+$ оператора L_+ (в конкретных примерах часто выполнено даже более строгое условие: $\operatorname{dom} L_+ = \operatorname{dom} L_-$), то оператор $\mathfrak{A}$ представляется в следующем матричном виде относительно разложения (9):

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_-^{(2)} \\ -L_+^{(1)} & -L_+^{(12)} & 0 & 0 \\ -L_+^{(12)*} & -L_+^{(2)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

с естественным определением составляющих. В силу конечномерности $\ker L_-$ операторы $L_{\pm}^{(2)}$ обладают теми же спектральными свойствами, что и $L_{\pm}$, причем $L_-^{(2)}$ непрерывно обратим. Непосредственно проверяется, что $\lambda \in \sigma_p(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда $-\lambda^2 =: \gamma$ – собственное значение линейного пучка

$$L(\gamma) := A - \gamma K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H},$$

где $A := -L_+^{(2)}$, а $K := L_-^{(2)-1}$ – ограниченный самосопряженный оператор. При этом между собственными векторами задачи (3) (эквивалентно, собственными векторами оператора $\mathfrak{A}$) и линейного пучка L непосредственно устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Таким образом, без ограничения общности в дальнейшем можно предполагать оператор L_- непрерывно обратимым.

2. Теорема Понтрягина. Прежде чем доказывать теорему 3, аналог теоремы Понтрягина о существовании конечномерного инвариантного подпространства, остановимся на следующем широко известном простом, но очень полезном факте, авторство которого достаточно трудно проследить.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, пусть $G: \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ – ограниченный самосопряженный положительный оператор. Введем G -скалярное произведение $[\cdot, \cdot] = (G\cdot, \cdot)$ и дополним по нему $\mathcal{H}$ до $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Тогда оператор G допускает расширение до ограниченного оператора $\widetilde{G}: \widetilde{\mathcal{H}} \mapsto \mathcal{H}$ и область значения оператора $\widetilde{G}$ совпадает с областью значения оператора $G^{1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что из равенств

$$[x, y] = (Gx, y) = (G^{1/2}x, G^{1/2}y)$$

следует, что $G^{1/2}$ – изометрический оператор из G -скалярного произведения в исходное, а потому он допускает изометрическое расширение $\widetilde{G}^{1/2}: \widetilde{\mathcal{H}} \mapsto \mathcal{H}$. Поскольку

область значений оператора $G^{1/2}$ плотна в $\mathcal{H}$, область значений $\tilde{G}^{1/2}$ совпадает с $\mathcal{H}$, т.е. $\tilde{G}^{1/2}$ – унитарный оператор. Остается заметить, что G – ограниченный оператор из G -скалярного произведения в исходное и потому допускает ограниченное расширение $\tilde{G}$ на $\tilde{\mathcal{H}}$ и при этом $\tilde{G} \supset G^{1/2}\tilde{G}^{1/2}$. Так как оператор $G^{1/2}\tilde{G}^{1/2}$ определен на всем $\mathcal{H}$, включение переходит в равенство и, тем самым, лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть B и G – ограниченные самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Введем в рассмотрение G -метрику $[\cdot, \cdot] = (G\cdot, \cdot)$ и G -самосопряженный оператор $A := BG$: $[Ax, y] = [x, Ay]$ при всех $x, y \in \mathcal{H}$.

Если $\lambda = 0$ не является собственным значением операторов B и G , а отрицательный спектр оператора G состоит из κ : $0 < \kappa < \infty$ собственных значений (с учетом кратности), то у оператора A существует κ -мерное неположительное инвариантное подпространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = J|G|$ – полярное разложение оператора G . Введем $|G|$ -скалярное произведение и пополним $\mathcal{H}$ по нему до гильбертова пространства $\tilde{\mathcal{H}}$. Так оператор G самосопряжен, J является самосопряженным и изометрическим как относительно исходного скалярного произведения, так и относительно $|G|$ -скалярного произведения. Поэтому J допускает по непрерывности расширение до оператора $\tilde{J}$, являющегося в $\tilde{\mathcal{H}}$ унитарным и самосопряженным. Введем в $\tilde{\mathcal{H}}$ индефинитную $\tilde{J}$ -метрику $[\cdot, \cdot]$. Заметим, что для $x, y \in \mathcal{H}$ имеем $[x, y] = [x, y]$. Оператор A допускает расширение по непрерывности до оператора $\tilde{A}$, являющегося $\tilde{J}$ -самосопряженным в $\tilde{\mathcal{H}}$. Поскольку $\tilde{A} \supset BJ|G|$, из леммы 2 следует, что $\tilde{A} = BJ|G|$. Из условий на B и G имеем $\ker A = \{0\}$. Следовательно, все конечномерные инвариантные подпространства оператора $\tilde{A}$ лежат в $\mathcal{H}$, а потому конечномерные инвариантные подпространства операторов $\tilde{A}$ и A совпадают.

Остается заметить, что из условий на спектр оператора G следует, что $\mathcal{H}$ с $\tilde{J}$ -метрикой – пространство Понтрягина с κ отрицательными квадратами. Из известной теоремы Понтрягина [16] следует, что оператор $\tilde{A}$ имеет κ -мерное $\tilde{J}$ -неположительное инвариантное подпространство, которое будет инвариантным и относительно A . Поскольку, как отмечалось выше, на векторах из $\mathcal{H}$ значения G -метрики и J -метрики совпадают, теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что если G -самосопряженный оператор A не представлен как произведение двух непрерывных операторов, либо представлен $A = BG$, но $\ker B \neq \{0\}$, то, вообще говоря, у оператора A может не быть κ -мерного неположительного инвариантного подпространства (см. [17]).

Рассмотрим линейный операторный пучок

$$L(\gamma) = A - \gamma K, \quad (11)$$

где A и K – операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Точка γ_0 называется *регулярной* для этого пучка ($\gamma_0 \in \rho(L)$), если оператор $L(\gamma_0)$ непрерывно обратим на всем пространстве.

ТЕОРЕМА 5. Пусть A и K – самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, причем K ограничен, $\ker K = \{0\}$, и неположительный спектр

оператора A состоит из конечного числа изолированных собственных значений конечной кратности.

Тогда

- (i) множество $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ состоит из регулярных точек пучка (11), за исключением, быть может, счетного набора изолированных собственных значений конечной кратности;
- (ii) существует такое $\delta > 0$, что множество

$$\Omega_\delta := \{\gamma \in \mathbb{C} \mid 0 < |\gamma| < \delta\}$$

состоит из регулярных точек этого пучка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Доказательство этого утверждения проведем в три этапа:

- (i₁) сначала покажем, что без ограничения общности можно считать и оператор A ограниченным;
 - (i₂) докажем утверждение (i) в предположении, что пучок (11) имеет хотя бы одну регулярную точку;
 - (i₃) проверим, что в условиях теоремы линейный пучок (11) имеет хотя бы одну регулярную точку.
- (i₁) Рассмотрим разложение пространства

$$\mathcal{H} = \operatorname{ran} A \oplus \ker A. \quad (12)$$

Введем линейный оператор $A_{1/2}$, заданный матрицей относительно разложения (12):

$$A_{1/2} = \begin{bmatrix} |A|_{\operatorname{ran} A}^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Оператор $A_{1/2}$ самосопряжен и непрерывно обратим, а потому

$$L(\gamma) = A_{1/2}(A_{1/2}^{-1}AA_{1/2}^{-1} - \gamma A_{1/2}^{-1}KA_{1/2}^{-1})A_{1/2}.$$

Следовательно, непрерывная обратимость пучка (11) эквивалентна непрерывной обратимости пучка

$$L_1(\gamma) = A_1 - \gamma K_1,$$

где $A_1 = A_1^*$ – замыкание оператора $A_{1/2}^{-1}AA_{1/2}^{-1}$, а $K_1 = A_{1/2}^{-1}KA_{1/2}^{-1} = K_1^*$. Оба оператора A_1 и K_1 ограничены (более того, A_1 – частично изометрический оператор), $\ker K_1 = \{0\}$, и неположительный спектр оператора A_1 состоит из конечного числа изолированных собственных значений конечной кратности; в этом случае $\sigma(A_1) \cap \{-\infty, \infty\} = \{0, -1\}$, если $\ker A \neq \{0\}$ и $\sigma(A_1) \cap \{-\infty, \infty\} = \{-1\}$, если $\ker A = \{0\}$.

Следовательно, без потери общности будем считать, что в (11) оператор A также ограничен. Более того, сделаем замену $\gamma = 1/\lambda$.

Далее будем рассматривать линейный операторный пучок

$$\tilde{L}(\lambda) = K - \lambda A, \quad (13)$$

где A и K – ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, причем неположительный спектр оператора A состоит из конечного числа изолированных собственных значений конечной кратности.

(i₂) В силу условий на спектр оператора A , он допускает представление в виде суммы двух ограниченных самосопряженных операторов

$$A = X + Y, \quad (14)$$

где X – равномерно положительный оператор, а Y – конечномерный. Так как множество регулярных точек линейного пучка $K - \lambda X$ совпадает с множеством регулярных точек ограниченного самосопряженного оператора $X^{-1/2} K X^{-1/2}$, открытое множество

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \{[-\|X^{-1/2} K X^{-1/2}\|, \|X^{-1/2} K X^{-1/2}\|]\}$$

состоит из регулярных точек пучка $K - \lambda X$. Перепишем $\tilde{L}(\lambda)$ в следующем виде:

$$\tilde{L}(\lambda) = (I - \lambda Y(K - \lambda X)^{-1})(K - \lambda X). \quad (15)$$

Отсюда следует, что $\lambda \in \rho(\tilde{L}) \cap \Omega$ тогда и только тогда, когда оператор $I - T(\lambda)$, где $T(\lambda) := \lambda Y(K - \lambda X)^{-1}$, непрерывно обратим. Оператор-функция $T(\lambda)$ является голоморфной на Ω и принимает значения во множестве компактных операторов. Предположим (далее мы это докажем), что в Ω существует хотя бы одна точка λ_0 , не являющаяся собственным значением для пучка $\tilde{L}$, а потому $\ker(I - T(\lambda_0)) = \{0\}$. Тогда согласно [18; теорема I.5.1] все точки $\lambda \in \Omega$, за исключением некоторого множества изолированных, таковы, что операторы $I - T(\lambda)$ непрерывно обратимы. Таким образом, в Ω все точки, за исключением некоторого множества изолированных точек, являются регулярными для пучка $\tilde{L}$. Поскольку $T(\lambda)$ принимает значения во множестве компактных операторов, в упомянутых изолированных точках $\dim \ker \tilde{L}(\lambda) < \infty$. Из связи параметров $\lambda = 1/\gamma$ следует, в частности, утверждение (i).

Следовательно, для доказательства (i) достаточно проверить существование хотя бы одной невещественной точки, не являющейся собственным значением для пучка (13).

(i₃) Обозначим через $\kappa(A)$ суммарную кратность неположительных собственных значений оператора A . Если $\kappa(A) = 0$, т.е. A – равномерно положительный оператор, то, как указывалось выше, множество регулярных точек пучка включает в себя, в частности, все невещественные точки, т.е. это множество непусто.

Пусть $\kappa(A) \neq 0$. Предположим противное: множество регулярных точек линейного пучка L пусто. Покажем, что тогда существует линейный пучок

$$\tilde{L}(\lambda) = \tilde{K} - \lambda \tilde{A} \quad (16)$$

с ограниченными самосопряженными операторами $\tilde{K}$ и $\tilde{A}$, действующими в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и удовлетворяющими тем же условиям, что A и K , причем $\kappa(\tilde{A}) < \kappa(A)$ и множество регулярных точек пучка $\tilde{A}$ пусто. Поскольку $\kappa(A)$ – фиксированное натуральное число, через конечное количество шагов придем к существованию пучка вида (16) с $\kappa(\tilde{A}) = 0$ и пустым регулярным множеством. Последнее, как пояснено выше, невозможно.

Прежде всего заметим, что если множество регулярных точек пучка L пусто, то $\ker A \neq \{0\}$: в противном случае множество регулярных точек пучка L совпало бы с множеством регулярных точек ограниченного оператора $A^{-1}K$, которое, как известно, непусто.

Разложим пространство

$$\mathcal{H} = \text{ran } A \oplus \ker A.$$

Пусть $P_{\ker A}$ – ортопроектор на $\ker A$. Тогда оператор $K_0 = P_{\ker A} K P_{\ker A}|_{\ker A}$ самосопряжен и действует в конечномерном пространстве $\ker A$. Поэтому

$$\ker A = \text{ran } K_0 \oplus \ker K_0,$$

что влечет разложение всего пространства:

$$\mathcal{H} = \text{ran } A \oplus \text{ran } K_{22} \oplus \ker K_{22}. \quad (17)$$

Относительно этого разложения операторы K и A , а с ними и пучок $L(\lambda)$, представимы в матричном виде:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12}^* & K_{22} & 0 \\ K_{13}^* & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} K_{11} - \lambda A_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12}^* & K_{22} & 0 \\ K_{13}^* & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

По построению $\ker K_{22} = \{0\}$, а потому существует оператор K_{22}^{-1} . Так как по предположению все не вещественные λ являются собственными значениями для пучка (13), это означает существование такого вектора $x_\lambda = (x_{\lambda,1}, x_{\lambda,2}, x_{\lambda,3})^t$, что $L(\lambda)x_\lambda = 0$, т.е. имеет место система равенств

$$\begin{cases} (K_{11} - \lambda A_{11})x_{\lambda,1} + K_{12}x_{\lambda,2} + K_{13}x_{\lambda,3} = 0, \\ K_{12}^*x_{\lambda,1} + K_{22}x_{\lambda,2} = 0, \\ K_{13}^*x_{\lambda,1} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Отсюда находим, что $x_{\lambda,2} = -K_{22}^{-1}K_{12}^*x_{\lambda,1}$ и потому система (20) переходит в эквивалентную систему

$$\begin{cases} (K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{12}^* - \lambda A_{11})x_{\lambda,1} + K_{13}x_{\lambda,3} = 0, \\ K_{13}^*x_{\lambda,1} = 0, \\ x_{\lambda,2} = -K_{22}^{-1}K_{12}^*x_{\lambda,1}. \end{cases} \quad (21)$$

Таким образом, в пространстве

$$\mathcal{H}_1 = \text{ran } A \oplus \ker K_{22}$$

построен операторный пучок

$$L_1(\lambda) = \begin{bmatrix} K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{12}^* - \lambda A_{11} & K_{13} \\ K_{13}^* & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

с операторами

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{12}^* & K_{13} \\ K_{13}^* & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

удовлетворяющими тем же условиям, что и операторы A и K , причем $\kappa(A_1) \leq \kappa(A)$. В самом деле, последнее условие вытекает из того, что A_1 – сужение оператора A на подпространство $\mathcal{H}_1$. Кроме того, операторы K_1 и A_1 ограничены и самосопряжены, причем $\ker K_1 = \{0\}$. Последнее вытекает из того, что $(x_1, x_3)^t \in \ker K_1$ влечет $(x_1, -K_{22}^{-1}K_{12}^*x_1, x_3)^t \in \ker K$, а по условию $\ker K = \{0\}$. Из (21) следует, что у пучка (22) нет регулярных точек.

Таким образом, не ограничивая общности можно считать $K_0 = 0$, а потому $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, $K_1 = K$, $A_1 = A$ и $L_1(\lambda) = L(\lambda)$:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{13}^* & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} K_{11} - \lambda A_{11} & K_{13} \\ K_{13}^* & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Так как $\ker A \neq \{0\}$, то

$$\kappa(A_{11}) < \kappa(A). \quad (24)$$

Условие отсутствия регулярных точек линейного пучка, как отмечалось выше, в данном случае означает, что все не вещественные точки – собственные значения этого пучка или, что эквивалентно, для каждого не вещественного λ найдется вектор $y_\lambda \in \ker K_{13}^*$ такой, что $(K_{11} - \lambda A_{11})y_\lambda \in \operatorname{ran} K_{13}$. Так как

$$\operatorname{ran} A = \ker K_{13}^* \oplus \operatorname{ran} K_{13},$$

обозначив через P ортопроектор на $\ker K_{13}^*$ и положив

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \ker K_{13}^*, \quad \widetilde{K} = PK_{11}P|_{\ker K_{13}^*}, \quad \widetilde{A} = PA_{11}P|_{\ker K_{13}^*},$$

получим искомый линейный пучок (20), не имеющий регулярных точек, $\kappa(\widetilde{A}) < \kappa(A)$. Условие $\ker \widetilde{K} = \{0\}$ проверяется непосредственным счетом с учетом того, что $\ker K = \{0\}$.

(ii) Пусть γ достаточно мало по модулю. Перепишем пучок (11) в следующем виде:

$$L(\gamma) = (I + Y(X - \gamma K)^{-1})(X - \gamma K),$$

где X и Y те же, что в (14). Поскольку это выражение имеет смысл при $|\gamma| < 1/\|KX^{-1}\|$, то (см. [18; теорема I.5.1]) все точки открытого круга радиуса $1/\|KX^{-1}\|$ являются регулярными для пучка L за исключением, быть может, не более чем счетного множества изолированных собственных значений. В частности, если $\gamma = 0$ – регулярная точка пучка L (эквивалентно, $0 \in \rho(A)$), то и некоторая ее δ -окрестность состоит из регулярных точек этого пучка. Если $\gamma = 0$ – собственное значение (11) (эквивалентно, $0 \in \sigma_p(A)$), то оно изолировано и потому существует искомая окрестность Ω_δ .

СЛЕДСТВИЕ 6. В условиях теоремы 5 справедливы следующие утверждения.

(а) Пучок (11) имеет вещественную регулярную точку γ_0 такую, что отрицательный спектр оператора $L(\gamma_0)$ состоит из конечного числа $N(L(\gamma_0))$:

$$N(A) \leq N(L(\gamma_0)) \leq N(A) + \dim \ker A, \quad (25)$$

собственных значений (с учетом кратности); здесь и далее через $N(\cdot)$ обозначается количество отрицательных собственных значений (с учетом кратности) соответствующего оператора.

(b) Зададим в $\mathcal{H}$ A -метрику: $[x, y]_A = (Ax, y)$. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ – множество вещественных собственных значений линейного пучка $L(\gamma)$, расположенных в верхней полуплоскости, $\varkappa_\lambda$ – кратность λ_j , $j = 1, \dots, m$. Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^s$ – множество таких ненулевых вещественных собственных значений $L(\gamma)$, что $\ker L(\mu_k)$ содержит хотя бы один A -неположительный вектор, т.е. неположительный относительно A -метрики, и $\varkappa_{\mu_k}$ – размерность максимального в $\ker L(\mu_k)$ A -неположительного подпространства $\mathcal{L}_k$, $k = 1, \dots, s$. Тогда

$$\sum_{j=1}^m \varkappa_{\lambda_j} + \sum_{k=1}^s \varkappa_{\mu_k} \leq N(A) \leq N(L(\gamma_0)). \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (a) немедленно следует из утверждения (ii) теоремы 5 и известного факта теории возмущений (см. [18; теорема I.3.1], что количество отрицательных собственных значений оператора $L(\gamma_0) = A - \gamma_0 K$ при достаточно малом γ_0 не уменьшится, но и не увеличится более чем на $\ker \dim A$, поскольку неотрицательный спектр оператора A состоит из конечного числа изолированных конечнократных собственных значений.

(b) Пусть λ и μ – собственные значения линейного пучка $L(\gamma)$, $\lambda \neq \mu$. Тогда ядра $\ker L(\lambda)$ и $\ker L(\mu)$ A -ортогональны, т.е. $[x, y]_A = 0$ для всех $x \in \ker L(\lambda)$, $y \in \ker L(\mu)$. В самом деле, без ограничения общности будем считать $\mu \neq 0$, и тогда утверждение следует из равенств

$$[x, y]_A = (Ax, y) = (\lambda Kx, y) = \lambda(x, Ky) = \frac{\lambda}{\mu}(x, Ay) = \frac{\lambda}{\mu}[x, y]_A.$$

Следовательно, подпространство $\mathcal{L} := \text{з.л.о.}\{\ker L(\lambda_j), \mathcal{L}_k\}_{j=1, k=1}^{m, s}$ является A -неположительным. Так как $\mathcal{L} \cap \ker A = \{0\}$, справедливо левое неравенство в (26), а правое следует из (25).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Оценка (26) является достаточно грубой, не учитывающей длины жордановых цепочек линейного пучка. Мы не приводим формулировку и доказательство более точного факта так как это чисто технический результат. Читатель без труда улучшит эту оценку, применив схему рассуждений, использованную при доказательстве аналогичной теоремы для диссипативных операторов в пространстве Понтрягина (см. [17; теорема 2.2.26]).

3. Оценка сверху на количество неустойчивых собственных значений для операторного пучка. Точку $\lambda \in \mathbb{C}$ называют *спектрально устойчивой* для оператора $\mathfrak{A}$ (см. (8)), если пространство $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ можно разложить на два $\mathfrak{A}$ -инвариантных подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ так, что

- (a) оператор $\mathfrak{A}|_{\mathcal{L}_1}$ устойчив в том смысле, что является генератором равномерно ограниченной группы или, что эквивалентно в силу известной теоремы Б. Сёкефальфи-Надя, подобен оператору вида iA , где $A: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1$ – самосопряженный оператор;
- (b) λ – регулярная точка оператора $\mathfrak{A}|_{\mathcal{L}_2}$.

Отсюда немедленно следует, что спектрально устойчивыми могут быть только чисто мнимые точки, а если речь идет о собственных значениях, то только полупростые, т.е. те, которым соответствуют только тривиальные жордановы цепочки. Более того, в этом случае подпространство $\mathcal{L}_1$ представимо в виде прямой суммы двух $\mathfrak{A}$ -инвариантных подпространств, одно из которых является ядром оператора $\mathfrak{A} - \lambda$.

Отметим, что по определению оператора $\mathfrak{A}$ вместе с λ собственным значением этого оператора будет и $-\lambda$.

Особое внимание обратим на точку $\lambda = 0$. Из условий на оператор $\mathfrak{A}$ эта точка является либо регулярной для $\mathfrak{A}$, либо нормальным собственным значением (определение и свойства см. [18; гл. I]). Следовательно, если $\lambda = 0$ – собственное значение оператора $\mathfrak{A}$, то оно является спектрально устойчивым для $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда оно – полупростое собственное значение.

Пусть операторы A и K удовлетворяют условиям теоремы 5. Приведенное выше определение позволяет нам ввести понятие спектрально устойчивого собственного значения для линейного операторного пучка (11), связанное с аналогичным понятием для оператора $\mathfrak{A}$. Но прежде напомним, что собственное значение γ_0 линейного пучка называется *полупростым*, если $\text{ran}(A - \gamma_0) \cap K \ker L(\gamma_0) = \{0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Собственное значение γ обобщенной задачи $Au = \gamma Ku$ будем называть *спектрально устойчивым*, если оно неотрицательно, является полупростым, и при $\gamma > 0$ ядро $\ker(A - \gamma K)$ невырождено относительно квадратичной формы $[x, y]_A = (Ax, y)$ (эквивалентно, относительно квадратичной формы $[x, y]_K = (Kx, y)$). В противном случае собственное значение называется *спектрально неустойчивым*.

Из описанной выше связи оператора $\mathfrak{A}$ и линейного операторного пучка $L(\gamma)$ (см. (11)) следует, что $\gamma_0 = -\lambda_0^2$ является спектрально устойчивым собственным значением для $L(\gamma)$ тогда и только тогда, когда обе точки λ_0 и $-\lambda_0$ – спектрально устойчивые собственные значения оператора $\mathfrak{A}$.

Следовательно, если γ_0 – неустойчивое собственное значение задачи $Au = \gamma Ku$, то существует λ_0 , приводящее к неустойчивости соответствующей критической точки или, другими словами, к неустойчивости солитонного решения.

Прежде чем сформулировать основной результат этого раздела, теорему 10, и доказать необходимую для этого лемму 9, сделаем некоторые пояснения. Пусть $\{\mathcal{H}, [\cdot, \cdot]\}$ – пространство Понтягина с $\kappa < \infty$ отрицательными квадратами. Тогда оно допускает (каноническое) представление

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ [+] \mathcal{H}^-,$$

в котором подпространства $\{\mathcal{H}^\pm, \pm[\cdot, \cdot]\}$ гильбертовы, взаимно ортогональны и $\dim \mathcal{H}^- = \kappa$. Пространство $\mathcal{H}$ становится гильбертовым после введения (канонического) скалярного произведения

$$(x, y) = [x_+, y_+] - [x_-, y_-], \quad x = x_+ + x_-, \quad y = y_+ + y_-, \quad x_\pm, y_\pm \in \mathcal{H}^\pm.$$

Пространство Понтягина теперь можно рассматривать как J -пространство, т.е. гильбертово пространство с введенной J -метрикой: $[x, y] = (Jx, y)$, где $J = P^+ - P^-$, $P^\pm$ – ортопроектор на $\mathcal{H}^\pm$ соответственно.

Пусть T – самосопряженный оператор в пространстве Понтрягина. Тогда JT – гильбертов самосопряженный оператор. Обозначим через $N(JT)$ количество отрицательных собственных значений оператора JT .

Пусть $(\cdot, \cdot)_1$ – другое, отличное от $(\cdot, \cdot)$, скалярное произведение в $\mathcal{H}$, причем нормы, порожденные этими скалярными произведениями, эквивалентны. Тогда существуют такой равномерно положительно ограниченный оператор W и самосопряженный относительно $(\cdot, \cdot)_1$ ограниченный и ограниченно обратимый оператор G , что

$$(x, y)_1 = (Wx, y), \quad [x, y] = (Gx, y)_1,$$

т.е. пространство Понтрягина является G -пространством по отношению к новому скалярному произведению.

Рассмотрим оператор GT и докажем, что $N(GT) = N(JT)$. В самом деле, так как по определению $G = W^{-1}J$, то

$$\begin{aligned} N(GT) &= N(W^{-1}JT) \\ &= N(W^{-1/2}(W^{-1/2}JT W^{-1/2})W^{1/2}) = N(W^{-1/2}JT W^{-1/2}) = N(JT). \end{aligned}$$

Таким образом, число отрицательных собственных значений оператора вида GT , где T – самосопряженный оператор в пространстве Понтрягина, а G – оператор, порождающий индефинитное скалярное произведение, не зависит от выбора эквивалентного скалярного произведения, или, что то же, от выбора оператора G .

ЛЕММА 9. Пусть T – самосопряженный оператор в J -пространстве Понтрягина с κ отрицательными квадратами, и пусть $N(JT)$ – конечное число, причем $N(JT) > \kappa$. Тогда $N(T) \geq N(JT) - \kappa$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{L}_-$ – существующее в силу теоремы Понтрягина κ -мерное неположительное инвариантное подпространство оператора T , а $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_-^{[\perp]}$ – его J -ортогональное дополнение, являющееся максимальным неотрицательным подпространством, также инвариантным относительно T . Обозначим $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-$ – нейтральное подпространство, инвариантное относительно T . Тогда $\mathcal{L}_\pm = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{H}_\pm$. Без ограничения общности будем считать, что $\mathcal{H}_\pm \subset \mathcal{H}^\pm$, где $\mathcal{H}^\pm$ – составляющие канонического разложения. Тогда

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \oplus J\mathcal{L}_0.$$

Относительно этого разложения операторы J и T представляются в следующем матричном виде:

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & J_{03} \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ J_{03}^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ T &= \begin{bmatrix} T_0 & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ 0 & T_1 & 0 & T_{13} \\ 0 & 0 & T_2 & T_{23} \\ 0 & 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Отсюда

$$JT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & J_{03}T_3 \\ 0 & T_1 & 0 & T_{13} \\ 0 & 0 & -T_2 & -T_{23} \\ J_{03}^*T_0 & J_{03}^*T_{01} & J_{03}^*T_{02} & J_{03}^*T_{03} \end{bmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{F}_-$ – спектральное подпространство оператора JT , отвечающее его отрицательному спектру. По условию $\dim \mathcal{F}_- = N(JT)$. Так как $\dim(\mathcal{L}_- \oplus J\mathcal{L}_0) = \kappa$ и $N(JT) > \kappa$, то $\dim(\mathcal{F}_- \cap \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{H}_+) \geq N(JT) - \kappa$. Отсюда следует, что оператор $P_{\mathcal{L}_+}JT|_{\mathcal{L}_+}$, где $P_{\mathcal{L}_+}$ – ортопроектор на $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{H}_+$, имеет не менее $N(JT) - \kappa$ отрицательных собственных значений. Поскольку

$$P_{\mathcal{L}_+}JT|_{\mathcal{L}_+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_1 \end{bmatrix},$$

оператор $N(T_1) \geq N(JT) - \kappa$. Остается воспользоваться формой (27) оператора T и получить, что $N(T) \geq N(JT) - \kappa$.

Заметим, что при доказательстве нами не использовалась обратимость и даже непрерывность оператора T .

ТЕОРЕМА 10. Пусть A и K – самосопряженные операторы, отрицательные спектры которых состоят из конечного числа $N(A)$ и $N(K)$ соответственно собственных значений (с учетом кратности). Пусть A непрерывно обратим, а K ограничен с $\ker K = \{0\}$ и $N(A) \neq N(K)$. Тогда количество отрицательных собственных значений $N(L)$ линейного пучка $L(\gamma) = A - \gamma K$ не менее $|N(A) - N(K)|$.

Как следствие заключаем, что существуют неустойчивые солитонные решения, соответствующие отрицательным собственным значениям задачи $Au = \gamma Ku$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как A непрерывно обратим, то количество отрицательных собственных значений пучка L совпадает с количеством отрицательных собственных значений оператора KA^{-1} и $N(A^{-1}) = N(A)$. Для определенности положим $N(A) > N(K)$; случай $N(A) < N(K)$ рассматривается аналогично, только надо поменять ролями операторы A^{-1} и K . Пусть $A^{-1} = J|A^{-1}|$ – полярное разложение самосопряженного оператора A^{-1} . Поскольку

$$\begin{aligned} N(KA^{-1}) &= N(|A^{-1}|^{1/2}K|A^{-1}|^{1/2}J), \\ N(A^{-1}) &= N(J), \quad N(|A^{-1}|^{1/2}K|A^{-1}|^{1/2}) = N(K), \end{aligned}$$

остается воспользоваться леммой 9.

СЛЕДСТВИЕ 11. Пусть A и K – самосопряженные операторы, отрицательные спектры которых состоят из конечного числа $N(A)$ и $N(K)$ соответственно собственных значений (с учетом кратности). Пусть нуль – конечнократное изолированное собственное значение оператора A , а K ограничен и $\ker K = \{0\}$.

Если $N(A) > N(K)$, то количество отрицательных собственных значений $N(L)$ линейного пучка $L(\gamma) = A - \gamma K$ не менее $N(A) - N(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться теоремой 10, следствием 6 и в нем неравенствами (25).

Из доказанной теоремы прямо получаем и следующий результат.

ТЕОРЕМА 12. Если в условиях теоремы 10 имеем $N(A) = N(K)$, то либо задача $Au = \gamma Ku$ имеет неустойчивые собственные значения, либо существует $n = N(A) = N(K)$ ее линейно независимых решений $\{u_j\}_{j=1}^n$, отвечающих положительным собственным значениям и таких, что $(Ku_j, u_j) < 0$, $(Ku_j, u_m) = 0$, $k, m = 1, \dots, n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Линейная оболочка указанной в теореме 12 системы решений $\{u_j\}_{j=1}^n$ с указанными свойствами, вообще говоря, не единственна, однако множество отвечающих этой системе собственных значений определяется однозначно.

Следующая теорема даст оценку сверху множества отрицательных собственных значений пучка (11).

ТЕОРЕМА 14. Пусть A и K те же, что и в следствии 11, но с той разницей, что нуль может быть как конечнократным изолированным собственным значением оператора A , так и его регулярной точкой. Тогда отрицательный спектр пучка (11) состоит из конечнократных собственных значений и $N(L)$, количество отрицательных собственных значений пучка (11) с учетом кратности не превосходит числа $N(A) + N(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты изложения, дабы не вводить понятие кратности собственного значения для пучка, мы докажем упрощенный вариант этого утверждения, а именно, что $N_0(L)$, количество различных отрицательных собственных значений пучка, не превосходит $N(A) + N(K)$. С учетом того, что спектры операторов A и K состоят из конечного числа конечнократных изолированных собственных значений и нуль – либо регулярная точка оператора A , либо его конечнократное собственное значение, из теории возмущений линейных операторов следует, что отрицательный спектр пучка (11) состоит из конечнократных изолированных собственных значений. Наша цель – доказать, что их не более $N(A) + N(K)$. Для этого заметим, что если γ_1 и γ_2 – различные вещественные собственные значения пучка L и x, y – соответствующие собственные векторы: $L(\gamma_1)x = 0$, $L(\gamma_2)y = 0$, то

$$(Ax, y) = (Kx, y) = 0. \quad (28)$$

Пусть теперь $\gamma < 0$ – собственное значение L и v – соответствующий собственный вектор. Тогда $(Av, v) = \gamma(Kv, v)$. Следовательно, отрицательные собственные значения пучка могут быть разделены на три подгруппы:

- (a) существует такой собственный вектор v , что $(Av, v) = (Kv, v) = 0$;
- (b) для любого собственного вектора v $(Av, v) > 0$, $(Kv, v) < 0$;
- (c) для любого собственного вектора v $(Av, v) < 0$, $(Kv, v) > 0$.

Воспользуемся (28) и тем, что размерность A -неположительных подпространств не превосходит $N(A) + \dim \ker A$, а размерность K -неположительных подпространств не превосходит $N(K)$. Следовательно, $N_0(L) \leq N(A) + N(K) + \dim \ker A$. Для завершения доказательства заметим, что если размерность A -неположительного подпространства больше $N(A)$, то такое подпространство должно содержать векторы из $\ker A$. Однако в данном случае, когда рассматривается линейная оболочка собственных векторов, отвечающих отрицательным собственным значениям, это невозможно. Поэтому $N_0(L) \leq N(A) + N(K)$.

В заключение сформулируем условия на операторы A и K , при которых $N(L)$ принимает крайние значения, $|N(A) - N(K)|$ или $N(A) + N(K)$, и дадим схему доказательства соответствующего результата, теоремы 15.

Далее будем предполагать, что существует такая конечная постоянная $\alpha \neq 0$, что либо

$$A + \alpha K \geq 0, \quad (29)$$

либо выполнено симметричное условие

$$K + \alpha A \geq 0. \quad (30)$$

Условие (29) эквивалентно тому, что либо все A -неположительные векторы, $(Ax, x) \leq 0$, являются K -неотрицательными, $(Kx, x) \geq 0$, и тогда $\alpha > 0$, либо все K -неотрицательные векторы являются A -неотрицательными, $(Ax, x) \geq 0$, и тогда $\alpha < 0$ (см., например, [17; следствие 1.1.36]). Аналогичная интерпретация относится и к (30). В частности, оба этих условия, (29) и (30), имеют место при некоторых (вообще говоря, разных) α , если множество A -нейтральных векторов, $(Ax, x) = 0$, пересекается со множеством K -нейтральных векторов, $(Ky, y) = 0$, только в нуле.

При упомянутых во введении условиях из [12], что множества A -отрицательных векторов не пересекается со множеством K -отрицательных векторов, также имеют место оба случая (29) и (30) при некоторых (вообще говоря, разных) $\alpha > 0$.

Известно, что при равенстве нулю одного из чисел $N(A)$ или $N(K)$ справедливо равенство $N(L) = N(A) + N(K)$. Этим обусловлено то, что ниже в теореме 15 будем считать оба числа $N(A)$ и $N(K)$ отличными от нуля.

ТЕОРЕМА 15. Пусть A и K – самосопряженные операторы, отрицательные спектры которых состоят из конечного числа $N(A) \neq 0$ и $N(K) \neq 0$ соответственно собственных значений (с учетом кратности), но не исчерпывают спектры этих операторов. Пусть A непрерывно обратим, K ограничен с $\ker K = \{0\}$ и при некотором $\alpha \neq 0$ имеет место неравенство (29) или (30).

Тогда

- (a) при $\alpha < 0$ справедливо равенство $N(L) = |N(K) - N(A)|$;
- (b) при $\alpha > 0$ справедливо равенство $N(L) = N(A) + N(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что без ограничения общности непрерывно обратимый оператор A можно считать непрерывным, в противном случае перейдем к пучку $A|A|^{-1} - \gamma|A|^{-1/2}K|A|^{-1/2}$. Если непрерывный оператор K является и непрерывно обратимым, то утверждение теоремы прямо следует из [19; лемма 3.2] и [19; теорема 3.4 (с)]. Если же K не является непрерывно обратимым, то следует рассмотреть такое малое возмущение A_ε и K_ε операторов A и K , чтобы сохранились условия теоремы и оба оператора A_ε и K_ε были непрерывно обратимыми, а затем перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. T. Il'ichev, A. Yu. Semenov, "Stability of solitary waves in dispersive media described by a fifth-order evolution equation", *Theor. Comp. Fluid Dyn.*, **3**:6 (1992), 307–326.
- [2] F. Dias, E. A. Kuznetsov, "On the nonlinear stability of solitary wave solutions of the fifth-order Korteweg-de Vries equation", *Phys. Lett. A*, **263**:1–2 (1999), 98–104.

- [3] D. E. Pelinovsky, J. Yang, “Instabilities of multihump vector solitons in coupled nonlinear Schrödinger equations”, *Stud. Appl. Math.*, **115**:1 (2005), 109–137.
- [4] G. Perelman, “Asymptotic stability of multi-soliton solutions for nonlinear Schrödinger equations”, *Comm. Partial Differential Equations*, **29**:7–8 (2004), 1051–1095.
- [5] B. Sandstede, “Stability of multiple-pulse solutions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350**:2 (1998), 429–472.
- [6] Y. Kodama, D. Pelinovsky, “Spectral stability and time evolution of N -solitons in the KdV hierarchy”, *J. Phys. A*, **38**:27 (2005), 6129–6140.
- [7] M. Grillakis, J. Shatah, W. Strauss, “Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I”, *J. Funct. Anal.*, **74**:1 (1987), 160–197.
- [8] M. Grillakis, J. Shatah, W. Strauss, “Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. II”, *J. Funct. Anal.*, **94**:2 (1990), 308–348.
- [9] M. Chugunova, D. Pelinovsky, “Block-diagonalization of the symmetric first-order coupled-mode system”, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, **5**:1 (2006), 66–83.
- [10] M. Grillakis, “Analysis of the linearization around a critical point of an infinite-dimensional Hamiltonian system”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **43**:3 (1990), 299–333.
- [11] C. K. R. T. Jones, “An instability mechanism for radially symmetric standing waves of a nonlinear Schrödinger equation”, *J. Differential Equations*, **71**:1 (1988), 34–62.
- [12] M. Grillakis, “Linearized instability for nonlinear Schrödinger and Klein–Gordon equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **41**:6 (1988), 747–774.
- [13] D. E. Pelinovsky, “Inertia law for spectral stability of solitary waves in coupled nonlinear Schrödinger equations”, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **461**:2055 (2005), 783–812.
- [14] S. Cuccagna, D. Pelinovsky, V. Vougalter, “Spectra of positive and negative energies in the linearized NLS problem”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **58**:1 (2005), 1–29.
- [15] K. McLeod, “Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^n$. II”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **339**:2 (1993), 495–505.
- [16] Л. С. Понтрягин, “Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **8**:6 (1944), 243–280.
- [17] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986.
- [18] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [19] Т. Я. Azizov, A. Dijksma, V. L. Khatskevich, “On the defect of noncontractive operators in Krein spaces: a new formula and some applications”, *Contributions to operator theory in spaces with an indefinite metric* (Vienna, 1995), Oper. Theory Adv. Appl., **106**, Birkhauser, Basel, 1998, 91–112.

Т. Я. Азизов

Воронежский государственный университет

E-mail: azizov@math.vsu.ru

Поступило

29.05.2007

Исправленный вариант

01.06.2009

М. В. Чугунова

McMaster University, Канада

E-mail: chugunom@math.mcmaster.ca