Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Рахматуллаев, У. А. Розиков, Гиббсовские меры и марковские случайные поля с отношением I , *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 1, 94–101

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm407>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:18:36

УДК 517.98+530.1

ГИББСОВСКИЕ МЕРЫ И МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ С ОТНОШЕНИЕМ I

А. М. Рахматуллаев, У. А. Розиков

Вводятся понятия гиббсовской меры с соответствующим потенциалом с отношением I (где I – подмножество множества $\{1, 2, \dots, k\}$), марковского случайного поля с памятью I и мера с отношением I . Доказано, что эти три понятия эквивалентны.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. В конце 60-х годов в теорию вероятностей был введен новый тип стохастического процесса, названный марковским случайным полем. Такие процессы первоначально возникли в статистической физике, но понятно, что эти процессы являются естественным обобщением марковских процессов, в которых временной индекс заменен на пространственный.

Основные положения теории марковских случайных полей можно найти у Престона в [1], Лиггетта в [2], Малышева, Минлоса в [3], у Синая в [4].

Определение гиббсовской меры (на конечном подмножестве Z^V) восходит к классической работе Гиббса [5]. Марковские случайные поля (на Z^V) были впервые введены Добрушиным [6]. Известно, что на конечных графах классы марковских случайных полей и гиббсовских мер с потенциалом ближайшего соседа совпадают (см. например [1], [7]).

В книге [1] на конечном графе введены понятия гиббсовского состояния с потенциалом ближайшего соседа, марковского случайного поля, состояния ближайшего соседа и доказано, что эти три определения эквивалентны.

В настоящей статье вводятся понятия гиббсовской меры с соответствующим потенциалом с отношением I (где I – подмножество множества $\{1, 2, \dots, k\}$), марковского случайного поля с памятью I и мера с отношением I . В работе доказывается, что эти три понятия эквивалентны.

Заметим, что результат работы [1] получается в частном случае, когда $I = \{1, 2\}$.

2. Основные определения и формулировка результата. Пусть Λ – конечное множество и $P(\Lambda)$ – множество всех подмножеств этого множества.

Рассмотрим семейство функций $f_i: \underbrace{\Lambda \times \Lambda \times \dots \times \Lambda}_{i \text{ раз}} \rightarrow \{0, 1\}, i = 1, \dots, |\Lambda|$ (где $|\cdot|$ – число элементов множества), со следующими свойствами:

1. $f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_i) = f_i(x_1, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_i)$ для любых $j, k = 1, \dots, i$;
2. $f_i(x_1, x_2, \dots, x_i) = 0$, если $\exists j, k = 1, \dots, i$ такие, что $x_j = x_k$.

Заметим, что функция $f_2: \Lambda \times \Lambda \rightarrow \{0, 1\}$ определяет на Λ структуру графа, т.е. задает отношение между парами $x, y \in \Lambda$. В этом случае можно на Λ определить структуру графа, предполагая, что $x, y \in \Lambda$ соединены ребром графа, если $f_2(x, y) = 1$. Наоборот, если на Λ задана структура графа, то можно построить функцию $f_2: \Lambda \times \Lambda \rightarrow \{0, 1\}$, которая соответствует этому графу. Эту функцию можно определить следующим образом:

$$f_2(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x, y \text{ соединены ребром,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между графами и функциями f_2 .

Все остальные функции f_i , $i \neq 2$, также определяют некоторые отношения между элементами множества Λ . В этом случае будем говорить, что набор $x_1, x_2, \dots, x_i$ находится в *соотношении* f_i , если $f_i(x_1, x_2, \dots, x_i) = 1$.

Для $x \in \Lambda$ определим

$$\partial_i x = \bigcup_{\{y_1, y_2, \dots, y_{i-1}\} \subset \Lambda \setminus \{x\}: f_i(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, x) = 1} \{y_1, y_2, \dots, y_{i-1}\}.$$

Введем обозначения для $A \in P(\Lambda)$:

$$\partial_i A = \left(\bigcup_{x \in A} \partial_i x \right) \setminus A.$$

Пусть $I \subset \{1, 2, \dots, |\Lambda|\}$, где $|\cdot|$ – число элементов множества. Обозначим

$$\partial_I A = \bigcup_{i \in I} \partial_i A, \quad \partial_I x = \bigcup_{i \in I} \partial_i x.$$

Непустое подмножество $B \in P(\Lambda)$ назовем *i-симплексом*, если для любого набора $y_1, y_2, \dots, y_i \in B$ ($y_j \neq y_k$, если $j \neq k$) $f_i(y_1, y_2, \dots, y_i) = 1$.

Функция $V: P(\Lambda) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *потенциалом* на Λ , если $V(\emptyset) = 0$.

Пусть V – потенциал на Λ . Тогда функция $J_V: P(\Lambda) \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая соотношением

$$J_V(A) = \sum_{X \subset A} (-1)^{|A \setminus X|} V(X),$$

называется *потенциалом взаимодействия*, соответствующим V .

Заметим, что для любого $A \in P(\Lambda)$

$$V(A) = \sum_{B \subset A} J_V(B). \quad (1)$$

Потенциал V назовем *потенциал с отношением i*, если $J_V(A) \neq 0$, лишь когда A есть *i-симплекс*. Пусть V_i – потенциал на Λ с отношением *i*. Обозначим $V_I = \sum_{i \in I} V_i$. Этот потенциал назовем *потенциалом с отношением I*.

Заметим, что

$$J_{V_I}(A) = \sum_{X \subset A} (-1)^{|A \setminus X|} V_I(X) = \sum_{X \subset A} (-1)^{|A \setminus X|} \sum_{i \in I} V_i(X) = \sum_{i \in I} J_{V_i}(A).$$

Из этого равенства видно, что $J_{V_I}(A) = 0$, если A не является i -симплексом для любого $i \in I$.

Элементы множества $P(\Lambda)$ называются *конфигурациями*. Поскольку $P(\Lambda)$ – конечное множество, вероятностную меру на Λ можно рассматривать как функцию $\mu: P(\Lambda) \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – вещественная прямая, обладающая свойствами:

- 1) $\mu(A) > 0$ для всех $A \in P(\Lambda)$;
- 2) $\sum_{A \subset \Lambda} \mu(A) = 1$.

Пусть $M(\Lambda)$ обозначает множество всех вероятностных мер на $P(\Lambda)$.

Рассмотрим на $P(\Lambda)$ следующие вероятностные меры.

- 1) *Мера Гиббса*. Мера Гиббса на $P(\Lambda)$ с потенциалом V определяется по формуле

$$\mu(A) = Z^{-1} \exp V(A) \quad \text{для всех } A \in P(\Lambda),$$

где Z – нормирующая константа.

- 2) *Марковское случайное поле с памятью I* . Меру μ назовем марковским случайным полем с памятью I , если

- а) $\mu(A) > 0$ для любого $A \in P(\Lambda)$;
- б) пусть $x \notin A \subset \Lambda$; тогда условная вероятность (по отношению к μ) того, что конфигурация содержит x , при условии, что конфигурация на $\Lambda \setminus x$ равна A , совпадает с условной вероятностью того, что конфигурация содержит x , при условии, что конфигурация на $\partial_I x$ есть $A \cap \partial_I x$.

Пусть $\bar{A}$ – множество всех конфигураций, которые содержат x и на $\Lambda \setminus x$ (ради краткости обозначим $\{x\}$ через x) совпадают с A , т.е. $\bar{A} = \{A \cup x\}$; $\bar{B}$ – множество всех конфигураций, которые на $\Lambda \setminus x$ совпадают с A , т.е. $\bar{B} = \{A, A \cup x\}$; $\bar{A}$ – множество всех конфигураций, которые содержат x , при условии, что конфигурация на $\partial_I x$ есть $A \cap \partial_I x$, т.е.

$$\bar{A} = \bigcup_{B \subset \Lambda \setminus (x \cup \partial_I x)} \{(A \cap \partial_I x) \cup x \cup B\};$$

$\bar{\bar{B}}$ – множество всех конфигураций, которые на $\partial_I x$ совпадают с $A \cap \partial_I x$, т.е.

$$\bar{\bar{B}} = \bigcup_{B \subset \Lambda \setminus (x \cup \partial_I x)} \{(A \cap \partial_I x) \cup B, (A \cap \partial_I x) \cup x \cup B\}.$$

После введенных обозначений условие б) можно переписать в следующем виде:

$$\mu(\bar{A} | \bar{B}) = \mu(\bar{\bar{A}} | \bar{\bar{B}}),$$

т.е.

$$\frac{\mu(A \cup x)}{\mu(A \cup x) + \mu(A)} = \frac{\sum_{B \subset \Lambda \setminus (\partial_I x \cup x)} \mu((A \cap \partial_I x) \cup x \cup B)}{\sum_{B \subset \Lambda \setminus (\partial_I x \cup x)} \mu((A \cap \partial_I x) \cup x \cup B) + \mu((A \cap \partial_I x) \cup B)}. \quad (2)$$

- 3) *Мера с отношением I* . Меру μ назовем с отношением I , если

- а) $\mu(A) > 0$ для любого $A \in P(\Lambda)$;
- б) если $x \notin A \subset \Lambda$, то

$$\frac{\mu(A \cup x)}{\mu(A)} = \frac{\mu((A \cap \partial_I x) \cup x)}{\mu(A \cap \partial_I x)}.$$

Заметим, что это равенство эквивалентно равенству

$$\frac{\mu(A \cup x)}{\mu(A \cup x) + \mu(A)} = \frac{\mu((A \cap \partial_I x) \cup x)}{\mu((A \cap \partial_I x) \cup x) + \mu(A \cap \partial_I x)} \quad \text{для любого } x \notin A \subset \Lambda. \quad (3)$$

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. *Для меры $\mu \in M(\Lambda)$ следующие утверждения эквивалентны:*

- i) μ – гиббсовская мера с потенциалом V_I ;
- ii) μ – марковское случайное поле с памятью I ;
- iii) μ – мера с отношением I .

Заметим, что при $I = \{1, 2\}$ из этой теоремы следует теорема 1.1 из [1, с. 14].

3. Доказательство теоремы 1. ii) $\implies$ iii). Пусть μ – марковское случайное поле с памятью I , т.е. для любого $x \notin A \subset \Lambda$ выполняется равенство (2). Поскольку выражение в правой части равенства (2) не меняется при замене A на $A \cap \partial_I x$, получим, что выполняется равенство (3), т.е. μ является мерой с отношением I .

iii) $\implies$ ii). Пусть μ мера с отношением I . Тогда для $x \notin A \subset \Lambda$ и $B \subset \Lambda \setminus (\partial_I x \cup x)$ получим

$$\begin{aligned} \frac{\mu(((A \cap \partial_I x) \cup B) \cup x)}{\mu((A \cap \partial_I x) \cup B)} &= \frac{\mu((((A \cap \partial_I x) \cup B) \cap \partial_I x) \cup x)}{\mu(((A \cap \partial_I x) \cup B) \cap \partial_I x)} \\ &= \frac{\mu((A \cap \partial_I x) \cap \partial_I x \cup (B \cap \partial_I x) \cup x)}{\mu(((A \cap \partial_I x) \cap \partial_I x) \cup (B \cap \partial_I x))} = \frac{\mu((A \cap \partial_I x) \cup x)}{\mu(A \cap \partial_I x)} = \frac{\mu(A \cup x)}{\mu(A)}. \end{aligned}$$

Откуда $\mu(A)\mu(((A \cap \partial_I x) \cup B) \cup x) = \mu(A \cup x)\mu((A \cap \partial_I x) \cup B)$.

Суммируя по $B \subset \Lambda \setminus (\partial_I x \cup x)$, получим (2).

i) $\implies$ ii). В силу ii) $\implies$ iii) достаточно показать, что μ – мера с отношением I . Если $x \notin A \subset \Lambda$, то

$$\frac{\mu(A \cup x)}{\mu(A)} = \exp\{V_I(A \cup x) - V_I(A)\}.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} V_I(A \cup x) - V_I(A) &= \sum_{B \subset A \cup x} J_{V_I}(B) - \sum_{B \subset A} J_{V_I}(B) = \sum_{B \subset A} J_{V_I}(B \cup x) \\ &= \sum_{B \subset A} \sum_{i \in I} J_{V_i}(B \cup x) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{B \subset A} J_{V_i}(B \cup x) \right). \end{aligned}$$

Так как V_i – потенциал с отношением i , т.е. $J_{V_i}(B \cup x) \neq 0$ только в случае, если $B \cup x$ – i -симплекс, то $B \subset \partial_I x = \bigcup_{i \in I} \partial_i x$. Следовательно, $B \cap \partial_I x = B$. Откуда следует

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \left(\sum_{B \subset A} J_{V_i}(B \cup x) \right) &= \sum_{i \in I} \left(\sum_{B \subset A} J_{V_i}((B \cap \partial_I x) \cup x) \right) \\ &= V_I((A \cap \partial_I x) \cup x) - V_I(A \cap \partial_I x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\mu(A \cup x)}{\mu(A)} = \frac{\mu((A \cap \partial_I x) \cup x)}{\mu(A \cap \partial_I x)}.$$

Значит, μ – мера с отношением I .

iii) $\implies$ i). Пусть μ – мера с отношением I . Докажем, что существует единственный потенциал V_I такой, что μ является гиббсовской мерой с потенциалом V_I .

Потенциал V_I определим следующим образом:

$$V_I(A) = \log \left\{ \frac{\mu(A)}{\mu(\emptyset)} \right\} \quad \text{для всех } A \in P(\Lambda).$$

Из этого равенства видно, что μ является гиббсовской мерой с потенциалом V_I и этот потенциал единственен.

Теперь проверим, что V_I – потенциал с отношением I .

Пусть $A \in P(\Lambda)$ не является i -симплексом для произвольного $i \in I$. Тогда найдутся такие пары $x, y \in A$, что $f_i(x, x_2, \dots, x_{i-2}, y) = 0$ для любого $i \in I$ и для любого набора $x_2, \dots, x_{i-2} \in \Lambda$, $x_j \neq x_k$, $j \neq k$.

Положим $B = A \setminus x \setminus y$. Если $X \subset B$, то в силу того, что μ – мера с отношением I , получим

$$\begin{aligned} \frac{\mu(X \cup x \cup y)}{\mu(X \cup x)} &= \frac{\mu(((X \cup x) \cap \partial_I y) \cup y)}{\mu((X \cup x) \cap \partial_I y)} \\ &= \frac{\mu((X \cap \partial_I y) \cup (x \cap \partial_I y) \cup y)}{\mu((X \cap \partial_I y) \cup (x \cap \partial_I y))} = \frac{\mu((X \cap \partial_I y) \cup y)}{\mu(X \cap \partial_I y)} = \frac{\mu(X \cup y)}{\mu(X)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$V_I(X \cup x \cup y) - V_I(X \cup x) - V_I(X \cup y) + V_I(X) = 0.$$

Теперь вычислим $J_V(A)$, где $A \in P(\Lambda)$ не является i -симплексом для любого $i \in I$:

$$\begin{aligned} J_{V_I}(A) &= \sum_{B \subset A} (-1)^{|A \setminus \overline{B}|} V_I(\overline{B}) \\ &= \sum_{X \subset B} \{ (-1)^{|A \setminus X \cup x \cup y|} V_I(X \cup x \cup y) + (-1)^{|A \setminus X \cup x|} V_I(X \cup x) \\ &\quad + (-1)^{|A \setminus X \cup y|} V_I(X \cup y) + (-1)^{|A \setminus X|} V_I(X) \} \\ &= \sum_{X \subset B} (-1)^{|A \setminus X|} \{ V_I(X \cup x \cup y) - V_I(X \cup x) - V_I(X \cup y) + V_I(X) \} = 0. \end{aligned}$$

Значит, V_I – потенциал с отношением I . Теорема доказана.

4. Критерий для потенциала. Следующая теорема дает критерий того, когда потенциал является потенциалом с отношением I .

ТЕОРЕМА 2. *Потенциал V на Λ является потенциалом с отношением I тогда и только тогда, когда для любой пары $x, y \in \Lambda$, для которой $f_i(x, x_2, \dots, x_{i-2}, y) = 0$ для любого набора $x_2, \dots, x_{i-2} \in \Lambda$, $x_j \neq x_k$, $j \neq k$, $i \in I$, и для любого множества $X \subset \Lambda \setminus (x \cup y)$ имеет место равенство*

$$V(X \cup x \cup y) - V(X \cup x) - V(X \cup y) + V(X) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если условие теоремы выполняется, то из доказательства теоремы 1 следует, что V является потенциалом с отношением I .

Достаточность. Пусть V – потенциал с отношением I , а $x, y \in \Lambda$ удовлетворяют условиям теоремы. Если $B \subset X$, то с помощью вычислений, аналогичных тем, что были проделаны в доказательстве теоремы 1, получаем, что

$$J_V(B \cup x \cup y) = \sum_{Y \subset B} (-1)^{|B \setminus Y|} \{V(Y \cup x \cup y) - V(Y \cup x) - V(Y \cup y) + V(Y)\}.$$

Поскольку $f_i(x, x_2, \dots, x_{i-1}, y) = 0$ для любого набора $x_2, \dots, x_{i-1} \in B \setminus x \setminus y$, то $B \cup x \cup y$ не является i -симплексом для любого $i \in I$. Следовательно, $J_V(B \cup x \cup y) = 0$, откуда для всех $B \subset X$ имеем

$$\sum_{Y \subset B} (-1)^{|B \setminus Y|} \{V(Y \cup x \cup y) - V(Y \cup x) - V(Y \cup y) + V(Y)\} = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & V(X \cup x \cup y) - V(X \cup x) - V(X \cup y) + V(X) \\ &= \sum_{B \subset X \cup x \cup y} J_V(B) - \sum_{B \subset X \cup x} J_V(B) - \sum_{B \subset X \cup y} J_V(B) + \sum_{B \subset X} J_V(B) \\ &= \sum_{B \subset X} J_V(B \cup x \cup y) \\ &= \sum_{B \subset X} \sum_{Y \subset B} (-1)^{|B \setminus Y|} \{V(Y \cup x \cup y) - V(Y \cup x) - V(Y \cup y) + V(Y)\} = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

5. Примеры. 1. Пусть $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ – конечное множество. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ чётно,} \\ 0, & \text{если } x \text{ нечётно,} \end{cases} & f_2(x, y) &= \begin{cases} 1, & \text{если } |x - y| = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\ f_3(x, y, z) &= \begin{cases} 1, & \text{если } |x - y| = |x - z| = |y - z| = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Потенциал V определим следующим образом:

$$\begin{aligned} V(A) &= J_1 \sum_{x \in A: f_1(x)=1} \sigma(x) + J_2 \sum_{\{x, y\} \subset A: f_2(x, y)=1} \sigma(x)\sigma(y) \\ &+ J_3 \sum_{\{x, y, z\} \subset A: f_3(x, y, z)=1} \sigma(x)\sigma(y)\sigma(z), \end{aligned}$$

где $\sigma(x) = \pm 1$ для любого $x \in \Lambda$. Заметим, что в этом случае

$$J_V(A) = \begin{cases} J_1 \sigma(x), & \text{если } A = \{x\}, f_1(x) = 1, \\ J_2 \sigma(x)\sigma(y), & \text{если } A = \{x, y\}, f_2(x, y) = 1, \\ J_3 \sigma(x)\sigma(y)\sigma(z), & \text{если } A = \{x, y, z\}, f_3(x, y, z) = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, построенный потенциал является потенциалом с отношением $I = \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$.

2. Пусть Λ – команда спортсменов, состоящая из 14 футболистов и 6 теннисистов.

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ – теннисист,} \\ 0, & \text{если } x \text{ – футболист,} \end{cases} \\ f_2(x, y) &= \begin{cases} 1, & \text{если } x, y \text{ – теннисисты, } x \neq y, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\ f_{11}(x_1, x_2, \dots, x_{11}) &= \begin{cases} 1, & \text{если } x_1, \dots, x_{11} \text{ – различные футболисты,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Функцию $\sigma: \Lambda \rightarrow \{-1; 1\}$ определим следующим образом:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ выиграл,} \\ -1, & \text{если } x \text{ проиграл.} \end{cases}$$

Тогда потенциал

$$\begin{aligned} V(A) &= \sum_{x \in A: f_1(x)=1} \sigma(x) + \sum_{x, y \in A: f_2(x, y)=1} (\sigma(x) + \sigma(y)) \\ &+ \sum_{x_1, \dots, x_{11} \in A: f_{11}(x_1, \dots, x_{11})=1} (\sigma(x_1) + \dots + \sigma(x_{11})). \end{aligned}$$

Заметим, что построенный потенциал является потенциалом с отношением $I = \{1, 2, 11\} \subset \{1, 2, \dots, 20\}$.

ЗАМЕЧАНИЯ. Определение гиббсовской меры и другие определения настоящей работы проведены на конечных множествах. Структура графа на Λ не имеет значения в наших определениях. Поэтому эти определения являются рабочими и для достаточно широких классов моделей физики, химии, социологии, биологии и других разделов науки.

В книге [1] определены гиббсовское состояние с потенциалом ближайшего соседа, марковское случайное поле и состояние ближайшего соседа на счетных графах и доказано, что все эти определения эквивалентны.

В случае счетного графа возникает вопрос об описании предельного состояния Гиббса. В некоторых случаях это состояние оказывается не единственным. В случае неединственности предельного гиббсовского состояния говорят, что имеет место фазовый переход. Вообще говоря, множество предельных гиббсовских состояний для данного потенциала на счетном графе может оказаться континуальным.

Определению и изучению гиббсовских мер с потенциалом V_I на счетных множествах будут посвящены следующие работы авторов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Престон К. Гиббсовские состояния на счетных множествах. М.: Мир, 1977.
- [2] Лигgett Т. Марковские процессы с локальным взаимодействием. М.: Мир, 1989.
- [3] Малышев В. А., Минлос Р. А. Гиббсовские случайные поля. М.: Наука, 1985.
- [4] Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. М.: Наука, 1980.
- [5] Gibbs W. Elementary Principles of Statistical Mechanics: Yale University, 1902.
- [6] Добрушин Р. Л. Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности // ТВП. 1968. № 2. С. 201–229.
- [7] Spitzer F. Markov random fields and Gibbs ensembles // Ann. Math. Monthly. 1971. V. 78. P. 142–154.
- [8] Добрушин Р. Л. Исследование гиббсовских состояний для трехмерных решеточных систем // ТВП. 1973. Т. XVIII. № 2. С. 261–279.
- [9] Ганиходжаев Н. Н., Розиков У. А. Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых моделей на дереве Кэли // ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 109–117.
- [10] Розиков У. А. Структура разбиений группового представления дерева Кэли и их применения для описания периодических распределений Гиббса // ТМФ. 1997. Т. 112. № 1. С. 170–176.
- [11] Розиков У. А. Описание предельных гиббсовских мер λ -моделей на решетке Бете // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39. № 2. С. 427–435.
- [12] Розиков У. А. Построение несчетного числа гиббсовских мер неоднородной модели Изинга // ТМФ. 1999. Т. 118. № 1. С. 95–104.
- [13] Ганиходжаев Н. Н., Розиков У. А. О неупорядоченных фазах некоторых моделей на дереве Кэли // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 2. С. 31–42.

Институт математики АН РУз, г. Ташкент
E-mail: anasbek@mail.com, root@im.tashkent.su

Поступило
29.01.2001