Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Абдрахманов, О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условием второго рода для уравнений нечетного порядка, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 2, 163–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4065>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:50:24

УДК 517.95

О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условием второго рода для уравнений нечетного порядка

А. М. Абдрахманов

Исследуется разрешимость краевой задачи для уравнений нечетного порядка с заданием на границе условия, связывающего значения конормальной производной со значениями некоторого интегрального оператора от решения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Библиография: 22 названия.

В работе [1] изучалась разрешимость новой краевой задачи для уравнения нечетного порядка по выделенной (временной) переменной и четного – именно, второго – по пространственным; особенностью изученной задачи являлось то, что в качестве условия по пространственным переменным задавалось условие, связывающее граничные значения решения со значениями некоторого оператора от решения. В настоящей же работе мы продолжим исследования [1] в следующем направлении: изучим разрешимость задачи с заданием условия, связывающего граничные значения конормальной производной решения со значениями некоторого интегрального оператора от решения.

Исследование разрешимости краевых задач с интегральными и другими нелокальными условиями привлекает в последнее время многих авторов: см., например, результаты Камынина, Ионкина, Скубачевского и др., опубликованные в статьях [2]–[18], в монографиях [19], [20]. Отметим, что по применяемой технике настоящая работа ближе всего к названной выше работе [1] и к работам [15]–[18].

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с границей Γ , Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$ и $f(x, t)$ – заданные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$ функции, $K_1(x, y, t)$ и $K_2(x, y, t, \tau)$ – заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, $\tau \in [0, T]$, $D_t^k u = \partial^k u / \partial t^k$ при $k = 2, 3$, $D_t u = \partial u / \partial t$, M – дифференциальный оператор вида

$$Mu = \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x) u_{x_j}) + a(x) u$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n), $\nu_x = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке x , $\partial / \partial \nu_x = a^{ij}(x) \nu_i \partial / \partial x_j$ – конормальная производная в точке x границы Γ .

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lu \equiv D_t^3 u + Mu = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu_x} \right|_{x \in \Gamma, t \in (0, T)} = \int_{\Omega} K_1(x, y, t) u(y, t) dy \Big|_{x \in \Gamma, t \in (0, T)}. \quad (4)$$

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), а также условие

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu_x} \right|_{x \in \Gamma, t \in (0, T)} = \int_Q K_2(x, y, t, \tau) u(y, \tau) dy d\tau \Big|_{x \in \Gamma, t \in (0, T)}. \quad (5)$$

Пусть $\tilde{K}_1(x, y, t)$ есть функция, для которой при $x \in \Gamma$, $y \in \Omega$, $t \in (0, T)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial \tilde{K}_1(x, y, t)}{\partial \nu_x} = K_1(x, y, t)$$

(вопрос о существовании такой функции мы обсудим ниже). Определим оператор B равенством

$$(Bv)(x, t) = v(x, t) - \int_{\Omega} \tilde{K}_1(x, y, t) v(y, t) dy;$$

для удобства значение оператора B на функции $v(x, t)$ будем обозначать $\bar{v}(x, t)$. Далее, пусть $\Phi(x, t, v)$ есть функция

$$\begin{aligned} \Phi(x, t, v) = & 3 \int_{\Omega} D_t \tilde{K}_1(x, y, t) D_t^2 v(y, t) dy + 3 \int_{\Omega} D_t^2 \tilde{K}_1(x, y, t) D_t v(y, t) dy \\ & + \int_{\Omega} D_t^3 \tilde{K}_1(x, y, t) v(y, t) dy + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} [a^{ij}(x) \tilde{K}_{1x_j}(x, y, t)] v(y, t) dy \\ & + \int_{\Omega} \tilde{K}_1(x, y, t) a(x, t) v(y, t) dy + \int_{\Omega} a^{ij}(y) \tilde{K}_{1y_i}(x, y, t) v_{y_j}(y, t) dy \\ & - \int_{\Omega} \tilde{K}_1(x, y, t) a(y, t) v(y, t) dy + \int_{\Gamma} \tilde{K}_1(x, y, t) a^{ij}(y) v_{y_j}(y, t) \nu_i ds_y. \end{aligned}$$

Наконец, определим пространство, которое будет основным в настоящей работе. Именно, пусть

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^2(Q), D_t^3 v(x, t) \in L_2(Q)\};$$

норму в этом пространстве определим естественным образом:

$$\|v\|_V = \|v\|_{W_2^2(Q)} + \|D_t^3 v\|_{L_2(Q)}.$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти решение уравнения*

$$L\bar{u} + \Phi(x, t, u) = g(x, t), \quad (6)$$

удовлетворяющее условиям

$$\bar{u}(x, 0) = \bar{u}_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

$$\bar{u}(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial \nu_x} \right|_{x \in \Gamma, t \in (0, T)} = 0. \quad (9)$$

Пусть выполняются условия

$$a^{ij}(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad a(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad \tilde{K}_1(x, y, t) \in C^3(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times [0, T]), \quad \Gamma \in C^2, \quad (10)$$

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq k_0|\xi|^2, \quad k_0 > 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (11)$$

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (12)$$

$$a(x) \leq -a_0 < 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (13)$$

$$(a^{ij}(x)a_{x_i}(x))_{x_j} \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (14)$$

$$k_1 \int_{\Omega} v^2(x, t) dx \leq \int_{\Omega} \bar{v}^2(x, t) dx \leq k_2 \int_{\Omega} v^2(x, t) dx, \quad (15)$$

$$k_2 \geq k_1 > 0, \quad t \in [0, T], \quad v(x, t) \in L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega)).$$

Покажем, что при выполнении этих условий для решений $u(x, t)$ краевой задачи (6)–(9) имеют место некоторые вспомогательные неравенства.

Прежде всего заметим, что имеет место неравенство

$$\int_Q \Phi^2 dx dt \leq N_1 \left[\int_Q \left[u^2 + (D_t u)^2 + (D_t^2 u)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right] dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 ds_x dt \right] \quad (16)$$

с постоянной N_1 , определяющейся лишь коэффициентами оператора M , функцией $\tilde{K}_1(x, y, t)$, областью Ω и числом T (доказательство этого неравенства нетрудно провести с помощью неравенства Гёльдера). Далее, представление функции $\bar{u}(x, t)$, равенства

$$D_t \bar{u}(x, t) = D_t u(x, t) - \int_{\Omega} \tilde{K}_1(x, y, t) D_t u(y, t) dy - \int_{\Omega} D_t \tilde{K}_1(x, y, t) u(y, t) dy,$$

$$\begin{aligned} D_t^2 \bar{u}(x, t) &= D_t^2 u(x, t) - \int_{\Omega} \tilde{K}_1(x, y, t) D_t^2 u(y, t) dy \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} D_t \tilde{K}_1(x, y, t) D_t u(y, t) dy - \int_{\Omega} D_t^2 \tilde{K}_1(x, y, t) u(y, t) dy \end{aligned}$$

и условия (15) дают неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [D_t u(x, t)]^2 dx &\leq k_3 \int_{\Omega} [D_t \bar{u}(x, t)]^2 dx + k_4 \int_{\Omega} \bar{u}^2(x, t) dx, \\ \int_{\Omega} [D_t^2 u(x, t)]^2 dx &\leq k_5 \int_{\Omega} [D_t^2 \bar{u}(x, t)]^2 dx + k_6 \int_{\Omega} [D_t \bar{u}(x, t)]^2 dx + k_7 \int_{\Omega} \bar{u}^2(x, t) dx, \\ \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma} u_{x_i}^2(x, t) ds_x &\leq 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma} \bar{u}_{x_i}^2(x, t) ds_x + k_8 \int_{\Omega} \bar{u}^2(x, t) dx \end{aligned}$$

с некоторыми постоянными $k_3, \dots, k_8$, определяющимися лишь функцией $\tilde{K}_1(x, y, t)$ и областью Ω . Используя эти неравенства, а также интегральные неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_Q \bar{u}_{x_i}^2 dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Gamma} \bar{u}_{x_i}^2 ds_x dt &\leq \delta_0 \sum_{i,j=1}^n \int_Q \bar{u}_{x_i x_j}^2 dx dt + \alpha(\delta_0) \int_Q \bar{u}^2 dx dt, \\ \int_Q (D_t \bar{u})^2 dx dt &\leq \delta_0 \int_Q (D_t^3 \bar{u})^2 dx dt + \beta(\delta_0) \int_Q \bar{u}^2 dx dt, \\ \int_Q (D_t^2 \bar{u})^2 dx dt &\leq \delta_0 \int_Q (D_t^3 \bar{u})^2 dx dt + \gamma(\delta_0) \int_Q \bar{u}^2 dx dt, \end{aligned}$$

в которых δ есть произвольное положительное число, $\alpha(\delta_0)$ определяется помимо числа δ_0 еще и областью Ω , числа $\beta(\delta_0)$ и $\gamma(\delta_0)$ определяются помимо числа δ_0 еще и числом T (см. [21]), из (16) нетрудно вывести неравенство

$$\begin{aligned} \int_Q \Phi^2 dx dt &\leq N_1 \left[\frac{1}{k_1} + (k_3 + k_6)\beta(\delta_0) + k_4 + k_5\gamma(\delta_0) \right] \int_Q \bar{u}^2 dx dt \\ &\quad + 2N_1\delta_0 \sum_{i,j=1}^n \int_Q \bar{u}_{x_i x_j}^2 dx dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Анализируя последовательно равенства

$$\begin{aligned} - \int_Q [L\bar{u} + \Phi(x, t, u)]\bar{u} dx dt &= - \int_Q g\bar{u} dx dt, \\ \int_Q [L\bar{u} + \Phi(x, t, u)] \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}\bar{u}_{x_j}) dx dt &= \int_Q g \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}\bar{u}_{x_j}) dx dt, \\ \int_Q [L\bar{u} + \Phi(x, t, u)] D_t^3 \bar{u} dx dt &= \int_Q g D_t^3 \bar{u} dx dt \end{aligned}$$

с использованием интегрирования по частям, неравенства Юнга, неравенства Пуанкаре

$$\int_Q \bar{u}^2 dx dt \leq m_1 \sum_{i=1}^n \int_Q \bar{u}_{x_i}^2 dx dt,$$

второго основного неравенства для эллиптических операторов

$$m_2 \sum_{i,j=1}^n \int_Q \bar{u}_{x_i x_j}^2 dx dt \leq \int_Q \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}\bar{u}_{x_j}) \right]^2 dx dt + m_3 \int_Q \bar{u}^2 dx dt$$

(см. [21]; здесь положительные постоянные m_1 , m_2 и m_3 определяются лишь областью Ω и функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$), нетрудно показать, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [D_t \bar{u}(x, T)]^2 dx + 2a_0 \int_Q \bar{u}^2 dx dt + k_0 \sum_{i=1}^n \int_Q \bar{u}_{x_i}^2 dx dt \\ \leq \frac{2m_1}{k_0} \int_Q \Phi^2 dx dt + \frac{2m_1}{k_0} \int_Q g^2 dx dt, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
& k_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [D_t \bar{u}_{x_i}(x, T)]^2 dx + 2a_0 k_0 \sum_{i=1}^n \int_Q \bar{u}_{x_i}^2 dx dt + m_2 \sum_{i,j=1}^n \int_Q \bar{u}_{x_i x_j}^2 dx dt \\
& \leq 2m_3 \int_Q \bar{u}^2 dx dt + \int_Q \Phi^2 dx dt + \int_Q g^2 dx dt,
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
& k_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [D_t \bar{u}_{x_i}(x, T)]^2 dx + a_0 \int_{\Omega} [D_t \bar{u}(x, T)]^2 dx + \int_Q (D_t^3 \bar{u})^2 dx dt \\
& \leq \int_Q \Phi^2 dx dt + \int_Q g^2 dx dt.
\end{aligned} \tag{20}$$

Суммируя неравенства (17)–(20), приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
& 2a_0 \int_Q \bar{u}^2 dx dt + (1 + 2a_0)k_0 \sum_{i=1}^n \int_Q \bar{u}_{x_i}^2 dx dt \\
& + m_2 \sum_{i,j=1}^n \int_Q \bar{u}_{x_i x_j}^2 dx dt + \int_Q (D_t^3 \bar{u})^2 dx dt \\
& \leq \left\{ \frac{2(m_1 + k_0)N_1}{k_0} \left[\frac{1}{k_1} + (k_3 + k_6)\beta(\delta_0) + k_4 + k_5\gamma(\delta_0) + k_7 + k_8 \right] + 2m_3 \right\} \\
& \quad \times \int_Q \bar{u}^2 dx dt \\
& + \frac{4(m_1 + k_0)N_1\delta_0}{k_0} \sum_{i,j=1}^n \int_Q \bar{u}_{x_i x_j}^2 dx dt \\
& + \frac{2(m_1 + k_0)N_1(k_3 + k_5 + k_6)\delta_0}{k_0} \int_Q (D_t^3 \bar{u})^2 dx dt \\
& + \frac{2(m_1 + k_0)}{k_0} \int_Q g^2 dx dt.
\end{aligned} \tag{21}$$

Зафиксируем число δ_0 настолько малым, что будут выполняться неравенства

$$\frac{4(m_1 + k_0)N_1\delta_0}{k_0} < \frac{m_2}{2}, \quad \frac{2(m_1 + k_0)N_1(k_3 + k_5 + k_6)\delta_0}{k_0} < \frac{1}{2}.$$

Еще раз применяя неравенство Пуанкаре и используя обозначения

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2a_0 + \frac{(1 + 2a_0)k_0}{m_1}, \\
A_1 &= \frac{2N_1(m_1 + k_0)}{k_0} \left[\frac{1}{k_1} + (k_3 + k_6)\beta(\delta_0) + k_4 + k_5\gamma(\delta_0) + k_7 + k_8 \right] + 2m_3, \\
A_2 &= \frac{2(m_1 + k_0)}{k_0},
\end{aligned}$$

мы приходим к оценке

$$(a_1 - A_1) \int_Q \bar{u}^2 dx dt + \frac{m_2}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_Q \bar{u}_{x_i x_j}^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_Q (D_t^3 \bar{u})^2 dx dt \leq A_2 \int_Q g^2 dx dt. \tag{22}$$

Эта оценка и будет основной при использовании разрешимости краевой задачи I.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия (10)–(15), а также условие

$$a_1 - A_1 > 0. \quad (23)$$

Тогда краевая задача (1)–(4) имеет решение $u(x, t)$ такое, что выполнены условия $u(x, t) \in V$, $\bar{u}(x, t) \in V$, и это решение в пространстве V единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ есть число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим краевую задачу: найти решение уравнения

$$L\bar{u} + \lambda\Phi(x, t, u) = g(x, t), \quad (6_\lambda)$$

удовлетворяющее условиям (7)–(9). Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых краевая задача (6_λ) , (7)–(9) при принадлежности функции $g(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in V$, $\bar{u}(x, t) \in V$. Хорошо известно, что если это множество будет непустым, открытым и замкнутым одновременно, то оно будет совпадать со всем отрезком $[0, 1]$.

Краевая задача (6_0) , (7)–(9) как задача относительно функции $\bar{u}(x, t)$ разрешима в пространстве V (см. [22]). Условие (15) означает, что уравнение $Bu = \bar{u}$ разрешимо; как показано выше, функция $u(x, t)$ будет принадлежать пространству V .

Из проведенных рассуждений следует, что множество Λ не пусто (число 0 принадлежит ему).

Из условий теоремы следует, что для решений краевой задачи (6_λ) , (7)–(9) выполняется априорная оценка

$$\|\bar{u}\|_V \leq N_0 \|g\|_{L_2(Q)} \quad (24)$$

с постоянной N_0 , определяющейся лишь коэффициентами оператора M , областью Ω и числом T . Из условия (15) следует, что имеет место аналогичная оценка и для самой функции $u(x, t)$:

$$\|u\|_V \leq N'_0 \|g\|_{L_2(Q)}. \quad (25)$$

Из оценок (24) и (25) и следует открытость и замкнутость множества Λ (подробные рассуждения в близкой ситуации см. в [1]).

Совпадение множества Λ с отрезком $[0, 1]$ означает, что краевая задача (6)–(9) при принадлежности функции $g(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in V$, $\bar{u}(x, t) \in V$.

Пусть $g(x, t)$ есть функция $\bar{f}(x, t)$. Для такой функции $g(x, t)$ уравнение (6) есть уравнение

$$B(Lu - f) = 0.$$

Из условия (15) и из этого уравнения следует, что функция $u(x, t)$ будет удовлетворять уравнению (1). Выполнение для функции $u(x, t)$ условий (2) и (3) вновь следует из условия (15). Выполнение условия (4) очевидно.

Также очевидным является и единственность в пространстве V . Теорема полностью доказана.

Обратимся теперь к краевой задаче II.

Исследование разрешимости краевой задачи II проводится в целом вполне аналогично исследованию краевой задачи I. Не вдаваясь в технические подробности, изложим лишь схему доказательства соответствующей теоремы.

Пусть $\tilde{K}_2(x, y, t, \tau)$ есть функция, для которой при $x \in \Gamma$, $y \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $\tau \in (0, T)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial \tilde{K}_2(x, y, t, \tau)}{\partial \nu_x} = K_2(x, y, t, \tau),$$

$B_1 v$ есть оператор

$$(B_1 v)(x, t) = v(x, t) - \int_Q \tilde{K}_2(x, y, t, \tau) v(y, \tau) dy d\tau;$$

значение оператора B_1 на функции $v(x, t)$ будем обозначать также $\tilde{v}(x, t)$. Далее, пусть $\Phi_1(x, t, v)$ есть функция

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, t, v) = & 3 \int_Q D_\tau^2 \tilde{K}_2(x, y, t, \tau) D_\tau u(y, \tau) dy d\tau \\ & + 3 \int_Q D_\tau \tilde{K}_2(x, y, t, \tau) D_\tau^2 u(y, \tau) dy d\tau + \int_Q D_t^3 \tilde{K}_2(x, y, t, \tau) u(y, \tau) dy d\tau \\ & - \int_\Omega \tilde{K}_2(x, y, t, T) D_\tau^2 u(y, T) dy - 2 \int_\Omega D_\tau \tilde{K}_2(x, y, t, T) D_\tau u(y, T) dy \\ & + \int_\Omega \tilde{K}_2(x, y, t, 0) D_\tau^2 u(y, 0) dy + \int_Q a^{ij}(y) \tilde{K}_{2y_i}(x, y, t, \tau) u_{y_j}(y, \tau) dy d\tau \\ & + \int_Q \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x) \tilde{K}_{2x_j}(x, y, t, \tau)) \right] u(y, \tau) dy d\tau \\ & + \int_Q \tilde{K}_2(x, y, t, \tau) a(x) u(y, \tau) dy d\tau - \int_Q \tilde{K}_2(x, y, t, \tau) a(y) u(y, \tau) dy d\tau \\ & + \int_0^T \int_\Gamma \tilde{K}_1(x, y, t, \tau) a^{ij}(y) u_{y_j}(y, \tau) \nu_i ds_y d\tau. \end{aligned}$$

Пусть выполняются условия

$$\tilde{K}_2(x, y, 0, \tau) \equiv \tilde{K}_{2t}(x, y, 0, \tau) \equiv \tilde{K}_2(x, y, T, \tau) \equiv 0 \quad (26)$$

при $x \in \Omega$, $y \in \Omega$, $\tau \in (0, T)$. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти решение уравнения*

$$L\tilde{u} + \Phi_1(x, t, u) = g(x, t), \quad (27)$$

удовлетворяющее условиям (7)–(9). Покажем, что для решений этой краевой задачи из пространства V имеют место априорные оценки вида (24) и (25).

Пусть выполняются условия (11)–(14), а также условия

$$a^{ij}(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad a(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad \tilde{K}_2(x, y, t, \tau) \in C^3(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times [0, T] \times [0, T]), \quad (10')$$

$$k_1 \int_Q v^2 dx dt \leq \int_Q \tilde{v}^2(x, t) dx dt \leq k_2 \int_Q v^2 dx dt, \quad (15')$$

$$k_2 \geq k_1 > 0, \quad v(x, t) \in L_2(Q).$$

Для функции $\Phi_1(x, t, u)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \int_Q \Phi_1^2 dx dt \leq N_2 \left[\int_Q \left[u^2 + (D_t u)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right] dx dt \right. \\ \left. + \int_{\Omega} ([D_t^2 u(x, T)]^2 + [D_t^2 u(x, 0)]^2 + [D_t u(x, T)]^2) dx \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 ds_x dt \right] \end{aligned} \quad (28)$$

с постоянной N_2 , определяющейся лишь коэффициентами оператора M , функцией $\tilde{K}_2(x, y, t, \tau)$, областью Ω и числом T . Используя это неравенство, неравенство Пуанкаре, второе основное неравенство для эллиптических операторов в приведенной выше форме, представление функции $\tilde{u}(x, t)$ через функцию $u(x, t)$, а также неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [D_t \bar{u}(x, T)]^2 dx &\leq \delta_0 \int_Q (D_t^3 \bar{u})^2 dx dt + \alpha_1(\delta_0) \int_Q \bar{u}^2 dx dt, \\ \int_{\Omega} [D_t^2 \bar{u}(x, T)]^2 dx &\leq \delta_0 \int_Q (D_t^3 \bar{u})^2 dx dt + \alpha_2(\delta_0) \int_Q \bar{u}^2 dx dt, \\ \int_{\Omega} [D_t^3 \bar{u}(x, 0)]^2 dx &\leq \delta_0 \int_Q (D_t^3 \bar{u})^2 dx dt + \alpha_3(\delta_0) \int_Q \bar{u}^2 dx dt, \end{aligned}$$

в которых числа $\alpha_1(\delta_0)$, $\alpha_2(\delta_0)$, $\alpha_3(\delta_0)$ определяются помимо числа δ_0 еще и числом T , нетрудно показать, что для краевой задачи (27), (7)–(9) при выполнении условия вида (23) имеет место априорная оценка вида (22) для функции $\tilde{u}(x, t)$. Из данной оценки и аналогичной оценки для самой функции $u(x, t)$ следует разрешимость краевой задачи (27), (7)–(9) в пространстве V (для доказательства вновь можно воспользоваться методом продолжения по параметру). Положив в уравнении (27) $g(x, t) = \tilde{f}(x, t)$, мы получим, что решение $u(x, t)$ краевой задачи (27), (7)–(9) с такой функцией $g(x, t)$ будет решением уравнения (1) и для нее будет выполняться условие (5) (все это вследствие равенства $L\bar{u} + \Phi_1 - g = B_1(Lu - f)$ и условия (15')). Выполнение условий (2) и (3) для найденной функции $u(x, t)$ вытекает из условия (26).

Из всего сказанного и следует, что для краевой задачи II имеет место аналогичная теореме 1 теорема существования и единственности решений, принадлежащих пространству V .

Заметим, что для выполнения условия (23) теоремы 1 в случае постоянной функции $a(x)$ достаточно, чтобы число a_0 было большим, в случае же, когда $a(x)$ отлична от постоянной, достаточно, чтобы число a_0 было большим, функция же $\tilde{K}_1(x, y, t)$ и ее производные были бы малыми. То же самое можно сказать и для краевой задачи II: условие вида (23), обеспечивающее наличие необходимой априорной оценки, выполняется, если число a_0 велико и в случае непостоянной функции $a(x)$ – если дополнительно функция $\tilde{K}_2(x, y, t, \tau)$ и ее производные достаточно малы.

Сделаем еще несколько замечаний.

1. Помимо функций $\tilde{K}_1(x, y, t)$ и $\tilde{K}_2(x, y, t, \tau)$ на величину числа a_0 влияют также малость области Ω и числа T .

2. Зависимость функций a^{ij} , a от переменной t не меняет принципиально ситуацию с разрешимостью краевых задач I и II и вносит лишь незначительные технические трудности. Указанный в работе оператор M вообще можно заменить оператором вида

$$Mu = a^{ij}(x, t)u_{x_i x_j} + a^i(x, t)u_{x_i} + a(x, t)u.$$

3. Также не меняет принципиально ситуацию случай уравнения нечетного порядка $2m + 1$, $m \geq 1$, — именно, уравнения

$$D_t^{2m+1}u + \sum_{k=1}^{2m} d^k(x, t)D_t^k u + (-1)^{m+1}Mu = f(x, t)$$

с эллиптическим оператором M , указанным в предыдущем замечании. Краевые задачи I и II при этом состоят в нахождении решений данного уравнения, для которого выполняются условия (4) или (5) соответственно, а также условий

$$\begin{aligned} D_t^k u|_{t=0, x \in \Omega} &= 0, & k &= 0, \dots, m, \\ D_t^k u|_{t=T, x \in \Omega} &= 0, & k &= 0, \dots, m-1. \end{aligned}$$

4. Функция $\tilde{K}_1(x, y, t)$ может быть построена, например, как решение второй краевой задачи

$$M\tilde{K}_1(x, y, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{K}_1(x, t, t)}{\partial \nu_x} \right|_{\Gamma} = K_1(x, y, t)$$

(переменные y и t здесь являются параметрами). Аналогичным образом можно построить и функцию $\tilde{K}_2(x, y, t, \tau)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Абдрахманов, А. И. Кожанов, “Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка”, *Изв. вузов. Матем.*, 2007, № 5, 3–12.
- [2] Л. И. Камынин, “Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 4:6 (1964), 1006–1024.
- [3] Н. И. Ионкин, “Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием”, *Дифференц. уравнения*, 13:2 (1977), 294–304.
- [4] A. Friedman, “Monotonic decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions”, *Quart. Appl. Math.*, 44:3 (1986), 401–407.
- [5] Л. А. Муравей, А. В. Филиновский, “Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения”, *Матем. заметки*, 54:4 (1993), 98–116.
- [6] N.-E. Benouor, A. Bouziani, “Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations paraboliques”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 321:9 (1995), 1177–1182.
- [7] Д. Г. Гордезиани, Г. А. Авалишвили, “Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды”, *Матем. моделирование*, 12:1 (2000), 94–103.
- [8] D. Gordeziani, G. Avalishvili, “Investigation of the nonlocal initial boundary value problem for some hyperbolic equations”, *Hiroshima Math. J.*, 31:3 (2001), 345–366.
- [9] Л. С. Пулькина, “Смешанная задача с нелокальным условием для гиперболического уравнения”, *Неклассические уравнения математической физики*, Ин-т матем. СО РАН, Новосибирск, 2002, 176–184.

- [10] Л. С. Пулькина, *Нелокальные задачи для гиперболических уравнений*, Автореферат дисс. ... докт. физ.-матем. наук, Изд-во Моск. ун-та, М., 2003.
- [11] R. V. Shamin, "Nonlocal parabolic problems with the support of nonlocal terms inside a domain", *Funct. Differ. Equ.*, **10**:1-2 (2003), 307–314.
- [12] Л. С. Пулькина, "Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения", *Дифференц. уравнения*, **40**:7 (2004), 887–892.
- [13] A. Bouziani, "Initial-boundary value problem for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions", *J. Math. Anal. Appl.*, **291**:2 (2004), 371–386.
- [14] Н. И. Иванцов, "Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями", *Дифференц. уравнения*, **40**:4 (2004), 547–564.
- [15] А. И. Кожанов, "О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений", *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **30**, СамГТУ, Самара, 2004, 63–69.
- [16] А. И. Кожанов, Л. С. Пулькина, "Краевые задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений", *Докл. РАН*, **404**:5 (2005), 589–592.
- [17] А. И. Кожанов, Л. С. Пулькина, "О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений", *Дифференц. уравнения*, **42**:9 (2006), 1166–1179.
- [18] Л. С. Пулькина, "Начально-краевая задача с нелокальным граничным условием для многомерного гиперболического уравнения", *Дифференц. уравнения*, **44**:8 (2008), 1084–1089.
- [19] A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **91**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
- [20] А. М. Нахушев, *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*, Наука, М., 2006.
- [21] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.
- [22] И. Е. Егоров, В. Е. Федоров, *Неклассические уравнения математической физики высокого порядка*, Изд-во ВЦ СО РАН, Новосибирск, 1995.

А. М. Абдрахманов

Уфимский государственный авиационный технический
университет
E-mail: kickufa@online.ru

Поступило

27.01.2009

Исправленный вариант

14.04.2009