Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Шур, Мажорирующие потенциалы в сильных предельных теоремах для отношений, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 1, 117–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4076>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:41:57

Мажорирующие потенциалы в сильных предельных теоремах для отношений

М. Г. Шур

В заметке [1] сильные предельные теоремы для отношений, ассоциированных с цепями Маркова, сначала доказывались для некоторых “основных” функций со специфическими свойствами, а затем распространялись на более широкое семейство функций. В предлагаемой работе это семейство существенно расширено за счет функций, в определенном смысле мажорируемых потенциалами исходных функций. Проверку принадлежности какой-либо функции к новому семейству можно упростить, используя малые функции и их аналоги. Традиционные требования типа возвратности или неприводимости соответствующих цепей Маркова заменены в работе более гибкими.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Сильные предельные теоремы для отношений (СПТО) существенно уточняют утверждения таких классических предельных теорем для отношений, как предельная теорема Деблина для возвратных счетных цепей Маркова (см. [2; § 1.9] или [3; гл. 4]) или эргодическая теорема Чакона–Орнштейна (см. [3], [4]), оперирующая с положительными сжатиями пространств суммируемых функций. Первый цикл исследований, связанных с СПТО для цепей Маркова, был подытожен в [5], но для первого знакомства с этим кругом вопросов можно рекомендовать [6], где, в частности, описаны связи СПТО с проблемами суммирования независимых случайных величин и теорией потенциала. Более поздние достижения, касающиеся как возвратных по Харрису, так и невозвратных цепей Маркова, симметричных цепей и т.д., см., например, [7]–[11].

В данной работе рассматривается однородная цепь Маркова $X = (X_n; n \geq 0)$ с измеримым пространством состояний $(E, \mathcal{E})$ и переходным оператором P , действующим в пространстве $\mathcal{B}$ ограниченных измеримых (т.е. $\mathcal{E}$ -измеримых) функций $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Наши СПТО (см. теоремы 1–4), как и другие теоремы этого типа, описывают при тех или иных условиях поведение отношений вида $\mu(P^{n+m}f)/\nu(P^N g)$ при $n \rightarrow \infty$, где $m \geq 0$, $f, g \in \mathcal{B}_+ = \{v \in \mathcal{B} : v \geq 0\}$, а μ и ν – вероятностные меры на $\mathcal{E}$ (под $\mu(v)$ подразумевается интеграл $\int v d\mu$, если он имеет смысл для какой-либо функции v ; латинские буквы от i до n обозначают целые неотрицательные числа). Так, в теореме 1 речь идет об условиях, при которых справедливо соотношение

$$\mu(P^n g) \sim \nu(P^n g), \quad (1)$$

в котором знак эквивалентности означает стремление отношения соответствующих

величин к 1 при $n \rightarrow \infty$, а более содержательные равенства типа

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\mu(P^{n+m}f)}{\nu(P^n)g} \right] = \frac{\pi(f)}{\pi(g)}, \quad m \geq 0, \quad (2)$$

где $\pi \equiv 0$ – некоторая σ -конечная инвариантная для X мера, обсуждаются в теоремах 2–4. Эти СПТО покрывают имеющиеся в [1], однако теперь – в отличие от [1] и предшествующей литературы в целом – гораздо детальнее исследуется вопрос: если (1) или (2) справедливы для некоторых g и f , то для каких еще функций применимы подобные соотношения? При ответе на этот вопрос мы привлекаем функции, мажорируемые в определенном смысле α -потенциалами исходных функций ($0 < \alpha < 1$) и к тому же являющиеся достаточно весомыми (см. раздел 2). Попутно выясняется, что работу с подобными функциями можно значительно упростить, используя так называемые малые функции или их аналоги. Отметим, что в наших СПТО нет достаточно традиционных требований типа, например, возвратности по Харрису или неприводимости цепи (ср. [5], [7]).

План дальнейшего изложения: в разделе 2 обсуждаются система обозначений и основная терминология, раздел 3 содержит основные результаты (см. теоремы 1–4), в разделе 4 говорится об использовании аналогов малых функций в наших СПТО, а в разделе 5 – о степени богатства семейства малых функций.

2. Основные обозначения и терминология. В основном, мы следуем терминологии, принятой в теории цепей Маркова с измеримыми пространствами состояний [3], [7], так что ограничимся лишь необходимыми пояснениями. Фиксировав далее уже упоминавшуюся цепь Маркова X , будем использовать уже введенные обозначения. Функции $f \in \mathcal{B}_+$ и числу $\alpha \in [0, 1]$ сопоставим α -потенциал $G^\alpha f = \sum_{n \geq 0} \alpha^n P^n f$ и положим $Gf = G^0 f$. Все меры и заряды будут считаться заданными на $\mathcal{E}$, и с каждой мерой μ связывается семейство $\mathcal{B}_+(\mu) = \{f \in \mathcal{B}_+ : \mu(f) > 0\}$. По определению, мера μ нетривиальна, если $\mu(E) > 0$, а запись “ μ -п.в.” означает “ μ -почти всюду”. Норма $\|\mu\|$ ограниченного заряда μ приравнивается к его вариации, т.е. к $\sup\{\mu(f) : f \in \mathcal{B} \text{ и } |f| \leq 1\}$. Для такого заряда, а также для любой меры μ положим $\mu P^n(A) = \int p_n(x, A) \mu(dx)$, где $n \geq 1$, $A \in \mathcal{E}$, а $p_n(\cdot, \cdot)$ – переходные вероятности цепи X за n шагов. Совокупность всех вероятностных мер обозначается символом $\mathcal{M}_1$.

Введем следующие определения. Пусть $f \in \mathcal{B}_+$ и $\nu \in \mathcal{M}_1$. Пару $\{f, \nu\}$ назовем *стандартной*, если $\nu(P^n f) > 0$ для всех достаточно больших n . Функция $g \in \mathcal{B}_+$ называется

а) *мажорируемой α -потенциалом функции f* , где $0 < \alpha \leq 1$, если

$$g \leq aG^\alpha f \quad (3)$$

при некотором $a > 0$,

б) *весомой относительно стандартной пары $\{f, \nu\}$* , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\nu(P^n g)}{\nu(P^n f)} \right] > 0. \quad (4)$$

Во многих ситуациях проверка условий (3) и (4) не вызывает особых затруднений (см. раздел 4).

3. Основные результаты. Рассмотрим стандартную пару $\{f, \nu\}$ и такое натуральное n_0 , что $\nu(P^n f) > 0$ при $n \geq n_0$. Как и в [1], введем следующий набор условий.

УСЛОВИЕ (I). Для некоторой меры $\mu \in \mathcal{M}_1$ имеет место сходимость

$$\|(\mu - \nu)P^n\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

УСЛОВИЕ (II). Выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\nu(P^{n+1}f)}{\nu(P^n f)} \right] \geq 1. \quad (5)$$

УСЛОВИЕ (III). Семейство функций $\mathcal{F} = \{f_n; n \geq n_0\}$, где $f_n = P^n f / \nu(P^n f)$, равномерно ограничено в E .

Как показывает пример 1 из [1], вместо (III) часто более полезным оказывается

УСЛОВИЕ (IIIa). Пусть непустые измеримые множества E_n , $n \geq 1$, образуют исчерпывающую последовательность, т.е.

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \quad \text{и} \quad E = \bigcup_{n \geq 1} E_n. \quad (6)$$

Пусть для любого E_m , $m \geq 1$, существует E_n такое, что $p_1(\cdot, E_n) \equiv 1$ на E_m , и при этом семейство $\mathcal{F}$ финально равномерно ограничено (т.е. при некотором $M > 0$ и любом $m \geq 1$ на E_m имеем $|f_n| < M$, если n превышает некоторое $N_m \in \mathbb{N}$).

Комментируя эти условия, отметим, что они позволяют, например, отказаться от требования возвратности по Харрису цепи X , являющегося ключевым во многих СПТО [5], [7]. По известной теореме Ори [5], [7] условие (I) выполняется при всех $\mu \in \mathcal{M}_1$, если σ -алгебра $\mathcal{E}$ счетнопорождена и цепь X возвратна по Харрису. Отправляясь от второго закона нуля-двойки в форме Дерриеника [3], будем истолковывать выполнение (I) с любыми $\mu \in \mathcal{M}_1$ как проявление благоприятной возможности, допускаемой этим законом. Довольно удобное требование, влекущее условие (II), имеется в [1], где (II) связывалось с именем Лина, использовавшего близкое предположение [8]. Что касается (III), то оно или его варианты вошли во многие СПТО [5], [7], причем зачастую вместе с требованием возвратности по Харрису. Это условие является частным случаем (IIIa), в чем легко убедиться, рассмотрев (IIIa) с $E_n = E$ при всех $n \geq 1$.

Всюду далее фиксируем $\alpha \in (0, 1)$ и при выполнении (IIIa) отнесем меру $\mu \in \mathcal{M}_1$ к семейству $\mathcal{M}_2$, если она сосредоточена на некотором множестве E_j , $j = j(\mu)$, из числа упомянутых в (IIIa). При осуществлении (III) будем считать $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для стандартной пары $\{f, \nu\}$, где $\nu \in \mathcal{M}_2$, выполнены условия (II) и (IIIa), а для меры $\mu \in \mathcal{M}_2$ – условие (I). Тогда справедливо соотношение (1) с $g = f$. Более того, если (I) действует также с νP в роли μ , то (1) справедливо для всех $g \in \mathcal{B}_+$, мажорируемых (в смысле раздела 2) α -потенциалом функции f и весомых относительно $\{f, \nu\}$, и при этом

$$\mu(P^{n+1}g) \sim \mu(P^n g). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $g = f$ наша теорема вытекает из теоремы 1 и замечания 2 в [1]. Поэтому далее условие (I) предполагается реализованным как с заданной мерой μ , так и с $\mu = \nu P$, что позволяет, в частности, пользоваться соотношением

$$\nu(P^{n+1}f) \sim \nu(P^n f). \quad (8)$$

Нам же предстоит доказать (1) и (7) для тех $g \in \mathcal{B}_+$, для которых справедливо (3) с некоторым $a > 0$ и одновременно

$$c\nu(P^n f) \leq \nu(P^n g), \quad (9)$$

где $c > 0$ задано, а n достаточно велико, для чего потребуются два этапа.

I этап. На этом этапе используется условие (9), а вместо (3) считается, что

$$g \leq a(f + Pf + \dots + P^k f) \quad (10)$$

с некоторым $k \geq 0$. По условию (IIIa) на любом E_j , $j \geq 1$, при всех n , начиная с какого-то $n = n_j$, действует оценка $P^n f \leq M\nu(P^n f)$, а так как мера μ сосредоточена на одном из таких множеств E_j , то применима и оценка

$$\mu(P^n f) \leq M\nu(P^n f), \quad n \geq N, \quad (11)$$

при надлежащем выборе $N > 0$. Первая оценка вместе с (10) показывает, что на E_j

$$P^{n-m}g \leq aM \sum_{0 \leq i \leq k} \nu(P^{n-m+i}f) \leq M_1\nu(P^n f) \leq M_2\nu(P^n g) \quad (12)$$

при $m \geq 0$, если n превышает некоторое натуральное $N(m, j)$, где, например, $M_1 = M(k+2)$, $M_2 = \bar{c}^1 M_2$ и где учтено (8).

Положим $\eta_m = (\mu - \nu)P^m$ и $a_m = \|\eta_m\|$, задав $\varepsilon > 0$, фиксируем m и j так, чтобы иметь $a_m < \varepsilon$ (см. условие (I)) и чтобы заряд η_m был сосредоточен на E_j . В силу (12) при n , превышающем как m , так и $N(m, j)$, находим

$$|\eta_m(g)| = |\eta_m(P^{n-m}g)| \leq a_m \sup_{E_j} P^{n-m}g \leq \varepsilon M_2\nu(P^n g).$$

Отсюда после деления на $\nu(P^n g)$ заключаем, что $|\mu(\varphi_n) - \nu(\varphi_n)| = |\mu(\varphi_n) - 1| < \varepsilon M_2$, если n достаточно велико и $\varphi_n = P^n g / \nu(P^n g)$ (неравенство $\nu(P^n g) \neq 0$ для достаточно больших n вытекает из (9)). Таким образом, получено соотношение (1). Применив его с νP в роли μ , приходим к (7) для $\mu = \nu$, что ввиду (1) влечет (7) и с исходной мерой μ .

II этап. Теперь, отказавшись от (10) и вернувшись к условию (3), выберем $a > 0$ в соответствии с (3). При $k \geq 1$ положим

$$s_k = a \sum_{0 \leq i \leq k} \alpha^i P^i f, \quad \sigma_k = a \sum_{i \geq k+1} \alpha^i P^i f, \quad g_k = \min(g, s_k)$$

и заметим, что $g - g_k \leq \sigma_k$, так как $g - g_k \leq aG^\alpha f - s_k = \sigma_k$ на множестве $\{x \in E : g(x) \geq s_k(x)\}$, а вне него $g = g_k$. Из (8) и (11) видно, что

$$\mu(P^{n+i}f) \leq M\nu(P^{n+i}f) \leq M\beta^i \nu(P^n f)$$

при произвольно заданном $\beta > 1$, лишь бы n было достаточно велико. Если $\beta > 1$

таково, что $\gamma = \alpha\beta < 1$, то на основании сказанного

$$\begin{aligned}\mu P^n(g - g_k) &\leq \mu P^n \sigma_k = a \sum_{i \geq k+1} \alpha^i \mu(P^{n+i} f) \\ &\leq aM \sum_{i \geq k+1} [\alpha^i \beta^i \nu(P^n f)] = M_3 \gamma^k \nu(P^n f)\end{aligned}\quad (13)$$

при $k \geq 0$, где M_3 определяется очевидным образом, а n достаточно велико (в частности, здесь можно взять и $\mu = \nu$).

Зададим $\varepsilon \in (0, c)$ и $\varepsilon_1 = \bar{c}^1 \varepsilon$ с тем же $c > 0$, что и в (9). Из (9) и (13) вытекают неравенства

$$\mu P^n(g - g_k) \leq \varepsilon \nu(P^n f) \leq \varepsilon_1 \nu(P^n g), \quad (14)$$

которые снова применимы и с $\mu = \nu$ (здесь и далее k выбирается таким, что $M_3 \gamma^k < \varepsilon$, а n считается достаточно большим). Сравнив крайние выражения в (14) при $\mu = \nu$, находим, что

$$(1 - \varepsilon_1) \nu(P^n g) \leq \nu(P^n g_k) \leq \nu(P^n g), \quad (15)$$

откуда согласно (9) вытекает весомость g_k относительно $\{f, \nu\}$. Кроме того, выполняется (10) с g_k в роли g , и потому доказанное на первом этапе влечет (1) применительно к функции g_k .

Это обстоятельство вместе с (14) и (15) показывает, что первое отношение, имеющееся в правой части равенства

$$\frac{\mu(P^n g)}{\nu(P^n g)} = \frac{\mu P^n(g - g_k)}{\nu(P^n g)} + \frac{\nu(P^n g_k)}{\nu(P^n g)} \cdot \frac{\mu(P^n g_k)}{\nu(P^n g_k)},$$

не превышает ε_1 , второе заключено между $1 - \varepsilon_1$ и 1, а третье стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. Итак, вновь получено (1), после чего, как и на первом этапе, выводится (7).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 (в том числе и условие, касающееся νP). Тогда (1) и (7) справедливы всякий раз, когда функция $g \in \mathcal{B}_+$ мажорируется α -потенциалом функции f , а функция $P^m g$ оказывается весомой относительно пары $\{P^j f, \nu\}$ при некоторых $j, m \geq 0$.

Действительно, соотношение (8) влечет как стандартность пары $\{P^j f, \nu\}$, так и весомость $P^m g$ относительно $\{f, \nu\}$. Отсюда и из теоремы 1 следуют варианты (1) и (7) с $P^m g$ вместо g , которые, очевидно, равносильны самим (1) и (7). В дальнейшем неоднократно будет использоваться

УСЛОВИЕ (IV). Для цепи X и некоторой нетривиальной σ -конечной меры π , инвариантной для X , существует двойственная цепь $\hat{X}$ (т.е. существует цепь Маркова $\hat{X}$ с прежним пространством состояний и переходным оператором $\hat{P}$, для которой $\pi(gP f) = \pi(f \hat{P} g)$ для $f, g \in \mathcal{B}_+$).

Это условие заведомо выполнено, если измеримое пространство $(E, \mathcal{E})$ является борелевским [1]. Допуская (IV), будем говорить, что некоторая пара $\{v, \mu\}$, стандартная для $\hat{X}$, удовлетворяет условию (II)^d, коль скоро реализуется (II) с триплетом $\{v, \mu, \hat{P}\}$ вместо $\{f, \nu, P\}$. Аналогичным образом вводятся (I)^d, (II)^d и (IIIa)^d. Чтобы отличить исчерпывающую последовательность $\{E_n\}$ аналогичной, но отвечающей (IIIa)^d, обозначим последнюю через $\{\hat{E}_n\}$, а под $\hat{M}_2$ будем подразумевать аналог семейства $\hat{M}_2$ для $\hat{X}$. Довольно часто при выполнении (IIIa) и (IIIa)^d одна последовательность $\{E_n \cap \hat{E}_n\}$ может заменить сразу и $\{E_n\}$, и $\{\hat{E}_n\}$.

Следующие теоремы легко выводятся из теоремы 1. В них под $\mathcal{L}_+$ подразумевается семейство $\{v \in \mathcal{B}_+ : 0 < \pi(v) < \infty\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть имеет место (IV) и для обеих цепей X и $\hat{X}$ осуществляется благоприятная возможность, допускаемая законом нуля–двойки (см. выше). Пусть существуют функции $f_0, g_0, w \in \mathcal{L}_+$ и меры $\mu_0, \nu_0 \in \mathcal{M}_2$ и $\varkappa \in \widehat{M}_2$ такие, что для обеих пар $\{f_0, \mu_0\}$ и $\{g_0, \nu_0\}$ выполняются условия (II) и (IIIa), а для $\{w, \varkappa\}$ – (II)^d и (IIIa)^d. Тогда равенство (2) ст ≥ 0 реализуется всякий раз, когда $\mu, \nu \in \mathcal{M}_2$, а функции $f \in \mathcal{B}_+$ и $g \in \mathcal{B}_+$ мажорируются α -потенциалами функций f_0 и g_0 и являются весовыми относительно $\{f_0, \mu\}$ и $\{g_0, \nu\}$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя при необходимости μP^m на μ и воспользовавшись теоремой 1, можно свести проверку (2) к случаю с $f = f_0, g = g_0$ и $m = 0$, в котором (2) оказывается равносильным равенству (8) из [1]. Хотя при доказательстве последнего в [1] использовались условия (III) и (III)^d вместо (IIIa) и (IIIa)^d, это доказательство сохраняет силу и в теперешней ситуации, что и влечет требуемое утверждение.

Как видно из теоремы 3, результаты, родственные теореме 2, справедливы и при несколько, менее громоздких условиях. В теореме 3 каждой функции $g \in \mathcal{L}_+$ сопоставляется мера $\pi_g(A) = \pi(g1_A)/\pi(g)$, $A \in \mathcal{E}$, где 1_A – функция-индикатор для A .

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия, включенные в первую фразу теоремы 2. Пусть $f_0, g, v \in \mathcal{L}_+$, причем $\pi_v \in \mathcal{M}_2$ и $\pi_g \in \widehat{M}_2$, и пусть пары $\{f_0, \mu\}$ и $\{v, \pi_g\}$ являются стандартными для X и $\hat{X}$ соответственно. Если для первой из них реализуются условия (II) и (IIIa), а для второй – (II)^d и (IIIa)^d, то равенство (2) с $\nu = \pi_v$ справедливо всякий раз, когда $f \in \mathcal{B}_+$ имеет тот же тип, что и в теореме 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 имеем

$$\mu(P^n f) \sim \mu(P^n f_0) \sim \pi_v(P^n f_0) \quad \text{и} \quad \pi_g(\hat{P}^n v) \sim \pi_{f_0}(\hat{P}^n v),$$

что вместе с равенствами

$$\pi_v = (P^n f_0) = \pi(v P^n f_0) = \pi(f_0 \hat{P}^n v) = \pi(f_0) \pi_{f_0}(\hat{P}^n v)$$

и $\pi_v(P^n g) = \pi(g) \pi_g(\hat{P}^n v)$ влечет соотношения

$$\mu(P^n f) \sim \pi(f_0) \pi_{f_0}(\hat{P}^n v) \quad \text{и} \quad \nu(P^n g) = \pi_v(P^n g) \sim \pi(g) \pi_g(\hat{P}^n v).$$

Теперь (2) становится очевидным при $m = 0$, а рассматривая остальные значения m , остается, лишь сослаться на (7) с f в роли g .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В доказательствах теорем 2 и 3 условие, касающееся благоприятной возможности для $\hat{X}$, использовано не полностью: например, в последнем из них задействовано лишь (I) с μ и P , замененными на π_g и $\hat{P}$ или на π_{f_0} и $\hat{P}$.

Остановимся на случае, когда применимо (IV) и цепь X симметрична относительно π , т.е. когда можно считать $\hat{X} = X$. Для $f, g \in \mathcal{L}_+$ положим $(f, g) = \pi(fg)$ и $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ и напомним [8], [10], что существует предел

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|P^{n+1} f\|}{\|P^n f\|} \right) \leq 1.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняется условие (IV), цепь X симметрична относительно π и для нее осуществляется благоприятная возможность из закона нуля-двойки. Пусть $f_0 \in \mathcal{L}_+$, $\rho(f_0) = 1$ и реализуется частный случай требования (IIIa): функции

$$\frac{P^{2n} f_0}{\|P^n f_0\|^2} = \frac{P^{2n} f_0}{(P^{2n} f_0, f_0)}, \quad n \geq 1, \quad (16)$$

финально равномерно ограничены в смысле, указанном в (IIIa). Тогда применимо (2) с любыми мерами $\mu, \nu \in \mathcal{M}_2$, коль скоро функции $f, g \in \mathcal{L}_+$ мажорируются α -потенциалом функции f_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Практически не меняя соответствующих рассуждений из доказательства теоремы 3 работы [1], получаем, что $\mu(P^{n+1} f_0) \sim \mu(P^n f_0)$ для $\mu \in \mathcal{M}_2$, и что функции

$$\frac{P^n f_0}{(P^n f_0, f_0)}, \quad n \geq n_1,$$

где n_1 – подходящая постоянная, финально равномерно ограничены. Поэтому при $\mu_0 = \pi_{f_0}$ пара $\{f_0, \mu_0\}$ удовлетворяет условиям (II) и (IIIa), и доказываемое утверждение вытекает из теоремы 2 в случае $f_0 = g_0 = w$ и $\mu_0 = \nu_0 = \varkappa$.

4. Малые функции и их аналоги. В этом пункте считается заданным какое-либо непустое семейство функций $W \subset \mathcal{B}_+$, для любых элементов f и g которого можно найти такие $a > 0$ и $m \geq 0$, что

$$f \leq a P^m g. \quad (17)$$

Использование такого семейства, как мы увидим далее, облегчает применение наших СПТО. Согласно следующему примеру подходящим кандидатом на роль W может оказаться семейство так называемых малых функций.

ПРИМЕР 1. Пусть на $\mathcal{E}$ определена нетривиальная σ -конечная мера η . Функцию $f \in \mathcal{B}_+(\eta)$ назовем η -малой, если для любой функции $g \in \mathcal{B}_+(\eta)$, справедливо (17) при некоторых $a > 0$ и $m \geq 1$ (это определение напоминает определение очень малой функции [8] и несколько отличается от своего аналога из [1]; см. далее замечание 2). Совокупность всех η -малых функций обозначим $W(\eta)$. Ясно, что если $f \in W(\eta)$, $g \in \mathcal{B}_+(\eta)$ и $g \leq b P^k f$ при некоторых $b > 0$ и $k \geq 0$, то и $g \in W(\eta)$. Отметим также (ср. [1]), что если $p_k(x, B) \geq b \eta(B)$ при всех $x \in A$, $B \in \mathcal{E}$ и каких-либо $b > 0$ и $k \geq 1$, причем $A \in \mathcal{E}$ и $\eta(A) > 0$, то множество A η_1 -мало (т.е. $1_A \in W(\eta_1)$), где $\eta_1(B) = \eta(A \cap B)$, $B \in \mathcal{E}$.

Если семейство $W(\eta)$ непусто, то его можно выбрать в качестве W (вопрос о том, насколько $W(\eta)$ богато, отложен до раздела 5).

ПРИМЕР 2. Здесь предполагается, что E является локально компактным хаусдорфовым пространством, а $\mathcal{E}$ – борелевской σ -алгеброй в E . Предполагается также, что цепь X является феллеровской, т.е. что функция Pf непрерывна всякий раз, когда функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и ограничена. Наконец, требуется, чтобы для каждой функции $f \in \mathcal{C}_0^+$ и любого непустого компакта $F \subset E$ действовало неравенство $P^n f > 0$ на F при всех n , начиная с некоторого $n = n_F$, где $\mathcal{C}_0^+$ – совокупность всех непрерывных функций $f: E \rightarrow [0, \infty)$ с компактными носителями. Тогда в роли W можно взять $\mathcal{C}_0^+$.

Возвратившись к общему случаю, рассмотрим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $f \in W$, $\nu \in \mathcal{M}_1$ и пара $\{f, \nu\}$ является стандартной. Тогда

- а) семейство всех $h \in \mathcal{B}_+$, мажорируемых α -потенциалом функции f , содержится W и не зависит от конкретного выбора f ; кроме того, если $g \in W$, то функция $P^m g$ при некотором $m = m(g) \geq 0$ является весомой относительно $\{f, \nu\}$;
- б) если последовательность $\{\nu(P^{n+1}f)/\nu(P^n f); n \geq n_0\}$ ограничена, где n_0 то же, что и в разделе 3, то любая функция $g \in W$ весома относительно $\{f, \nu\}$, причем $\{g, \nu\}$ удовлетворяет условию (III) или (IIIa), коль скоро таковому подчиняется $\{f, \nu\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задав $g \in W$, рассмотрим функцию $h \in \mathcal{B}_+$, для которой $h \leq bG^\alpha f$ при некотором $b > 0$. Из (17) следует, что $h \leq abG^\alpha(P^m g) \leq aba^{-m}G^\alpha g$. Следовательно, семейство всех $h \in \mathcal{B}_+$, мажорируемых α -потенциалом функции f , содержится в аналогичном семействе, отвечающем g , и это обстоятельство влечет первую часть п. а). Вторая часть п. а) также вытекает из (17).

Из определения семейства W следуют неравенства $a_1 P^{n-m} f \leq P^n g \leq a_2 P^{n+k} f$ при $n \geq m$, если $g \in W$, а $m, k \geq 0$ и $a_1, a_2 > 0$ выбраны нужным образом. Проинтегрировав по ν члены указанных неравенств и сопоставив результат с соответствующими определениями, легко приходим к утверждению б).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f \in W$ и реализуется ситуация, описанная в первой фразе следствия 1. Тогда применимы соотношения (1) и (7), если $g \in \mathcal{B}_+$ и $h \leq g \leq cG^\alpha h$ при некоторых $h \in W$ и $c > 0$ (в частности, если $g \in W$).

Действительно, по предложению 1 функция $P^m g$ весома относительно $\{f, \nu\}$ при некотором $m \geq 0$ и мажорируется α -потенциалом функции f , так что можно сослаться на следствие 1.

Отметим, что в условиях примера 2 неравенство $g \leq cG^\alpha h$ (см. следствие 2) заведомо выполняется с подходящими h и c , если функция g имеет компактный носитель и ограничена.

Следствие 2 связано с теоремой 1, но подобные следствия легко вывести и из теорем 2–4. Например, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 3. Если в теореме 2 рассматривать лишь $f_0, g_0 \in W$, то ее утверждение сохранит силу всякий раз, когда $f, g \in \mathcal{B}_+$ подчиняются неравенствам $h \leq f \leq cG^\alpha h$ и $h \leq g \leq cG^\alpha h$ с некоторыми $h \in W$ и $c > 0$ (в частности, когда $f, g \in W$).

5. Снова о малых функциях. Мы возвращаемся к примеру 1 с прежней мерой η , чтобы обсудить, насколько представительно семейство $W(\eta)$ η -малых функций.

Цепь Маркова X называется η -неприводимой или η -неприводимой в основном (η -essentially irreducible), если $PG1_A > 0$ всюду или η -п.в. в E соответственно всякий раз, когда $A \in \mathcal{E}$ и $\eta(A) > 0$ [3]. Цепь X , по определению, η -апериодична, если $W(\eta)$ непусто и для любого $x \in E$ и некоторой функции $f \in W(\eta)$ (а значит, и всех таких f) неравенство $P^m f(x) > 0$ справедливо для всех m , начиная с некоторого $m = m(f, x)$.

Если цепь X η -неприводима, а σ -алгебра $\mathcal{E}$ счетнопорождена, то, заменив при необходимости нашу меру η несколько иной, можно обеспечить определенное богатство семейства $W(\eta)$ [5], [7]. Однако имеет место и более общее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть цепь X η -неприводима в основном, а $W(\eta)$ непусто. Тогда

- найдется множество $A \in \mathcal{E}$ с $\nu(A) = 0$ и с дополнением $E \setminus A$, являющимся объединением не более чем счетного набора η -малых множеств,
- любое $B \in \mathcal{E}$ с $\eta(B) > 0$ содержит η -малое подмножество.

Если к тому же цепь X η -апериодична, то множество A можно считать пустым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in W(\eta)$ и $A_1 = \{x \in E : Gf(x) = 0\}$. Ясно, что $\eta(A_1) = 0$, и что $E \setminus A_1$ служит объединением множеств

$$E_{mn} = \{x \in E : P^m f(x) \geq n^{-1}\}, \quad \text{где } m \geq 0, n \geq 1.$$

Если $\eta(E_{mn}) > 0$ при некоторых m и n , то $P^m f(x) \in \mathcal{B}_+(\eta)$, а потому функция $P^m f$ η -мала, что с учетом неравенства $1_{E_{mn}} \leq nP^m f$ влечет η -малость E_{mn} . Остается искомое A определить как объединение A_1 со всеми E_{mn} , для которых $\eta(E_{mn}) = 0$. Утверждение же, касающееся B , вытекает из того, что $\eta(B \cap E_{mn}) > 0$ и, следовательно, $B \cap E_{mn}$ η -мало при надлежащем выборе E_{mn} .

Теперь добавим требование η -апериодичности цепи X . Пусть $M > 0$ таково, что $P^m f \in \mathcal{B}_+(\eta)$ при $m > M$. При таких m и всех n , превышающих некое $N(m) > 0$, множество E_{mn} является η -малым в силу неравенства $\eta(E_{mn}) > 0$. Поскольку всякое $x \in E$ принадлежит E_{mn} с произвольно выбранным $m > \max(m(f, x), M)$ и достаточно большим n , множество E оказывается объединением всех E_{mn} , являющихся η -малыми множествами (обозначение $m(f, x)$ заимствовано из определения η -апериодической цепи Маркова). Доказательство завершено.

В заключение вернемся к определению η -малой функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в определение η -малой функции (см. раздел 4) включить условие $G^\alpha f > 0$, то возникнет определение η -малой функции в смысле работы [1]. Наличие хотя бы одной такой функции f влечет η -неприводимость X : если $A \in \mathcal{E}$ и $\eta(A) > 0$, то $0 < G^\alpha f < aG^\alpha P^m 1_A \leq aG 1_A$ при подходящих $m \geq 0$ и $a > 0$, так что $PG 1_A > 0$. Этот факт не был отмечен в [1]. Учитывая чрезмерность требования η -неприводимости в рамках теперешней работы, мы упростили здесь прежнее определение η -малой функции. Кстати, упомянутый факт позволяет из теорем 4 и 5 работы [1] безболезненно изъять условие, фигурирующее в [1] как требование (Ia).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Г. Шур, "Об условии Лина в сильных предельных теоремах для отношений", *Матем. заметки*, **75:6** (2004), 927–940.
- [2] К.-Л. Чжун, *Однородные цепи Маркова*, Мир, М., 1964.
- [3] Д. Ревюз, *Цепи Маркова*, РФФИ, М., 1997.
- [4] Ж. Неве, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969.
- [5] S. Orey, *Lecture Notes on Limit Theorems for Markov Chain Transition Probabilities*, Van Nostrand Reinhold Math. Stud., **34**, Van Nostrand Reinhold Co., London, 1971.

- [6] Ф. Спидер, *Принципы случайного блуждания*, Мир, М., 1969.
- [7] E. Nummelin, *General Irreducible Markov Chains and Non-Negative Operators*, Cambridge Tracts in Math., **83**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [8] M. Lin, “Strong ratio limit theorems for mixing Markov operators”, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, **12**:12 (1976), 181–191.
- [9] W. Woess, “Random walks on infinite graphs and groups – a survey on selected topics”, *Bull. London Math. Soc.*, **26**:1 (1994), 1–60.
- [10] М. Г. Шур, “Предельные теоремы для отношений, ассоциированных с самосопряженными операторами и симметричными цепями Маркова”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **45**:2 (2000), 273–288.
- [11] М. Г. Шур, “Условие равномерной интегрируемости в сильных предельных теоремах для отношений”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **50**:3 (2005), 517–532.
- [12] М. Г. Шур, “Квазифеллеровские расширения марковских цепей и существование двойственных цепей”, *Матем. заметки*, **69**:1 (2001), 133–143.

М. Г. Шур

Московский государственный институт
электроники и математики

Поступило

31.05.2006