Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Орлов, О сильных решениях регуляризованной модели нелинейно-вязкоупругой среды, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 2, 238–253

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4067>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 11:54:20

О сильных решениях регуляризованной модели нелинейно-вязкоупругой среды

В. П. Орлов

Рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений, описывающей движение нелинейно-вязкоупругой среды с памятью вдоль траекторий поля скоростей, обобщающая систему уравнений Навье–Стокса. Установлены теоремы существования и единственности сильных решений, содержащих старшие производные, суммируемые с квадратом в плоском случае.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. В $Q = [0, T] \times \Omega$, где $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{aligned} v_t + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \operatorname{Div} \mathcal{E}(v)(t, x) - \operatorname{Div} \mu_1(S(v(t, x))) \mathcal{E}(v)(t, x) \\ - \mu_2 \operatorname{Div} \int_0^t \exp(\lambda(s-t)) \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \operatorname{grad} p(t, x) \\ = f(t, x), \quad (t, x) \in Q; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q; \quad \int_{\Omega} p(t, x) dx = 0; \quad t \in [0, T]; \\ v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega_0, \quad v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$ и $p(t, x)$ – искомые векторная и скалярная функции, означающие скорость движения и давление среды, $f(t, x)$ – плотность внешних сил, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – тензор скоростей деформаций, т.е. матрица с коэффициентами $\mathcal{E}_{ij}(v) = (1/2)(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$. Дивергенция $\operatorname{Div} \mathcal{E}(v)$ матрицы определяется как вектор с компонентами – дивергенциями строк, $S(v) = \sum_{i,j=1}^n (\partial v_i / \partial x_i)^2$, $\mu_0 > 0$, μ_2, λ – неотрицательные константы, $\mu_1(s)$ – неотрицательная непрерывно дифференцируемая при $t \geq 0$ функция. Вектор-функция $z(\tau; t, x)$ определяется как решение задачи Коши (в интегральной форме)

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega. \quad (1.3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-0008), CRDF и Минобразования.

При $\mu_1 = \mu_2 = 0$ система уравнений (1.1), (1.2) является системой уравнений Навье–Стокса, описывающей движение ньютоновских жидкостей. При $\mu_1 \neq 0, \mu_2 = 0$ в [1] для $n = 2$ установлена теорема существования и единственности сильных решений ($v \in W_2^{1,2}(Q)$) задачи (1.1), (1.2). В случае $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$ локальная теорема существования и единственности сильных решений ($v \in W_q^{1,2}(Q), q > n$) задачи (1.1), (1.2) для $n \geq 2$ установлена в [2]. Нелокальная теорема существования и единственности сильных решений ($v \in W_2^{1,2}(Q)$) установлена в [3] при $n = 2$ для регуляризованной задачи (1.1), (1.2), получающейся заменой (1.3) на регуляризованную задачу Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau S_\delta v(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau \in [0, T], \quad (t, x) \in Q. \quad (1.4)$$

Введение оператора S_δ , регуляризующего поле скоростей, объясняется тем фактом, что поле скоростей v , определяемое как слабое или сильное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) в классах функций, суммируемых с квадратом вместе с производными, не позволяет восстановить траектории z движения частиц или же траектории не обладают свойствами регулярности, необходимыми для корректности модели [3].

Нашей целью является доказательство теорем существования и единственности сильных решений регуляризованной задачи в общем случае для $n = 2$. При этом исследование начально-краевой задачи заменяется изучением эквивалентного операторного уравнения. Для операторного уравнения определяется семейство аппроксимационных уравнений. Существование решения аппроксимационного уравнения устанавливается с помощью итерационного процесса на основе результатов [2] и [1]. Решение основного операторного уравнения получается как слабый предел решений аппроксимационных уравнений.

2. Обозначения и основные результаты. Для $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n)$ обозначим $uv = u_i v_i$. Через $|u|$ будем обозначать евклидову норму вектора или матрицы. При этом здесь и далее мы применяем соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, изменяющимся от 1 до n . Мы будем использовать обычные обозначения $L_p(\Omega), L_p(Q), W_q^k(\Omega), W_q^{k,m}(Q)$ для вещественных пространств Лебега и Соболева функций на Ω и Q . При этом эти обозначения используются для скалярных, векторных или матричных функций, что понятно из контекста. Обозначим через (u, v) скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ для функций $u, v \in L_2(\Omega)$. Норма функции u в $L_2(\Omega), L_2(Q), W_2^k(\Omega), W_2^{k,m}(Q)$ в каждом из пространств обозначается соответственно символом $|u|_0, \|u\|_0, |u|_k, \|u\|_{k,m}$. Пусть $D(\Omega)$ – множество функций класса C^∞ с компактным носителем в Ω и $D_s(\Omega) = \{u \in D(\Omega) : \operatorname{div} u = 0\}$. Обозначим через H замыкание $D_s(\Omega)$ в норме пространства $L_2(\Omega)$ и через V – замыкание $D_s(\Omega)$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)$. При этом норма $\|u\|_V$ функции в пространстве V определяется равенством $\|u\|_V = |u|_1$. Обозначим через $\mathcal{P}$ ортопроектор в $L_2(\Omega)$ на H . Пусть $\dot{W}_2^1(\Omega)$ – замыкание $D(\Omega)$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)$. Пусть

$$W = L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap H \cap \dot{W}_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0, T; H)$$

с нормой $\|\cdot\|_{1,2}$.

Рассмотрим в H линейный неограниченный оператор A , определенный на области определения $D(A) = W_2^2(\Omega) \cap H \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ формулой $Av = -\mathcal{P}\Delta v$. Оператор A является (см. [4; гл. 2, раздел 4, с. 54]) положительно определенным самосопряженным оператором. Определим регуляризатор как $S_\delta v = (I + \delta A)^{-1}v \equiv \hat{v}$, $\delta > 0$, и рассмотрим задачу Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau \hat{v}(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau \in [0, T], \quad (t, x) \in Q. \quad (2.1)$$

Нас будет интересовать разрешимость задачи (1.1), (1.2), в которой z является решением задачи Коши (2.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Решением задачи (1.1), (1.2), (2.1) называется пара функций (v, p) , $v \in W_2^{1,2}(Q_T)$, $p \in W_2^{0,1}(Q_T)$, удовлетворяющая при п.в. (t, x) уравнениям (1.1) и условиям (1.2).*

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть $f \in L_2(0, T; H)$, $v^0 \in V$, а $\mu_1(s)$ такова, что*

$$\mu_1(s) + 2\mu_1'(s) \geq 0, \quad s \geq 0, \quad s|\mu_1(s)| \leq M, \quad s \geq a > 0. \quad (2.2)$$

Тогда задача (1.1), (1.2), (2.1) имеет решение.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть выполняются условия теоремы 2.1. Пусть область Ω выпукла. Тогда решение задачи (1.1), (1.2), (2.1) единственно.*

Далее говоря о решении задачи (1.1), (1.2), (2.1) мы будем, как обычно, иметь в виду соленоидальную часть v пары (v, p) . При этом p находится через v стандартным образом (см., например, [5; гл. 3, раздел 1, с. 214]).

Для доказательства теоремы 2.1 рассмотрим вспомогательное семейство зависящих от параметра $\varepsilon \geq 0$ аппроксимирующих задач

$$v_t + \mathcal{P}D_\varepsilon(v) + \mu_0 Av + B(v) + C(v) = F, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (2.3)$$

$$v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega_0, \quad v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega; \quad (2.4)$$

$$F = C(v) + f; \quad B(v) = -\mathcal{P} \operatorname{Div}(\mu_1(S(v(t, x)))\mathcal{E}(v)(t, x));$$

$$C(v) = -\mu_2 \mathcal{P} \operatorname{Div} \int_0^t \exp(\lambda(s-t))\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds;$$

$$D_\varepsilon(v) = v_i(1 + \varepsilon|v|^2)^{-1} \frac{\partial v}{\partial x_i},$$

z – решение задачи Коши (2.1). Очевидно, при $\varepsilon = 0$ получается исходная задача в операторной форме.

ТЕОРЕМА 2.3. *При любом $\varepsilon > 0$ задача (2.3), (2.4) имеет решение $v^\varepsilon \in W$, для которого справедливо неравенство*

$$\|v\|_{1,2} \leq M, \quad M \neq M(\varepsilon). \quad (2.5)$$

Существование решения задачи (1.1), (1.2), (2.1) устанавливается с помощью предельного перехода в (2.3) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Доказательство теорем 2.2, 2.1 и 2.3 проводится

в пунктах 4, 6 и 5 соответственно. В п. 3 приводятся необходимые свойства решения задачи Коши (2.1). Возникающие в цепочках неравенств константы, не зависящие от существенных параметров, будем обозначать через M . Кроме того, мы без ограничения общности для простоты полагаем $\lambda = 0$, $\mu_0 = \mu_2 = 1$, что не влияет на результаты.

3. Свойства решений задачи Коши. Рассмотрим задачу Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau \in [0, T], \quad (t, x) \in Q. \quad (3.1)$$

Под *решением задачи (3.1)* будем понимать непрерывную по совокупности переменных функцию $z(\tau; t, x)$, удовлетворяющую (3.1). Обозначим через u_x матрицу Якоби вектор-функции $u(x)$, через u_{xx} – тензор, состоящий из вторых производных от координат вектор-функции $u(x)$, а через $|u_x|_0^2$ и $|u_{xx}|_0^2$ – сумму квадратов $L_2(\Omega)$ -норм первых и вторых производных соответственно.

ЛЕММА 3.1 (см. [2]). Пусть $v \in L_1(0, T; C^1(\Omega))$. Тогда задача Коши (3.1) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$|z_x(\tau; t, x)| \leq M \exp \left(\left| \int_t^\tau \|v(s, x)\|_{C^1(\Omega)} ds \right| \right), \quad \tau, t \in [0, T]. \quad (3.2)$$

Пусть $v \in V$. Тогда справедливо неравенство

$$\|\widehat{v}\|_{C^1(\Omega)} \leq M|v|_1. \quad (3.3)$$

Действительно, для области определения $D(A^{-\delta})$ оператора $A^{-\delta}$ имеет место непрерывное вложение $D(A^{-\delta}) \subset W_2^{2\delta}(\Omega)$ (см. [6; гл. 4, раздел 16, с. 329]). Это же справедливо и для оператора $\tilde{A} = (I + \delta A)^{-1}$. Отсюда и из непрерывности вложения $W_2^\sigma(\Omega) \subset C^1(\Omega)$ при $2 < \sigma$ (см. [7; гл. 4, раздел 6, с. 408]) имеем

$$\|\widehat{v}\|_{C^1(\Omega)} = \|\tilde{A}^{-1}v\|_{C^1(\Omega)} \leq \|\tilde{A}^{-3/2}\tilde{A}^{1/2}v\|_{C^1(\Omega)} \leq M|\tilde{A}^{1/2}v|_0 \leq M|A^{1/2}v|_0 \leq M|v|_1.$$

Неравенство (3.3) установлено.

Из леммы 3.1 и (3.3) вытекает

ЛЕММА 3.2. Пусть $v \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap V)$. Тогда задача Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau \widehat{v}(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega, \quad (3.4)$$

однозначно разрешима и при всех $\tau, t \in [0, T]$ справедлива оценка

$$\|z_x(\tau; t, x)\|_{C(\Omega)} \leq M_1 \exp(M_2\|v\|_{0,1}). \quad (3.5)$$

Пусть $z(\tau; t, x)$ решение задачи Коши (3.4). Если $v \in L_2(0, T; V \cap C^1(\Omega))$, то $\operatorname{div} v(t, x) = 0$ при п.в. (t, x) . Следовательно, $\det z_x(\tau; t, x) = 1$ и функция $y = z(\tau; t, x)$ определяет диффеоморфизм Ω на Ω . При этом справедлива легко доказываемая

ЛЕММА 3.3. Пусть $g(x) \in L_2(\Omega)$, $z(\tau; t, x)$ – решение задачи Коши (3.4) для $v \in L_2(0, T; V \cap C^1(\Omega))$. Тогда $g(z(\tau; t, x)) \in L_2(\Omega)$ при п.в. τ, t и $|g(z(\tau; t, x))|_0 = |g(x)|_0$.

ЛЕММА 3.4. Пусть $v^\varepsilon \in W$, $\varepsilon \geq 0$, причем

$$\|v^\varepsilon\|_{1,2} \leq M. \quad (3.6)$$

Тогда множество $z^\varepsilon(\tau; t, x)$ решений задач Коши

$$z^\varepsilon(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau \widehat{v}^\varepsilon(s, z^\varepsilon(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega, \quad (3.7)$$

компактно в $C(\widehat{Q})$, $\widehat{Q} = \{(\tau, t, x) : [0, T] \times [0, T] \times \Omega\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разрешимость задачи (3.7) следует из леммы 3.2. Из оценки (3.5) вытекает, что $\|z_x^\varepsilon(\tau; t, x)\|_{C(\widehat{Q})} \leq M$. Далее, отсюда и из очевидного соотношения $z_\tau^\varepsilon(\tau; t, x) = \widehat{v}^\varepsilon(\tau, z^\varepsilon(\tau; t, x))$ следует, что при п.в. τ и всех t выполнено $\|z_\tau^\varepsilon(\tau; t, x)\|_{C(\Omega)} \leq M|v^\varepsilon(\tau, x)|_1$. Дифференцируя при п.в. t в (3.7), имеем

$$z_t^\varepsilon(\tau; t, x) = -\widehat{v}^\varepsilon(t, x) + \int_t^\tau \widehat{v}_x^\varepsilon(s, z^\varepsilon(s; t, x)) z_t^\varepsilon(s; t, x) ds.$$

Отсюда следует, что при п.в. t и всех τ

$$\|z_t^\varepsilon(\tau; t, x)\|_{C(\Omega)} \leq M \left(|v^\varepsilon(t, x)|_1 + \left| \int_t^\tau |v^\varepsilon(s, x)|_1 \|z_t^\varepsilon(s; t, x)\|_{C(\Omega)} ds \right| \right).$$

Из последнего интегрального неравенства следует, что

$$\|z_t^\varepsilon(\tau; t, x)\|_{C(\Omega)} \leq M|v^\varepsilon(t, x)|_1 \exp \left(M \int_0^T |v^\varepsilon(s, x)|_1 ds \right).$$

Из оценок производных z^ε вытекает равностепенная непрерывность по совокупности переменных функций z^ε . Для этого достаточно рассмотреть соответствующие разности и оценить их с помощью этих неравенств. Равномерная ограниченность очевидна. Утверждение леммы теперь следует из теоремы Арцела–Асколи (см. [8; гл. 3, раздел 2, с. 125]).

4. Доказательство теоремы 2.3. Рассмотрим задачу

$$L_\varepsilon(v) \equiv v_t^\varepsilon + \mathcal{P}D_\varepsilon(v^\varepsilon) + Av^\varepsilon + B(v^\varepsilon) = F, \quad (4.1)$$

$$v^\varepsilon(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega; \quad v^\varepsilon(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (4.2)$$

В [1] была установлена разрешимость задачи (4.1), (4.2). Сформулируем этот результат в удобной для нас форме.

ЛЕММА 4.1. Пусть $F \in L_2(0, T; H)$, $v^0 \in V$ и $\mu_1(s)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ задача (4.1), (4.2) имеет единственное решение $v^\varepsilon \in W$ и справедлива оценка

$$\max_{0 \leq s \leq t} |v^\varepsilon(s, x)|_0^2 + \int_0^t |v^\varepsilon(s, x)|_1^2 ds \leq C_1 \left(|v^0|_0^2 + \int_0^t |F(s, x)|_1^2 ds \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.3)$$

с константой C_1 , не зависящей от t, ε, F, v_0 , и оценка

$$\|v^\varepsilon\|_{1,2} \leq \psi(\|v^\varepsilon\|_{0,1})(|v^0|_1 + \|F\|_0), \quad (4.4)$$

где $\psi(s) > 0$ – некоторая монотонно возрастающая по $s \geq 0$ функция.

Очевидно, из (4.3) и (4.4) следует, что $\|v^\varepsilon\|_{1,2}$ оценивается некоторым числом, зависящим от $|v^0|_1$ и $\|F\|_0$, но нам важен именно вид (4.4).

Воспользуемся этим для доказательства разрешимости задачи (2.3), (2.4). Построим последовательные приближения v^{n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$L_\varepsilon(v^{n+1}) = f + \mathcal{P} \operatorname{Div} \int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds, \quad (4.5)$$

$$v^{n+1}(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega_0; \quad v^{n+1}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (4.6)$$

Здесь $v^0(t, x) \equiv v^0(x)$ задано, а $z^n(\tau; t, x)$ – решение задачи Коши

$$z^n(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau \hat{v}^n(s, z^n(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (4.7)$$

ЛЕММА 4.2. При любом n задача (4.5), (4.6) имеет единственное решение $v^{n+1} \in W$ и справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq s \leq t} |v^{n+1}(s, x)|_0^2 + \int_0^t |v^{n+1}(s, x)|_1^2 ds \\ & \leq C_2(|v^0|_0^2 + \int_0^t |f(s, x)|_0^2 ds + \int_0^t \int_0^s |v^n(\tau, x)|_1^2 d\tau ds), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (4.8)$$

с не зависящей от t и ε константой C_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in W$, $z(\tau; t, x)$ – решение задачи Коши (2.1). Тогда координата σ_j вектора $\operatorname{Div} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))$ имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{E}_{ij}(v)((s, z(s; t, x))) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} v_j(s, z(s; t, x)) + \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} v_i(s, z(s; t, x)) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} z_k(s; t, x). \end{aligned}$$

Из лемм 3.2 и 3.3 вытекает, что

$$\begin{aligned} |\operatorname{Div} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))|_0 &\leq M \max_j |\sigma_j|_0 \\ &\leq M |v(s, x)|_2 \|z_x(s, t, x)\|_{C(\Omega)} \leq M |v(s, x)|_2 \exp(M \|v\|_{0,1}). \end{aligned}$$

Таким образом, если $v \in W$, то

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \operatorname{Div} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \right\|_0 &\leq \left\| \int_0^t |\operatorname{Div} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))|_0 ds \right\|_{L_2(0,T)} \\ &\leq M \exp(M \|v\|_{0,1}) \left\| \int_0^t |v(s, x)|_2 ds \right\|_{L_2(0,T)} \\ &\leq M \|v\|_{0,2} \exp(M \|v\|_{0,1}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Из последнего неравенства следует, что для $v^n \in W$ правая часть уравнения (4.5) принадлежит $L_2(0, T; H)$ и в силу леммы 4.1 задача (4.5), (4.6) имеет единственное решение $v^{n+1} \in W$.

Установим оценку (4.8). Умножая (4.5) скалярно в H на $v^{n+1}(t, x)$, проводя стандартные рассуждения с использованием монотонности оператора B и ортогональности $D_\varepsilon(v)$ и v (см. [1]), получаем, что

$$\begin{aligned} & |v^{n+1}(t, x)|_0^2 + \int_0^t |v^{n+1}(s, x)|_1^2 ds \\ & \leq M \left(|v^0|_0^2 + \int_0^t |f(s, x)|_0 |v^{n+1}(s, x)|_0 ds \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t \int_0^s |\mathcal{E}(v^n)(\tau, z^n(\tau; t, x))|_0 d\tau |\mathcal{E}(v^{n+1})(s, x)|_0 ds \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Пользуясь леммой 3.3, имеем при произвольном $\gamma > 0$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^s |\mathcal{E}(v^n)(\tau, z^n(\tau; t, x))|_0 d\tau |\mathcal{E}(v^{n+1})(s, x)|_0 ds \\ & \leq M \int_0^t \int_0^s |v^n(\tau, x)|_1 d\tau |v^{n+1}(s, x)|_1 ds \\ & \leq \gamma \int_0^t |v^{n+1}(s, x)|_1^2 ds + C(\gamma) \int_0^t \int_0^s |v^n(\tau, x)|_1^2 d\tau ds; \\ & \int_0^t |f(s, x)|_0 |v^{n+1}(s, x)|_0 ds \leq \gamma \int_0^t |v^{n+1}(s, x)|_1^2 ds + C(\gamma) \|f\|_0^2. \end{aligned}$$

Выбирая γ достаточно малым, получаем отсюда и из (4.10) неравенство (4.8). Лемма 4.2 доказана.

ЛЕММА 4.3. *В условиях леммы 4.2 для решений $v^{n+1} \in W$ задач (4.5), (4.6) справедлива оценка*

$$\max_{0 \leq t \leq T} |v^{n+1}|_0^2 + \|v^{n+1}\|_{0,1}^2 \leq C_3 \quad (4.11)$$

с не зависящей от n и ε константой C_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $a_k(t) = \int_0^t |v^k(s, x)|_1^2 ds$. Тогда из (4.8) следует, что $a_{n+1}(t) \leq C_3 + C_2 \int_0^t a_n(s) ds$. Используя последовательно это неравенство и полагая $C_3 = C_2(\|F\|_0 + |v^0|_1^2)$, получаем, что

$$a_{n+1}(t) \leq C_3 \sum_{k=0}^{n-1} C_2^k \frac{t^k}{k!} + |v^0|_1 C_2^n \frac{t^n}{n!} \leq C_4,$$

где C_4 не зависит от n . Отсюда следует (4.11). Лемма 4.3 доказана.

ЛЕММА 4.4. *Для решений $v^{n+1} \in W$ задачи (4.5), (4.6) при любом n справедлива оценка*

$$\|v^{n+1}(t, x)\|_{1,2} \leq C_5 \quad (4.12)$$

с не зависящей от n и ε константой C_5 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.5), (4.5), (4.4), (4.9) и (4.11) следует, что

$$\begin{aligned} \|v^{n+1}\|_{1,2} &\leq \psi(\|v^{n+1}\|_{0,1}) \left(|v^0|_1 + \|f\|_0 + \left\| \int_0^t \operatorname{Div} \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds \right\|_0 \right) \\ &\leq \psi(C_3)(|v^0|_1 + \|f\|_0 + M \left\| \int_0^t |v^n(s, x)|_2 \|z_x^n(s; t, x)\|_{C(\Omega)} ds \right\|_{L_2(0,T)}) \\ &\leq \psi(C_3)(|v^0|_1 + \|f\|_0 + MT\|v^n\|_{0,2}) \leq C_6 + TC_7\|v^n\|_{0,2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Здесь нормы берутся по множеству $Q = [0, T] \times \Omega$. Очевидно, (4.13) справедливо и для $Q_1 = [0, T_0] \times \Omega$ (при $0 < T_0 \leq T$) с теми же константами. Пусть $T_0 = 1/2C_7$. Тогда из (4.13) следует

$$\|v^{n+1}\|_{L_2(0,T_0;W_2^2(\Omega))} + \|v^{n+1}\|_{W_2^1(0,T_0;H)} \leq C_6 + \frac{1}{2}\|v^n\|_{L_2(0,T_0;W_2^2(\Omega))}.$$

Отсюда легко следует равномерная по n оценка $\|v^{n+1}\|_{L_2(0,T_0;W_2^2(\Omega))} \leq C_8$. Из двух последних неравенств вытекает равномерная по n и ε оценка

$$\|v^{n+1}\|_{L_2(0,T_0;W_2^2(\Omega))} + \|v^{n+1}\|_{W_2^1(0,T_0;H)} \leq C_9. \quad (4.14)$$

Покажем, что аналогичная оценка справедлива и для $Q_2 = [T_0, 2T_0] \times \Omega$ (при $2T_0 \leq T$). Пусть $t \in [T_0, 2T_0]$. Перепишем (4.5), (4.6) в виде

$$L_\varepsilon(v^{n+1}) = f_1(t, x) + \mathcal{P} \operatorname{Div} \int_{T_0}^t \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds; \quad (t, x) \in Q_2; \quad (4.15)$$

$$v^{n+1}(T_0, x) = v^1(x), \quad x \in \Omega; \quad v^{n+1}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [T_0, 2T_0] \times \partial\Omega, \quad (4.16)$$

$$f_1(t, x) = f(t, x) + \mathcal{P} \operatorname{Div} \int_0^{T_0} \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds; \quad v^1(x) = v^{n+1}(T_0, x).$$

Из оценок (3.5), (4.9), (4.11) вытекает, что для $t \in [T_0, 2T_0]$

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{P} \operatorname{Div} \int_0^{T_0} \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds \right\|_{L_2(Q_1)}^2 \\ &\leq M \left\| \int_0^{T_0} |v^n(s, x)|_2 \|z_x^n(s; t, x)\|_{C(\Omega)} ds \right\|_{L_2(T_0, 2T_0)}^2 \\ &\leq M \int_{T_0}^{2T_0} \left(\int_0^{T_0} |v^n(s, x)|_2 ds \right)^2 dt \leq MT_0 \|v^n(s, x)\|_{L_2(0,T_0;W_2^2(\Omega))}^2 \leq M. \end{aligned}$$

Таким образом, $f_1 \in L_2(Q_2)$ и в силу (4.14)

$$\|f_1\|_{L_2(Q_2)} \leq \|f\|_0 + M\|v^n(s, x)\|_{L_2(0,T_0;W_2^2(\Omega))} \leq M. \quad (4.17)$$

Из неравенства $\sup_t |v(t, x)|_1 \leq M\|v\|_{1,2}$, $v \in W$ (см. [9]), следует, что

$$|v^{n+1}(T_0, x)|_1 \leq M\|v^{n+1}\|_{L_2(0,T_0;W_2^2(\Omega)) \cap W_2^1(0,T_0;H)} \leq M \quad (4.18)$$

с не зависящей от n и ε константой.

Задача (4.15), (4.16) заменой переменной $t = t' + T_0$ сводится к задаче (4.5), (4.6) на $[0, T_0]$. Поэтому для нее в силу оценок (4.17), (4.18) и (4.14) справедливо неравенство

$$\|v^{n+1}\|_{L_2(T_0, 2T_0; W_2^2(\Omega))} + \|v^{n+1}\|_{W_2^1(T_0, 2T_0; H)} \leq C_{10}.$$

Такие же оценки справедливы и для $[2T_0, 3T_0]$, $[3T_0, 4T_0]$ и т.д. Из этих оценок следует неравенство (4.12).

Вернемся к задаче (4.5), (4.6). Мы установили, что при любом n задача (4.5), (4.6) имеет единственное решение $v^{n+1} \in W$ и справедлива оценка (4.12). Это означает, что множество $\{v^{n+1}\}$ является слабо компактным в W . Без ограничения общности можно считать, что v^n слабо сходится в W к некоторой $v^\varepsilon \in W$. Умножим (4.5) в $L_2(0, T; H)$ скалярно на гладкую и финитную по (t, x) функцию $\varphi(t, x)$ и проинтегрируем по частям. Мы получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\mathcal{E}(v^{n+1})(t, x), \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) dt + \int_0^T (D_\varepsilon(v^{n+1})(t, x), \varphi(t, x)) dt \\ & + \int_0^T (v_t^{n+1}(t, x), \varphi(t, x)) dt \\ & + \int_0^T (\mu_1(S(v^{n+1})(t, x))\mathcal{E}(v^{n+1})(t, x), \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) dt \\ & = \int_0^T (f(t, x), \varphi(t, x)) dt - \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v^n)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) dt. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Рассмотрим задачу Коши (4.7). Умножив (4.7) скалярно в $L_2(0, T; H)$ на гладкую и финитную по x функцию $\varphi(x)$, получим

$$\int_\Omega z^n(\tau, t; x)\varphi(x) dx = \int_\Omega x\varphi(x) dx + \int_t^\tau \int_\Omega \widehat{v}^n(s, z^n(s; t, x))\varphi(x) dx ds. \quad (4.20)$$

Сделаем в последнем выражении замену переменной $x = z^n(t; s, y)$, имеем

$$\int_\Omega z^n(\tau, t; x)\varphi(x) dx = \int_\Omega x\varphi(x) dx + \int_t^\tau \int_\Omega \widehat{v}^n(s, y)\varphi(z^n(t; s, y)) dy ds.$$

Принимая во внимание равномерную сходимость z^n к z и слабую сходимость v^n к v^ε в $L_2(0, T; V)$, получаем, что

$$\int_\Omega z^\varepsilon(\tau, t; x)\varphi(x) dx = \int_\Omega x\varphi(x) dx + \int_t^\tau \int_\Omega \widehat{v}^\varepsilon(s, y)\varphi(z^\varepsilon(t; s, y)) dy ds.$$

Из равномерной сходимости z^n к z и тождества $z^n(s; t, z^n(t; s, x)) = x$ следует, что $z^\varepsilon(s; t, z^\varepsilon(t; s, x)) = x$. Таким образом, преобразования $z^\varepsilon(t; s, y)$ и $z^\varepsilon(s; t, x)$ области Ω являются взаимно обратными. Делая выше в последнем интеграле замену переменных $y = z^\varepsilon(t; s, x)$ и учитывая произвольность φ , получаем, что

$$z^\varepsilon(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau \widehat{v}^\varepsilon(s, z^\varepsilon(s; t, x)) ds. \quad (4.21)$$

Обозначим последний интеграл в (4.19) через I^n . С помощью замены переменной $x = z^n(t; s, y)$ и леммы 3.3 получаем

$$\begin{aligned} I^n &= \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)), \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) ds dt \\ &= \int_0^T \int_0^t \int_\Omega (\mathcal{E}(v^n)(s, y) \mathcal{E}(\varphi)(t, z^n(t; s, y))) dy ds dt. \end{aligned}$$

Из слабой сходимости v^n к v^ε в W и из равномерной сходимости z^n к z^ε вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I^n = \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \mathcal{E}(v^\varepsilon)(s, y) \mathcal{E}(\varphi)(t, z^\varepsilon(t; s, y)) dy ds dt. \quad (4.22)$$

Сделаем в (4.22) замену переменной $y = z^\varepsilon(s; t, x)$, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I^n = \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \mathcal{E}(v)^\varepsilon(s, z^\varepsilon(s; t, x)) \mathcal{E}(\varphi)(t, x) dx ds dt. \quad (4.23)$$

Используя (4.23) и делая в остальных слагаемых в (4.19) предельный переход как в [1], имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^T (v_t^\varepsilon(t, x), \varphi(t, x)) dt + \int_0^T (D_\varepsilon(v^\varepsilon)(t, x), \varphi(t, x)) dt \\ &\quad + \int_0^T (\mathcal{E}(v^\varepsilon)(t, x), \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) dt + \int_0^T (\mu_1(S(v^\varepsilon)) \mathcal{E}(v^\varepsilon)(t, x), \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) dt \\ &= \int_0^T (f(t, x), \varphi(t, x)) dt - \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v^\varepsilon)(s, z^\varepsilon(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) dt. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Воспользовавшись тем, что при фиксированных s и t функция $z(s; t, x)$ имеет непрерывные производные по x_i в Ω , проинтегрируем в (4.24) по частям и перебросим производные с φ на содержащие v^ε сомножители. Используя затем произвольность φ , получаем, что v^ε является решением задачи (4.1), (4.2). Теорема 2.3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы 2.3 следует, что для решения v^ε задачи (4.1), (4.2) справедлива равномерная по $\varepsilon > 0$ оценка

$$\|v^\varepsilon\|_{1,2} \leq M. \quad (4.25)$$

5. Доказательство теоремы 2.1. Пусть v^ε – решение (2.3), (2.4). Умножим равенство (2.3) скалярно в $L_2(0, T; H)$ на гладкую и финитную по (t, x) функцию $\varphi(t, x)$ и проинтегрируем по частям. Мы получим

$$\begin{aligned} &\int_0^T (v_t^\varepsilon(t, x), \varphi(t, x)) dt + \int_0^T (\mathcal{E}(v^\varepsilon)(t, x), \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) dt \\ &\quad + \int_0^T (D_\varepsilon(v^\varepsilon)(t, x), \varphi(t, x)) dt + \int_0^T (\mu_1(S(v^\varepsilon))(t, x) \mathcal{E}(v^\varepsilon)(t, x), \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) dt \\ &= \int_0^T (f(t, x), \varphi(t, x)) dt - \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v^\varepsilon)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) dt. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Из (4.25) вытекает, что множество v^ε является слабо компактным в гильбертовом пространстве W . Без ограничения общности можно считать, что существует последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ (будем считать $\varepsilon_n = \varepsilon$), для которой v^ε слабо сходится в W к некоторой v . В [1] показано, что в пределе левая часть (5.1) дает левую часть (5.1) с заменой v^ε на v и $D_\varepsilon(v^\varepsilon)$ на $D_0(v)$.

Рассмотрим правую часть (5.1). Сделаем замену $x = z^\varepsilon(t; s, y)$ во втором слагаемом:

$$\begin{aligned} Q^\varepsilon &\equiv \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v^\varepsilon)(s, z(s; t, x)), \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) ds dt \\ &= \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \mathcal{E}(v^\varepsilon)(s, y) \mathcal{E}(\varphi)(t, z^\varepsilon(t; s, y)) dy ds dt. \end{aligned}$$

Так же, как при доказательстве сходимости z^n к z^ε , показывается, что $z^\varepsilon(\tau; t, x)$ равномерно сходится к $z(\tau; t, x)$ – решению задачи (2.1). Переходя к пределу так же, как при доказательстве теоремы 2.3 в аналогичных слагаемых, имеем

$$Q = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} Q^\varepsilon = \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \mathcal{E}(v)(s, y) \mathcal{E}(\varphi)(t, z(t; s, y)) dy ds dt.$$

Делая замену $y = z(s; t, x)$ и интегрируя по частям, получаем, что

$$Q = - \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \text{Div } \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) \varphi(t, x) ds dt.$$

Итак, с помощью предельного перехода получено тождество

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\text{Div } \mathcal{E}(v)(t, x), \varphi(t, x)) dt + \int_0^T (D_0(v)(t, x), \varphi(t, x)) dt \\ & + \int_0^T (v_t(t, x), \varphi(t, x)) dt + \int_0^T (\mu_1(S(v(t, x))) \mathcal{E}(v)(t, x), \mathcal{E}\varphi(t, x)) dt \\ & = \int_0^T (f(t, x), \varphi(t, x)) dt + \int_0^T \int_0^t (\text{Div } \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \varphi(t, x)) dt. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Включения $v \in W$ и $\int_0^t \text{Div } \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \in L_2(0, T; H)$ позволяют так же, как и в [1], получить соотношение

$$\begin{aligned} & \int_0^T ((\mu_1(S(v(t, x))) \mathcal{E}(v)(t, x), \mathcal{E}\varphi(t, x)) dt \\ & = - \int_0^T (\text{Div } \mu_1(S(v(t, x))) \mathcal{E}(v)(t, x), \varphi(t, x)) dt. \end{aligned}$$

Подставляя полученное соотношение в (5.2) и пользуясь произвольностью φ , получаем, что v является решением задачи (1.1), (1.2), (2.1). Существование решения задачи (1.1), (1.2), (2.1) доказано. Теорема 2.1 доказана.

6. Доказательство теоремы 2.2. Предположим, что существуют два решения $v^1(t, x), v^2(t, x) \in W$ задачи (1.1), (1.3), (2.1). Тогда для $w = v^1 - v^2$ справедливо соотношение

$$w_t + Aw + B(v^1) - B(v^2) = C(v^2) - C(v^1) + \mathcal{P}D_0(v^2) - \mathcal{P}D_0(v^1), \quad w(0, x) = 0. \quad (6.1)$$

Умножая (6.1) скалярно в H на w , имеем

$$(w_t, w) + (\mathcal{E}(w), \mathcal{E}(w)) + (B(v^1) - B(v^2), v^1 - v^2) = Z_1 + Z_2, \quad (6.2)$$

$$Z_1 = (C(v^2) - C(v^1), w), \quad Z_2 = (\mathcal{P}D_0(v^2) - \mathcal{P}D_0(v^1), w). \quad (6.3)$$

Пользуясь монотонностью оператора B и проводя стандартные выкладки (см. [10; гл. 4, раздел 6.5, с. 209]), получаем отсюда, что

$$\frac{d}{dt} |w(t, x)|_0^2 + |w(t, x)|_1^2 \leq M(|Z_1| + |Z_2|). \quad (6.4)$$

Оценим правую часть (6.4). Пусть $b(u, v, w) = \int_{\Omega} u_i \partial v_j / \partial x_i w_j dx$ – трилинейная форма на вектор-функциях u, v, w . Так как $b(v, w, w) = 0$ (см. [5; гл. 2, раздел 1, с. 133]), то

$$Z_2 = b(v^2, v^2, w) - b(v^1, v^1, w) = -b(w, v^2, w).$$

С помощью оценки формы $b(u, v, w)$ (см. [5; гл. 2, раздел 1, с. 234]) и неравенства $\sup_t |v(t, x)|_1 \leq M \|v\|_{1,2}$ (см. [9]) получаем

$$|Z_2| = |b(w, v^2, w)| \leq M |w(t, x)|_0 |w(x, t)|_1 |v^2(t, x)|_1 \leq M |w(t, x)|_0 |w(x, t)|_1. \quad (6.5)$$

С помощью элементарных преобразований имеем

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int_0^t (\mathcal{E}(v^2)(s, z^2(s; t, x)) - \mathcal{E}(v^1)(s, z^1(s; t, x)), \mathcal{E}(w)(t, x)) ds \\ &= \int_0^t (\mathcal{E}(v^2)(s, z^2(s; t, x)) - \mathcal{E}(v^1)(s, z^2(s; t, x)), \mathcal{E}(w)(t, x)) ds \\ &\quad - \int_0^t (\mathcal{E}(v^1)(s, z^2(s; t, x)) - \mathcal{E}(v^1)(s, z^1(s; t, x)), \mathcal{E}(w)(t, x)) ds = Z_{11} + Z_{12}. \end{aligned}$$

С помощью замены переменной $x = z^2(t; s, y)$ и леммы 3.3 получаем

$$|Z_{11}| \leq M \int_0^t |v^2(s, x) - v^1(s, x)|_1 ds |w(t, x)|_1 = M \int_0^t |w(s, x)|_1 ds |w(t, x)|_1. \quad (6.6)$$

Рассмотрим Z_{12} . Из формулы Ньютона–Лейбница следует, что

$$\begin{aligned} &v_x^1(s, z^1(s; t, x)) - v_x^1(s, z^2(s; t, x)) \\ &= \int_0^1 v_{xx}^1(s, \alpha z^1(s; t, x) + (1 - \alpha)z^2(s; t, x)) (z^1(s; t, x) - z^2(s; t, x)) d\alpha. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Воспользовавшись (6.7), имеем

$$\begin{aligned} |Z_{12}| &\leq M \int_0^t |\widehat{v}_x^1(s, z^1(s; t, x)) - \widehat{v}_x^1(s, z^2(s; t, x))|_0 ds |w(t, x)|_1 \\ &\leq M \int_0^t \int_0^1 |\widehat{v}_{xx}^1(s, y(s, t, x, \alpha)) \widetilde{z}(s; t, x)|_0 d\alpha ds |w(t, x)|_1 \\ &\leq M \sum_{i,j,k=1}^2 \int_0^t \int_0^1 \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} \widehat{v}_j^1(s, y(s, t, x, \alpha)) \right|^2 dx \right)^{1/2} d\alpha \\ &\quad \times \|\widetilde{z}(s; t, x)\|_{C(\Omega)} ds |w(t, x)|_1. \end{aligned}$$

Так как область Ω выпукла, то при фиксированных s и t преобразование

$$y = y(s, t, x, \alpha) = \alpha z^1(s; t, x) + (1 - \alpha) z^2(s; t, x)$$

отображает область Ω в себя, при этом $\partial\Omega$ неподвижна.

ЛЕММА 6.1. *При достаточно малом $t_* > 0$ и всех $0 \leq s \leq t \leq t_*$ и $\alpha \in [0, 1]$ отображение $y = y(s, t, x, \alpha)$ является диффеоморфизмом Ω , и для якобианов прямого $y = y(s, t, y, \alpha)$ и обратного $x = x(s, t, y, \alpha)$ отображений справедливы неравенства*

$$0 < m_1 \leq \det y_x(s, t, x, \alpha), \quad \det y_y(s, t, x, \alpha) \leq m_2. \quad (6.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы используется тот факт, что z^i , $i = 1, 2$, являются решениями задачи Коши (2.1) для $v = \hat{v}^i$, $\hat{v}^i = (I + \delta A)^{-1} v^i$, $v^i \in W$. При этом очевидно, что

$$\begin{aligned} y(s, t, x, \alpha) &= x + \alpha \int_t^s \hat{v}^1(\tau, z^1(\tau; t, x)) d\tau + (1 - \alpha) \int_t^s \hat{v}^2(\tau, z^2(\tau; t, x)) d\tau, \\ y_x(s, t, x, \alpha) &= I + \alpha \int_t^s \hat{v}_x^1(\tau, z^1(\tau; t, x)) z_x^1(\tau; t, x) d\tau \\ &\quad + (1 - \alpha) \int_t^s \hat{v}_x^2(\tau, z^2(\tau; t, x)) z_x^2(\tau; t, x) d\tau. \end{aligned}$$

С помощью (3.3) можно показать, что при малых t_* отображения $z^1(s; t, x)$ и $z^2(s; t, x)$ близки к тождественному, а тогда и $y = y(s, t, x, \alpha)$ тоже. Это позволяет установить обратимость $y = y(s, t, x, \alpha)$ и неравенства (6.8).

Делая в интеграле по Ω замену переменной $y = y(s, t, x, \alpha)$, считая t_* малым и пользуясь оценкой (6.8) и неравенством $|\hat{u}|_0 \leq M|u|_0$, $u \in H$, получаем, что

$$\begin{aligned} |Z_{12}| &\leq M \sum_{i,j,k=1}^2 \int_0^t \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} \hat{v}_j^1(s, y) \right|^2 dy \right)^{1/2} \|\tilde{z}(s; t, x)\|_{C(\Omega)} ds |w(t, x)|_1 \\ &\leq M \int_0^t |v^1(s, x)|_2 \|\tilde{z}(s; t, x)\|_{C(\Omega)} ds |w(t, x)|_1. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Оценим $\|\tilde{z}(s; t, x)\|_{C(\Omega)}$ через $|w(x)|_1$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \tilde{z}(s; t, x) &= \int_t^s (\hat{v}^1(\tau, z^1(\tau; t, x)) - \hat{v}^2(\tau, z^1(\tau; t, x))) d\tau \\ &\quad - \int_t^s (\hat{v}^2(\tau, z^1(\tau; t, x)) - \hat{v}^2(\tau, z^2(\tau; t, x))) d\tau. \end{aligned}$$

Используя неравенство (3.3), формулу Ньютона–Лейбница, с помощью замены переменной $y = y(\tau, t, x, \alpha)$, как и при оценке (6.9), получаем, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}(s; t, x)\|_{C(\Omega)} &\leq \int_s^t \|\hat{v}^1(\tau, x) - \hat{v}^2(\tau, x)\|_{C(\Omega)} d\tau \\ &\quad + \int_s^t \|\hat{v}^2(\tau, z^1(\tau; t, x)) - \hat{v}^2(\tau, z^2(\tau; t, x))\|_{C(\Omega)} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq M \left(\int_s^t \|w(\tau, x)\|_{C(\Omega)} d\tau + \int_s^t \|\widehat{v}_x^2(\tau, x)\|_{C(\Omega)} \|\tilde{z}(\tau; t, x)\|_{C(\Omega)} d\tau \right) \\ &\leq M \left(\int_s^t |w(\tau, x)|_1 d\tau + \int_s^t |v^2(\tau, x)|_2 \|\tilde{z}(\tau; t, x)\|_{C(\Omega)} d\tau \right). \end{aligned}$$

Из последних оценок следует, что

$$\|\tilde{z}(s; t, x)\|_{C(\Omega)} \leq M \left(\int_0^t |w(\tau, x)|_1 d\tau + \int_s^t |v^2(\tau, x)|_2 \|\tilde{z}(\tau; t, x)\|_{C(\Omega)} d\tau \right).$$

Из этого интегрального неравенства вытекает, что

$$\|\tilde{z}(s; t, x)\|_{C(\Omega)} \leq m \int_0^t |w(\tau, x)|_1 d\tau, \quad m = M \exp \left(M \int_0^T |v^2(\xi, x)|_2 d\xi \right). \quad (6.10)$$

Из (6.9), (6.10) и $v \in W$ следует, что

$$|Z_{12}| \leq M \int_0^t |w(\tau, x)|_1 d\tau |w(t, x)|_1. \quad (6.11)$$

Неравенства (6.6) и (6.11) означают, что

$$|Z_1| \leq M \int_0^t |w(\tau, x)|_1 d\tau |w(t, x)|_1. \quad (6.12)$$

Неравенства (6.4), (6.5) и (6.12) влекут за собой неравенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |w(t, x)|_0^2 + |w(t, x)|_1^2 &\leq M \left(\int_0^t |w(\tau, x)|_1 d\tau |w(t, x)|_1 + |w(t, x)|_0 |w(t, x)|_1 \right) \\ &\leq C(\varepsilon) \left(\int_0^t |w(\tau, x)|_1^2 d\tau + |w(t, x)|_0^2 \right) + \varepsilon |w(t, x)|_1^2, \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно. При малом $\varepsilon > 0$ отсюда несложно получить при $t \in [0, t_*]$ интегральное неравенство

$$u(t) \leq M \int_0^t u(s) ds, \quad u(t) = |w(t, x)|_0^2 + \int_0^t |w(\tau, x)|_1^2 d\tau. \quad (6.13)$$

Отсюда вытекает, что $u(t) \equiv 0$ и, следовательно, $v^1(t, x) \equiv v^2(t, x)$ при $0 \leq t \leq t_*$.

Если $t_* = T$, то теорема 2.3 доказана. Предположим, что $t_* < T$. Обозначим $t_0 = \sup\{t_*\}$, где t_* таково, что $v^1(t, x) \equiv v^2(t, x)$ на $[0, t_*]$. Тогда последнее равенство справедливо и на $[0, t_0]$. Это следует, например, из непрерывности вложения $W \subset C(0, T; H)$. Покажем, что $t_0 = T$.

Предположим, что $t_0 < T$. Тогда $w(t, x) = 0$ при $0 \leq t \leq t_0$. Рассмотрим $w(t, x)$ при $t \geq t_0$. Покажем, что при достаточно малом $\sigma > 0$ для $t \in [t_0, t_1]$, $t_1 = t_0 + \sigma$, справедливо интегральное неравенство

$$u(t) \leq M \int_{t_0}^t u(s) ds, \quad u(t) = |w(t, x)|_0^2 + \int_{t_0}^t |w(\tau, x)|_1^2 d\tau. \quad (6.14)$$

Воспользуемся неравенством (6.4) для $w(t, x)$ и рассмотрим его при $t \geq t_0$. Оценка (6.5) для Z_2 справедлива, очевидно, и при $t \geq t_0$. Рассмотрим при $t \geq t_0$ слагаемое Z_1 . Очевидно, что

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int_0^t (\mathcal{E}(v^2)(s, z^2(s; t, x)) - \mathcal{E}(v^1)(s, z^1(s; t, x)), \mathcal{E}(w)(s, x)) ds \\ &= \int_0^{t_0} (\mathcal{E}(v^2)(s, z^2(s; t, x)) - \mathcal{E}(v^1)(s, z^1(s; t, x)), \mathcal{E}(w)(s, x)) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t (\mathcal{E}(v^2)(s, z^2(s; t, x)) - \mathcal{E}(v^1)(s, z^1(s; t, x)), \mathcal{E}(w)(s, x)) ds = \tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_1. \end{aligned}$$

Так же, как и при выводе (6.12) для Z_1 , получаем, что

$$|\tilde{Z}_1| \leq M \int_{t_0}^t |w(\tau, x)|_1 d\tau |w(t, x)|_1, \quad t_0 \leq t \leq t_1 = t_0 + \sigma, \quad (6.15)$$

где $\sigma > 0$ мало. Представим слагаемое $\tilde{Z}_2$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_2 &= \int_0^{t_0} (\mathcal{E}(v^2)(s, z^2(s; t, x)) - \mathcal{E}(v^1)(s, z^2(s; t, x)), \mathcal{E}(w)(s, x)) ds \\ &\quad + \int_0^{t_0} (\mathcal{E}(v^1)(s, z^2(s; t, x)) - \mathcal{E}(v^1)(s, z^1(s; t, x)), \mathcal{E}(w)(s, x)) ds = \tilde{Z}_{22} + \tilde{Z}_{12}. \end{aligned}$$

Так как $v^1(t, x) \equiv v^2(t, x)$ при $t \leq t_0$, то $\tilde{Z}_{22} = 0$. Из $v^1(t, x) \equiv v^2(t, x)$ при $0 \leq t \leq t_0$ вытекает, что $z^1(s; t_0, x) \equiv z^2(s; t_0, x)$. Из непрерывной зависимости решений задачи Коши от начальных данных следует, что если $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, где σ мало, то $z^1(s; t, x)$ мало отличается от $z^1(s; t_0, x)$. Поэтому из обратимости отображения $z^1(s; t, x)$ Ω на Ω вытекает обратимость выпуклой комбинации $y(s, t, x, \alpha)$ отображений $z^1(s; t, x)$ и $z^2(s; t, x)$ и оценки (6.8).

Следовательно, для слагаемого $\tilde{Z}_{12}$ точно так же, как при выводе оценки (6.11) для Z_{12} , с учетом $w(t, x) \equiv 0$ при $s < t_0$ получаем, что

$$|\tilde{Z}_{12}| \leq M \int_{t_0}^t |w(\tau, x)|_1 d\tau |w(t, x)|_1, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (6.16)$$

Из оценки (6.16) следует, что

$$|\tilde{Z}_2| \leq |\tilde{Z}_{12}| + |\tilde{Z}_{22}| \leq M \int_{t_0}^t |w(\tau, x)|_1 d\tau |w(t, x)|_1, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (6.17)$$

Принимая во внимание (6.15), (6.17), имеем

$$|Z_1| \leq |\tilde{Z}_1| + |\tilde{Z}_2| \leq M \int_{t_0}^t |w(\tau, x)|_1 d\tau |w(t, x)|_1, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (6.18)$$

Используя оценки (6.5), (6.18) для Z_1 и Z_2 при $t \in [t_0, t_1]$ так же, как и при выводе неравенства (6.13), получаем неравенство (6.14). Отсюда следует, что $w(t, x) \equiv 0$ или, что то же, $v^1(t, x) - v^2(t, x) \equiv 0$ при $t \in [t_0, t_1]$, что противоречит максимальнойности t_0 . Тем самым показано, что $v^1(t, x) \equiv v^2(t, x)$ на всем $[0, T]$. Теорема 2.3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Орлов, П. Е. Соболевский, “О гладкости обобщенных решений уравнений движения почти ньютоновской жидкости”, *Числ. методы мех. сплошн. среды*, **16**:1 (1985), 107–119.
- [2] V. P. Orlov, P. E. Sobolevskii, “On mathematical models of a viscoelasticity with a memory”, *Differential Integral Equations*, **4**:1 (1991), 103–115.
- [3] В. Т. Дмитриенко, В. Г. Звягин, “О сильных решениях начально-краевой задачи для регуляризированной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости”, *Изв. вузов. Матем.*, **508**:9 (2004), 24–40.
- [4] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, М., 1970.
- [5] Р. Темам, *Уравнение Навье–Стокса: Теория и численный анализ*, Мир, М., 1981.
- [6] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.
- [7] Х. Трибель, *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [8] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.
- [9] П. Е. Соболевский, “Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений”, *Докл. АН СССР*, **157** (1964), 52–55.
- [10] В. Г. Литвинов, *Движение нелинейно-вязкой жидкости*, Наука, М., 1982.

В. П. Орлов

Воронежский государственный университет

E-mail: orlov_vp@mail.ru, orlov@math.vsu.ru

Поступило

14.03.2007