Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. М. Джохадзе, С. С. Харибегашвили, О первой задаче Дарбу для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 5, 693–712

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4078>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:30:37

О первой задаче Дарбу для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка

О. М. Джохадзе, С. С. Харибегашвили

Исследуется первая задача Дарбу для гиперболических уравнений второго порядка со степенной нелинейностью. Рассматривается вопрос о существовании и отсутствии глобальных решений этой задачи в зависимости от знака параметра перед нелинейным членом и степени его нелинейности. Обсуждается также вопрос о локальной разрешимости поставленной задачи.

Библиография: 25 названий.

1. Постановка задачи. В плоскости независимых переменных x и t рассмотрим нелинейное гиперболическое уравнение вида

$$L_\lambda u := u_{tt} - u_{xx} + a_1(x, t)u_t + a_2(x, t)u_x + a_3(x, t)u + \lambda|u|^\alpha u = f(x, t), \quad (1)$$

где λ и α – заданные действительные постоянные, причем $\lambda\alpha \neq 0$, $\alpha > -1$; a_i , $i = 1, 2, 3$, f – заданные, а u – искомая действительная функция.

Обозначим через $D_T := \{(x, t) : 0 < x < t, 0 < t < T\}$, $T \leq \infty$, треугольную область, ограниченную характеристическим отрезком $\gamma_{1,T}$: $x = t$, $0 \leq t \leq T$, а также отрезками $\gamma_{2,T}$: $x = 0$, $0 \leq t \leq T$ и $\gamma_{3,T}$: $t = T$, $0 \leq x \leq T$.

Для уравнения (1) рассмотрим первую задачу Дарбу об определении в области D_T решения $u(x, t)$ этого уравнения по краевым условиям (см., например, [1; с. 228]):

$$u|_{\gamma_{i,T}} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Отметим, что для нелинейных уравнений гиперболического типа вопросам существования или отсутствия глобальных решений различных задач (как, например, начальных, смешанных, различного рода нелокальных задач, в том числе периодических) посвящено много работ (см., например, [2]–[11]). В линейном случае, т.е. при $\lambda\alpha = 0$ задача (1), (2), как известно, корректно поставлена и имеет место глобальная разрешимость в соответствующих пространствах функций (см., например, [1], [12]–[15]).

Нами будет показано, что при определенных условиях на показатель нелинейности α и параметр λ задача (1), (2) в одних случаях глобально разрешима, а в других случаях не имеет глобального решения, хотя, как это будет доказано ниже, эта задача локально разрешима.

Работа выполнена при поддержке фонда INTAS (грант № 05-1000008-7921) и Грузинского Национального Научного Фонда (грант GNSF/ST06/3-005).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $a_i \in C(\overline{D}_T)$, $i = 1, 2, 3$, $f \in C(\overline{D}_T)$. Функцию u будем называть *сильным обобщенным решением* задачи (1), (2) класса C в области D_T , если $u \in C(\overline{D}_T)$ и существует такая последовательность функций $u_n \in \dot{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$, что $u_n \rightarrow u$ и $L_\lambda u_n \rightarrow f$ в пространстве $C(\overline{D}_T)$ при $n \rightarrow \infty$, где

$$\dot{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T) := \{u \in C^2(\overline{D}_T) : u|_{\Gamma_T} = 0\}, \quad \Gamma_T := \gamma_{1,T} \cup \gamma_{2,T}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что классическое решение задачи (1), (2) из пространства $\dot{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$ является сильным обобщенным решением этой задачи класса C в области D_T . В свою очередь, если сильное обобщенное решение задачи (1), (2) класса C в области D_T принадлежит пространству $C^2(\overline{D}_T)$, то оно будет также и классическим решением этой задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $a_i \in C(\overline{D}_\infty)$, $i = 1, 2, 3$, $f \in C(\overline{D}_\infty)$. Мы будем говорить, что задача (1), (2) *глобально разрешима* в классе C , если для любого конечного $T > 0$ эта задача имеет сильное обобщенное решение класса C в области D_T .

2. Априорная оценка решения задачи (1), (2). Имеет место

ЛЕММА 1. Пусть $-1 < \alpha < 0$, а в случае $\alpha > 0$ дополнительно потребуем, чтобы $\lambda > 0$. Тогда для сильного обобщенного решения задачи (1), (2) класса C в области D_T справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \leq c_1 \|f\|_{C(\overline{D}_T)} + c_2 \quad (3)$$

с положительными постоянными $c_i(T, a_j, \alpha, \lambda)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, не зависящими от u и f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$. Пусть u – сильное обобщенное решение задачи (1), (2) класса C в области D_T . Тогда в силу определения 1 существует такая последовательность функций $u_n \in \dot{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_\lambda u_n - f\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad (4)$$

а следовательно, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda |u_n|^\alpha u_n - \lambda |u|^\alpha u\|_{C(\overline{D}_T)} = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим функцию $u_n \in \dot{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$, как решение следующей задачи:

$$L_\lambda u_n = f_n, \quad (6)$$

$$u_n|_{\Gamma_T} = 0, \quad \Gamma_T := \gamma_{1,T} \cup \gamma_{2,T}. \quad (7)$$

Здесь

$$f_n := L_\lambda u_n. \quad (8)$$

Умножая обе части равенства (6) на $\partial u_n / \partial t$ и интегрируя по области $D_\tau := \{(x, t) \in D_T : 0 < t < \tau\}$, $0 < \tau \leq T$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx dt - \int_{D_\tau} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \frac{\partial u_n}{\partial t} dx dt + \frac{\lambda}{\alpha + 2} \int_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t} |u_n|^{\alpha+2} dx dt \\ &= \int_{D_\tau} \left(f_n - a_1 \frac{\partial u_n}{\partial t} - a_2 \frac{\partial u_n}{\partial x} - a_3 u_n \right) \frac{\partial u_n}{\partial t} dx dt. \end{aligned}$$

Положим $I_\tau := \overline{D}_\infty \cap \{t = \tau\}$, $0 < \tau \leq T$. Тогда с учетом (7) интегрированием по частям левой части последнего равенства получаем

$$\begin{aligned} & \int_{D_\tau} \left(f_n - a_1 \frac{\partial u_n}{\partial t} - a_2 \frac{\partial u_n}{\partial x} - a_3 u_n \right) \frac{\partial u_n}{\partial t} dx dt \\ &= \int_{\gamma_{1,\tau}} \frac{1}{2\nu_t} \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \nu_t - \frac{\partial u_n}{\partial t} \nu_x \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 (\nu_t^2 - \nu_x^2) \right] ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_{I_\tau} \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \frac{\lambda}{\alpha + 2} \int_{I_\tau} |u_n|^{\alpha+2} dx, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\nu := (\nu_x, \nu_t)$ – единичный вектор внешней нормали к ∂D_τ и $\Gamma_\tau := \Gamma_T \cap \{t \leq \tau\}$.

Принимая во внимание, что оператор $\nu_t \partial / \partial x - \nu_x \partial / \partial t$ является внутренним дифференциальным оператором на $\gamma_{1,T}$, в силу (7) будем иметь

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \nu_t - \frac{\partial u_n}{\partial t} \nu_x \right) \Big|_{\gamma_{1,\tau}} = 0. \quad (10)$$

Далее очевидно, что

$$(\nu_t^2 - \nu_x^2) \Big|_{\gamma_{1,\tau}} = 0. \quad (11)$$

С учетом (10), (11) из (9) получаем

$$\begin{aligned} w_n(\tau) &:= \int_{I_\tau} \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx \\ &\leq 2 \int_{D_\tau} \left(f_n - a_1 \frac{\partial u_n}{\partial t} - a_2 \frac{\partial u_n}{\partial x} - a_3 u_n \right) \frac{\partial u_n}{\partial t} dx dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Приняв во внимание так называемое ε -неравенство

$$2f_n \frac{\partial u_n}{\partial t} \leq \varepsilon \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon} f_n^2,$$

справедливое для любого $\varepsilon := \text{const} > 0$, из (12) будем иметь

$$\begin{aligned} w_n(\tau) &\leq \varepsilon \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{\varepsilon} \|f_n\|_{L_2(D_\tau)}^2 \\ &- 2 \int_{D_\tau} \left(a_1 \frac{\partial u_n}{\partial t} + a_2 \frac{\partial u_n}{\partial x} + a_3 u_n \right) \frac{\partial u_n}{\partial t} dx dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Вводя обозначение $A := \max_{1 \leq i \leq 3} \sup_{(x,t) \in \overline{D}_T} |a_i(x,t)|$, в силу неравенства Коши имеем

$$\begin{aligned} & -2 \int_{D_\tau} \left(a_1 \frac{\partial u_n}{\partial t} + a_2 \frac{\partial u_n}{\partial x} + a_3 u_n \right) \frac{\partial u_n}{\partial t} dx dt \\ & \leq A \left\{ 4 \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 dx dt + \int_{D_\tau} u_n^2 dx dt \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее, из равенств (7) и $u_n(x, t) = \int_x^t (\partial u_n(x, \tau) / \partial t) d\tau$, $(x, t) \in \overline{D}_T$ после стандартных рассуждений вытекает неравенство (см., например, [16; с. 63])

$$\int_{D_\tau} u_n^2 dx dt \leq \tau^2 \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx dt. \quad (15)$$

Отсюда с учетом (13) и (14) следует, что

$$w_n(\tau) \leq (\varepsilon + A(\tau^2 + 4)) \int_0^\tau w_n(\sigma) d\sigma + \frac{1}{\varepsilon} \|f_n\|_{L_2(D_\tau)}^2, \quad 0 < \tau \leq T.$$

Из этого неравенства, учитывая, что величина $\|f_n\|_{L_2(D_\tau)}^2$, как функция от τ является неубывающей, в силу леммы Гронуолла (см., например, [17; с. 13]) следует, что

$$w_n(\tau) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f_n\|_{L_2(D_\tau)}^2 \exp(\tau(\varepsilon + A(\tau^2 + 4))).$$

Отсюда с учетом равенства

$$\inf_{\varepsilon > 0} \frac{\exp(\tau\varepsilon)}{\varepsilon} = e\tau,$$

которое достигается при $\varepsilon = 1/\tau$, получим

$$w_n(\tau) \leq \tau \|f_n\|_{L_2(D_\tau)}^2 \exp(A\tau(\tau^2 + 4) + 1), \quad 0 < \tau \leq T. \quad (16)$$

Если $(x, t) \in \overline{D}_T$, то в силу (7) имеет место равенство

$$u_n(x, t) = u_n(x, t) - u_n(0, t) = \int_0^x \frac{\partial u_n(\sigma, t)}{\partial x} d\sigma,$$

откуда в силу (16) будем иметь

$$\begin{aligned} |u_n(x, t)|^2 &\leq \int_0^x d\sigma \int_0^x \left[\frac{\partial u_n(\sigma, t)}{\partial x} \right]^2 d\sigma \leq x \int_{I_t} \left[\frac{\partial u_n(\sigma, t)}{\partial x} \right]^2 d\sigma \leq x w_n(t) \leq t w_n(t) \\ &\leq t^2 \|f_n\|_{L_2(D_t)}^2 \exp(At(t^2 + 4) + 1) \leq t^2 \|f_n\|_{C(\overline{D}_t)}^2 \text{mes } D_t \exp(At(t^2 + 4) + 1) \\ &\leq 2^{-1} t^4 \|f_n\|_{C(\overline{D}_T)}^2 \exp(At(t^2 + 4) + 1), \quad (x, t) \in \overline{D}_T. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) следует, что

$$\|u_n\|_{C(\overline{D}_T)} \leq \sqrt{2^{-1}} T^2 \|f_n\|_{C(\overline{D}_T)} \exp(2^{-1}(AT(T^2 + 4) + 1)).$$

В силу (4), (8), переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \leq \sqrt{2^{-1}} T^2 \|f\|_{C(\overline{D}_T)} \exp(2^{-1}(AT(T^2 + 4) + 1)). \quad (18)$$

Из оценки (18) следует (3) в случае $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$.

Теперь рассмотрим случай $-1 < \alpha < 0$ при произвольном λ . В этом случае $1 < \alpha + 2 < 2$ и применяя известное неравенство

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a = |u_n|^{\alpha+2}, \quad b = 1, \quad p = \frac{2}{\alpha+2} > 1, \quad q = -\frac{2}{\alpha} > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

получим

$$\int_{I_\tau} |u_n|^{\alpha+2} dx \leq \int_{I_\tau} \left[\frac{\alpha+2}{2} |u_n|^2 - \frac{\alpha}{2} \right] dx = \frac{\alpha+2}{2} \int_{I_\tau} |u_n|^2 dx + \frac{|\alpha|\tau}{2}.$$

Отсюда, учитывая вид функции $w_n(\tau)$ из (12), в силу (9)–(11) следует, что

$$w_n(\tau) \leq |\lambda| \int_{I_\tau} |u_n|^2 dx + \frac{|\lambda\alpha|\tau}{\alpha+2} + 2 \int_{D_\tau} \left(f_n - a_1 \frac{\partial u_n}{\partial t} - a_2 \frac{\partial u_n}{\partial x} - a_3 u_n \right) \frac{\partial u_n}{\partial t} dx dt. \quad (19)$$

В соответствии с теорией следа имеет место оценка (см., например, [16; с. 77, 86])

$$\|u_n\|_{L_2(I_\tau)} \leq \sqrt{\tau} \|u_n\|_{\mathring{W}_2^1(D_\tau, \Gamma_\tau)}, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (20)$$

где $\mathring{W}_2^1(D_\tau, \Gamma_\tau) := \{u \in W_2^1(D_\tau) : u|_{\Gamma_\tau} = 0\}$, $W_2^1(D_\tau)$ – известное пространство Соболева,

$$\|u_n\|_{\mathring{W}_2^1(D_\tau, \Gamma_\tau)}^2 := \int_{D_\tau} \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt.$$

Поскольку $2f_n(\partial u_n/\partial t) \leq f_n^2 + (\partial u_n/\partial t)^2$, то в силу (14), (15) и (20) из (19) будем иметь

$$\begin{aligned} w_n(\tau) &\leq (A(\tau^2 + 4) + |\lambda|\tau + 1) \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ &\quad + (A + |\lambda|\tau) \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 dx dt + \int_{D_\tau} f_n^2 dx dt + \frac{|\lambda\alpha|\tau}{\alpha+2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$w_n(\tau) \leq (A(\tau^2 + 4) + |\lambda|\tau + 1) \int_0^\tau w_n(\sigma) d\sigma + \|f_n\|_{L_2(D_\tau)}^2 + \frac{|\lambda\alpha|\tau}{\alpha+2}.$$

Применяя лемму Гронуолла (см., например, [17; с. 13]), из последнего неравенства получим

$$w_n(\tau) \leq \left[\|f_n\|_{L_2(D_T)}^2 + \frac{|\lambda\alpha|T}{\alpha+2} \right] \exp\{(A(T^2 + 4) + |\lambda|T + 1)T\}. \quad (21)$$

Аналогично тому, как из (16) было получено (17), из (21) будем иметь

$$\begin{aligned} |u_n(x, t)|^2 &\leq t w_n(t) \leq T \left[\|f_n\|_{C(\overline{D_T})}^2 \text{mes } D_T + \frac{|\lambda\alpha|T}{\alpha+2} \right] \exp\{(A(T^2 + 4) + |\lambda|T + 1)T\} \\ &= T^2 \left[\frac{T}{2} \|f_n\|_{C(\overline{D_T})}^2 + \frac{|\lambda\alpha|}{\alpha+2} \right] \exp\{(A(T^2 + 4) + |\lambda|T + 1)T\}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\|u_n\|_{C(\overline{D_T})} \leq T \left[\sqrt{\frac{T}{2}} \|f_n\|_{C(\overline{D_T})} + \sqrt{\frac{|\lambda\alpha|}{\alpha+2}} \right] \exp\left\{ \frac{T}{2} (A(T^2 + 4) + |\lambda|T + 1) \right\},$$

откуда в силу (4), (8) в результате предельного перехода при $n \rightarrow \infty$ получим оценку

$$\begin{aligned} \|u\|_{C(\overline{D}_T)} &\leq T \sqrt{\frac{T}{2}} \exp \left\{ \frac{T}{2} (A(T^2 + 4) + |\lambda|T + 1) \right\} \|f\|_{C(\overline{D}_T)} \\ &\quad + T \sqrt{\frac{|\lambda\alpha|}{\alpha + 2}} \exp \left\{ \frac{T}{2} (A(T^2 + 4) + |\lambda|T + 1) \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Этим оценка (3) доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из (18) и (22) следует, что в оценке (3) постоянные c_1 и c_2 следующие:

$$c_1 = \sqrt{2^{-1}} T^2 \exp(2^{-1}(AT(T^2 + 4) + 1)), \quad c_2 = 0, \quad \text{при } \alpha > 0, \quad \lambda > 0; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= T \sqrt{\frac{T}{2}} \exp \left\{ \frac{T}{2} (A(T^2 + 4) + |\lambda|T + 1) \right\}, \\ c_2 &= T \sqrt{\frac{|\lambda\alpha|}{\alpha + 2}} \exp \left\{ \frac{T}{2} (A(T^2 + 4) + |\lambda|T + 1) \right\}, \\ &\text{при } -1 < \alpha < 0, \quad -\infty < \lambda < +\infty. \end{aligned} \quad (24)$$

3. Эквивалентная редукция задачи (1), (2) к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерра. Пусть $P := P(x, t)$ – произвольная точка области D_T . Обозначим через $D_{x,t}$ четырехугольник с вершинами в точках $O := O(0, 0)$, P , а также в точках P_1 и P_3 , лежащих соответственно на носителях данных $\gamma_{2,T}$ и $\gamma_{1,T}$, т.е. $P_1 := P_1(0, t - x)$, $P_3 := P_3((x + t)/2, (x + t)/2)$. Очевидно, что область $D_{x,t}$ состоит из характеристического прямоугольника $D_{1;x,t} := PP_1P_2P_3$ и треугольника $D_{2;x,t} := OP_1P_2$, где $P_2 := P_2((t - x)/2, (t - x)/2)$.

Рассмотрим условия гладкости, наложенные на коэффициенты уравнения (1):

$$a_i \in C^{k+1}(\overline{D}_\infty), \quad i = 1, 2, \quad a_3 \in C^k(\overline{D}_\infty), \quad k \geq 1. \quad (25)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Известно, что при выполнении условия (25), для задачи (1), (2) при $\lambda = 0$ корректно определена функция Грина–Адамара $G(x, t; x', t')$, которая вместе со своими частными производными до $(k + 1)$ -го порядка включительно ограничена и кусочно-непрерывна, имея разрывы первого рода лишь при переходе через особое многообразие $t' + x' - t + x = 0$ (см., например, [18], [19; с. 230], [20; с. 38]).

Ниже, если не оговорено противное, будем считать, что в условии (25) показатель гладкости $k = 1$.

При этом, если $u \in C^2(\overline{D}_T)$ – классическое решение задачи (1), (2), то оно удовлетворяет следующему интегральному равенству:

$$\begin{aligned} u(x, t) + \lambda \int_{D_{x,t}} G(x', t'; x, t) |u|^\alpha u \, dx' \, dt' \\ = \int_{D_{x,t}} G(x', t'; x, t) f(x', t') \, dx' \, dt', \quad (x, t) \in \overline{D}_T. \end{aligned} \quad (26)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Равенство (26) можно рассматривать, как нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра, которое можно переписать в виде

$$u(x, t) + \lambda (L_0^{-1} |u|^\alpha u)(x, t) = F(x, t), \quad (x, t) \in \overline{D}_T. \quad (27)$$

Здесь L_0^{-1} – линейный оператор, действующий по формуле

$$(L_0^{-1}v)(x, t) := \int_{D_{x,t}} G(x', t'; x, t)v(x', t') dx' dt', \quad (x, t) \in \overline{D}_T, \quad (28)$$

$$F(x, t) := (L_0^{-1}f)(x, t), \quad (x, t) \in \overline{D}_T. \quad (29)$$

ЛЕММА 2. *Функция $u \in C(\overline{D}_T)$ является сильным обобщенным решением задачи (1), (2) класса C в области D_T тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением нелинейного интегрального уравнения (27).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $u \in C(\overline{D}_T)$ является решением уравнения (27). Поскольку $f \in C(\overline{D}_T)$, а пространство $C^2(\overline{D}_T)$ плотно в $C(\overline{D}_T)$ (см., например, [21; с. 37]), найдется такая последовательность функций $f_n \in C^2(\overline{D}_T)$, что $f_n \rightarrow f$ в пространстве $C(\overline{D}_T)$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогично, поскольку $u \in C(\overline{D}_T)$, существует такая последовательность функций $w_n \in C^2(\overline{D}_T)$, что $w_n \rightarrow u$ в пространстве $C(\overline{D}_T)$ при $n \rightarrow \infty$. Положим

$$u_n := -\lambda(L_0^{-1}|w_n|^\alpha w_n) + L_0^{-1}f_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Легко проверить, что $u_n \in \dot{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$, а поскольку L_0^{-1} является линейным непрерывным оператором, действующим в пространстве $C(\overline{D}_T)$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - u\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C(\overline{D}_T)} = 0,$$

имеем

$$u_n \rightarrow -\lambda(L_0^{-1}|u|^\alpha u) + L_0^{-1}f$$

в пространстве $C(\overline{D}_T)$ при $n \rightarrow \infty$. Но из равенства (26) следует, что

$$-\lambda(L_0^{-1}|u|^\alpha u) + L_0^{-1}f = u.$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{C(\overline{D}_T)} = 0.$$

С другой стороны, $L_0 u_n = -\lambda|w_n|^\alpha w_n + f_n$, откуда в силу того, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - u\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C(\overline{D}_T)} = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} L_\lambda u_n &= L_0 u_n + \lambda|u_n|^\alpha u_n = -\lambda|w_n|^\alpha w_n + f_n + \lambda|u_n|^\alpha u_n \\ &= -\lambda[|w_n|^\alpha w_n - |u|^\alpha u] + \lambda[|u_n|^\alpha u_n - |u|^\alpha u] + f_n \rightarrow f \end{aligned}$$

в пространстве $C(\overline{D}_T)$ при $n \rightarrow \infty$. Обратное очевидно.

4. Случай глобальной разрешимости задачи (1), (2) в классе непрерывных функций. Как было отмечено выше, оператор L_0^{-1} из (28) является линейным непрерывным оператором, действующим в пространстве $C(\overline{D}_T)$. Теперь покажем, что на самом деле этот оператор действует линейным и непрерывным образом из пространства $C(\overline{D}_T)$ в пространство непрерывно дифференцируемых функций $C^1(\overline{D}_T)$. Для этого линейным неособым преобразованием независимых переменных $t = \xi + \tau$ и $x = \xi - \tau$ перейдем в плоскость переменных ξ, τ . В результате этого преобразования:

- 1) треугольная область D_T перейдет в треугольник Ω_T с вершинами в точках с координатами $(0, 0)$, $(T, 0)$ и $(T/2, T/2)$;
- 2) четырехугольник $D_{x,t}$ – в четырехугольник $\Omega_{\xi,\tau}$ с вершинами в точках $Q(\xi, \tau)$, $Q_1(\tau, \tau)$, $Q_2(\tau, 0)$, $Q_3(\xi, 0)$;
- 3) характеристический прямоугольник $D_{1;x,t}$ – в $\Omega_{1;\xi,\tau}$ с вершинами в точках Q , Q_1 , Q_2 и Q_3 ;
- 4) треугольная область $D_{2;x,t}$ – в $\Omega_{2;\xi,\tau} := OQ_1Q_2$.

Для функции Грина–Адамара $G(x, t; x', t')$ в новых переменных $\xi, \tau; \xi', \tau'$ ($t' = \xi' + \tau'$, $x' = \xi' - \tau'$) оставляем прежнее обозначение $G(\xi, \tau; \xi', \tau')$.

При этом оператор L_0^{-1} из (28) перейдет в оператор K , действующий в пространстве $C(\bar{\Omega}_T)$ по формуле

$$\begin{aligned}
 (Kw)(\xi, \tau) &= 2 \int_{\Omega_{\xi,\tau}} G(\xi', \tau'; \xi, \tau) w(\xi', \tau') d\xi' d\tau' \\
 &= 2 \int_{\Omega_{1;\xi,\tau}} G(\xi', \tau'; \xi, \tau) w(\xi', \tau') d\xi' d\tau' + 2 \int_{\Omega_{2;\xi,\tau}} G(\xi', \tau'; \xi, \tau) w(\xi', \tau') d\xi' d\tau' \\
 &= 2 \int_{\tau}^{\xi} d\xi' \int_0^{\tau} G(\xi', \tau'; \xi, \tau) w(\xi', \tau') d\tau' \\
 &\quad + 2 \int_0^{\tau} d\xi' \int_0^{\xi'} G(\xi', \tau'; \xi, \tau) w(\xi', \tau') d\tau', \quad (\xi, \tau) \in \bar{\Omega}_T. \tag{30}
 \end{aligned}$$

Если $w \in C(\bar{\Omega}_T)$, то в силу замечания 3 из (30) непосредственно следует, что

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \xi} (Kw)(\xi, \tau) &= 2 \int_0^{\tau} G(\xi, \tau'; \xi, \tau) w(\xi, \tau') d\tau' \\
 &\quad + 2 \int_{\tau}^{\xi} d\xi' \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial \xi'} G(\xi', \tau'; \xi, \tau) w(\xi', \tau') d\tau' \\
 &\quad + 2 \int_0^{\tau} d\xi' \int_0^{\xi'} \frac{\partial}{\partial \xi'} G(\xi', \tau'; \xi, \tau) w(\xi', \tau') d\tau', \quad (\xi, \tau) \in \bar{\Omega}_T, \tag{31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \tau} (Kw)(\xi, \tau) &= -2 \int_0^{\tau} G(\tau, \tau'; \xi, \tau) w(\tau, \tau') d\tau' + 2 \int_{\tau}^{\xi} G(\xi', \tau; \xi, \tau) w(\xi', \tau) d\xi' \\
 &\quad + 2 \int_{\tau}^{\xi} d\xi' \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau'} G(\xi', \tau'; \xi, \tau) w(\xi', \tau') d\tau' \\
 &\quad + 2 \int_0^{\tau} G(\tau, \tau'; \xi, \tau) w(\tau, \tau') d\tau' \\
 &\quad + 2 \int_0^{\tau} d\xi' \int_0^{\xi'} \frac{\partial}{\partial \tau'} G(\xi', \tau'; \xi, \tau) w(\xi', \tau') d\tau', \quad (\xi, \tau) \in \bar{\Omega}_T. \tag{32}
 \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что для $(\xi, \tau) \in \bar{\Omega}_T$ имеем $0 \leq \xi \leq T$ и $0 \leq \tau \leq T/2$, в силу (30)–(32) будем иметь

$$\begin{aligned}
 &| (Kw)(\xi, \tau) | + \left| \frac{\partial}{\partial \xi} (Kw)(\xi, \tau) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial \tau} (Kw)(\xi, \tau) \right| \\
 &\leq 2\tau(\xi - \tau)G_0\|w\|_{C(\bar{\Omega}_T)} + \tau^2G_0\|w\|_{C(\bar{\Omega}_T)} + 2\tau G_0\|w\|_{C(\bar{\Omega}_T)} \\
 &\quad + 2\tau(\xi - \tau)G_1\|w\|_{C(\bar{\Omega}_T)} + \tau^2G_1\|w\|_{C(\bar{\Omega}_T)} + 2\tau G_0\|w\|_{C(\bar{\Omega}_T)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2(\xi - \tau)G_0\|w\|_{C(\overline{\Omega}_T)} + 2\tau(\xi - \tau)G_2\|w\|_{C(\overline{\Omega}_T)} \\
& + 2\tau G_0\|w\|_{C(\overline{\Omega}_T)} + 2\tau^2 G_2\|w\|_{C(\overline{\Omega}_T)} \\
& \leq 2(3\tau\xi - \tau^2 + 2\tau + \xi)G_3\|w\|_{C(\overline{\Omega}_T)} \leq (3T^2 + 4T)G_3\|w\|_{C(\overline{\Omega}_T)},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
G_0 &:= \sup_{t'+x'-t+x \neq 0} |G|, & G_1 &:= \sup_{t'+x'-t+x \neq 0} |\partial G / \partial x'|, \\
G_2 &:= \sup_{t'+x'-t+x \neq 0} |\partial G / \partial t'|,
\end{aligned}$$

причем $G_3 := G_0 + G_1 + G_2 < +\infty$ в силу замечания 3. Таким образом,

$$\|K\|_{C(\overline{\Omega}_T) \rightarrow C^1(\overline{\Omega}_T)} \leq (3T^2 + 4T)G_3, \quad (33)$$

что и требовалось доказать.

Далее, поскольку пространство $C^1(\overline{\Omega}_T)$ компактно вложено в пространство $C(\overline{\Omega}_T)$ (см., например, [22; с. 135], в силу (33) оператор $K: C(\overline{\Omega}_T) \rightarrow C(\overline{\Omega}_T)$ является линейным и компактным оператором. Таким образом, возвращаясь теперь от переменных ξ и τ к переменным x и t , для оператора K из (28) получаем справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 3. *Оператор $K: C(\overline{D}_T) \rightarrow C(\overline{D}_T)$, действующий по формуле (32), является линейным компактным оператором. При этом, в силу (33) этот же оператор переводит пространство $C(\overline{D}_T)$ в пространство $C^1(\overline{D}_T)$ и является ограниченным.*

Уравнение (27) с учетом (29) перепишем в виде

$$u = Au := K(-\lambda|u|^\alpha u + f), \quad (34)$$

где оператор $A: C(\overline{D}_T) \rightarrow C(\overline{D}_T)$ является непрерывным и компактным, поскольку нелинейный оператор $K: C(\overline{D}_T) \rightarrow C(\overline{D}_T)$, действующий по формуле $Ku := -\lambda|u|^\alpha u + f$ при $\alpha > -1$, является ограниченным и непрерывным, а линейный оператор $K: C(\overline{D}_T) \rightarrow C(\overline{D}_T)$ в силу леммы 3 является компактным. В то же время, согласно леммам 1 и 2, равенствам (23) и (24) для любого параметра $\tau \in [0, 1]$ и для любого решения $u \in C(\overline{D}_T)$ уравнения $u = \tau Au$ справедлива априорная оценка $\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \leq \tilde{c}_1 \|f\|_{C(\overline{D}_T)} + \tilde{c}_2$ с положительными постоянными $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$, не зависящими от u , τ и f . Поэтому согласно теореме Лере–Шаудера (см., например, [23; с. 375]) уравнение (34) при условиях леммы 1 имеет хотя бы одно решение $u \in C(\overline{D}_T)$. Тем самым, в силу леммы 2 нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $-1 < \alpha < 0$, а в случае $\alpha > 0$ параметр $\lambda > 0$. Тогда задача (1), (2) глобально разрешима в классе C в смысле определения 2, т.е. если $f \in C(\overline{D}_\infty)$, то для любого $T > 0$ задача (1), (2) имеет сильное обобщенное решение класса C в области D_T .*

5. Гладкость и единственность решения задачи (1), (2). Существование глобального решения в D_∞ . Из равенств (27)–(29) в силу лемм 2 и 3, а также замечания 3 непосредственно вытекает следующая

ЛЕММА 4. Пусть u является сильным обобщенным решением задачи (1), (2) класса C в области D_T в смысле определения 1. Тогда если $a_1, a_2 \in C^{k+1}(\overline{D}_T)$, $a_3, f \in C^k(\overline{D}_T)$, то $u \in C^{k+1}(\overline{D}_T)$, $k \geq 1$.

Из этой леммы, в частности, следует, что при $k \geq 1$ сильное обобщенное решение задачи (1), (2) класса C в области D_T является классическим решением этой задачи.

ЛЕММА 5. При $\alpha > 0$ задача (1), (2) не может иметь более одного сильного обобщенного решения класса C в области D_T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, предположим, что задача (1), (2) имеет два сильных обобщенных решения u_1 и u_2 класса C в области D_T . Согласно определению 1 существует такая последовательность функций $u_{in} \in \mathring{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$, $i = 1, 2$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{in} - u_i\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_\lambda u_{in} - f\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (35)$$

Положим $\omega_{nm} := u_{2n} - u_{1m}$. Легко видеть, что функция $\omega_{nm} \in \mathring{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$ и удовлетворяет следующим тождествам:

$$L_0 \omega_{nm} + g_{nm} \omega_{nm} = f_{nm}, \quad (36)$$

$$\omega_{nm}|_{\Gamma_T} = 0. \quad (37)$$

Здесь

$$g_{nm} := \lambda(1 + \alpha) \int_0^1 |u_{1m} + t(u_{2n} - u_{1m})|^\alpha dt, \quad (38)$$

$$f_{nm} := L_\lambda u_{2n} - L_\lambda u_{1m}, \quad (39)$$

где мы воспользовались очевидным равенством

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = (x_2 - x_1) \int_0^1 \varphi'(x_1 + t(x_2 - x_1)) dt$$

для функции $\varphi(x) := |x|^\alpha x$ при $x_2 = u_{2n}$, $x_1 = u_{1m}$, $\alpha > 0$. В силу первого равенства из (35) найдется такое число $M := \text{const} > 0$, не зависящее от индексов i и n , что $\|u_{in}\|_{C(\overline{D}_T)} \leq M$, откуда, в свою очередь, в силу (38) следует, что

$$\|g_{n,m}\|_{C(\overline{D}_T)} \leq |\lambda|(1 + \alpha)M^\alpha \quad \forall n, m. \quad (40)$$

Согласно (39) и второго равенства из (35) следует, что

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|f_{nm}\|_{C(\overline{D}_T)} = 0. \quad (41)$$

Умножая обе части равенства (36) на $\partial \omega_{nm} / \partial t$ и интегрируя по области $D_\tau := \{(x, t) \in D_T : 0 < t < \tau\}$, $0 < \tau \leq T$, в силу краевых условий (37), также как при получении неравенства (12) из (6), (7), будем иметь

$$\begin{aligned} w_{nm}(\tau) &:= \int_{I_\tau} \left[\left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x} \right)^2 \right] dx \\ &\leq 2 \int_{D_\tau} \left(f_{nm} - a_1 \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} - a_2 \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x} - a_3 \omega_{nm} - g_{nm} \omega_{nm} \right) \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} dx dt, \end{aligned} \quad (42)$$

где $I_\tau := \overline{D}_\infty \cap \{t = \tau\}$, $0 < \tau \leq T$.

В силу оценки (40) и неравенства Коши будем иметь

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_{D_\tau} \left(f_{nm} - a_1 \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} - a_2 \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x} - a_3 \omega_{nm} - g_{nm} \omega_{nm} \right) \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} dx dt \\
 &= -2 \int_{D_\tau} \left(a_1 \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} + a_2 \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x} + a_3 \omega_{nm} \right) \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} dx dt \\
 &\quad + 2 \int_{D_\tau} \left(f_{nm} - g_{nm} \omega_{nm} \right) \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} dx dt \\
 &\leq 2A \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} \right)^2 dx dt + A \left\{ \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x} \right)^2 dx dt \right\} \\
 &\quad + A \left\{ \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_{D_\tau} \omega_{nm}^2 dx dt \right\} \\
 &\quad + 2 \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_{D_\tau} f_{nm}^2 dx dt + \int_{D_\tau} g_{nm}^2 \omega_{nm}^2 dx dt \\
 &= 2(2A + 1) \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} \right)^2 dx dt + A \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x} \right)^2 dx dt \\
 &\quad + \int_{D_\tau} f_{nm}^2 dx dt + (\lambda^2(1 + \alpha)^2 M^{2\alpha} + A) \int_{D_\tau} \omega_{nm}^2 dx dt. \tag{43}
 \end{aligned}$$

Так как функция ω_{nm} удовлетворяет тем же однородным граничным условиям, что и u_n , теми же рассуждениями для нее получаем справедливость оценки (15). Принимая во внимание последнее, а также неравенства (42), (43), получим

$$\begin{aligned}
 w_{nm}(\tau) &\leq (A(\tau^2 + 4) + 2 + \lambda^2(1 + \alpha)^2 M^{2\alpha} \tau^2) \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} \right)^2 dx dt \\
 &\quad + A \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x} \right)^2 dx dt + \int_{D_\tau} f_{nm}^2 dx dt \\
 &\leq (A(\tau^2 + 4) + 2 + \lambda^2(1 + \alpha)^2 M^{2\alpha} \tau^2) \int_0^\tau w_{nm}(\sigma) d\sigma + \int_{D_T} f_{nm}^2 dx dt. \tag{44}
 \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла (см., например, [17; с. 13]) получаем, что

$$w_{nm}(\tau) \leq c \|f_{nm}\|_{L_2(D_T)}^2, \quad 0 < \tau \leq T, \tag{45}$$

где $c := \exp(A(\tau^2 + 4) + 2 + \lambda^2(1 + \alpha)^2 M^{2\alpha} T^2)T$.

Проводя те же рассуждения, которые привели к неравенству (17), а также учитывая очевидное неравенство

$$\|f_{nm}\|_{L_2(D_T)}^2 \leq \|f_{nm}\|_{C(\overline{D_T})}^2 \text{mes } D_T,$$

в силу (45) будем иметь

$$|\omega_{nm}(x, t)|^2 \leq t w_{nm}(t) \leq cT \text{mes } D_T \|f_{nm}\|_{C(\overline{D_T})}^2 = 2^{-1} cT^3 \|f_{nm}\|_{C(\overline{D_T})}^2, \quad (x, t) \in \overline{D_T}.$$

Отсюда следует, что

$$\|\omega_{nm}\|_{C(\overline{D_T})} \leq T \sqrt{2^{-1} cT} \|f_{nm}\|_{C(\overline{D_T})}. \tag{46}$$

Поскольку $\omega_{nm} := u_{2n} - u_{1m}$, в силу первого равенства из (35) будем иметь

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|\omega_{nm}\|_{C(\overline{D}_T)} = \|u_2 - u_1\|_{C(\overline{D}_T)}.$$

Отсюда в силу (41), переходя в неравенстве (46) к пределу при $n, m \rightarrow \infty$, получим $\|u_2 - u_1\|_{C(\overline{D}_T)} = 0$, т.е. $u_1 = u_2$, что и доказывает лемму 5.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$. Тогда при выполнении условия (25) в случае $k = 1$ для любого $f \in C^1(\overline{D}_\infty)$ задача (1), (2) имеет единственное глобальное классическое решение $u \in \mathring{C}^2(\overline{D}_\infty, \Gamma_\infty)$ в области D_∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ и $a_1, a_2 \in C^2(\overline{D}_\infty)$, $a_3, f \in C^1(\overline{D}_\infty)$, то согласно теореме 1 и леммам 4 и 5 в области D_T при $T = n$ существует единственное классическое решение $u_n \in \mathring{C}^2(\overline{D}_n, \Gamma_n)$ задачи (1), (2). Поскольку u_{n+1} является также классическим решением задачи (1), (2) в области D_n , в силу леммы 5 имеем $u_{n+1}|_{D_n} = u_n$. Поэтому функция u , построенная в области D_∞ по правилу $u(x, t) = u_n(x, t)$ при $n = [t] + 1$, где $[t]$ – целая часть числа t , а точка $(x, t) \in D_\infty$, будет единственным классическим решением задачи (1), (2) в области D_∞ класса $\mathring{C}^2(\overline{D}_\infty, \Gamma_\infty)$. Теорема 2 доказана полностью.

6. Некоторые свойства функции Грина–Адамара задачи (1), (2) при $\lambda = 0$. Приведем одно достаточное условие, наложенное на коэффициенты a_1 , a_2 и a_3 уравнения (1), гарантирующее неотрицательность функции Грина–Адамара задачи (1), (2) при $\lambda = 0$, т.е.

$$G(x, t; x', t') \geq 0, \quad (x, t) \in \overline{D}_T, \quad (x', t') \in \overline{D}_{x,t}. \quad (47)$$

С этой целью перепишем задачу (1), (2) при $\lambda = 0$ в характеристических переменных ξ и τ , приведенных в разделе 4:

$$LU := U_{\xi\tau} + A(\xi, \tau)U_\xi + B(\xi, \tau)U_\tau + C(\xi, \tau)U = F(\xi, \tau), \quad (\xi, \tau) \in \overline{\Omega}_T, \quad (48)$$

$$U(\xi, 0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq T, \quad U(\tau, \tau) = 0, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}. \quad (49)$$

Здесь

$$U(\xi, \tau) := u(\xi - \tau, \xi + \tau), \quad A := \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad B := \frac{a_1 - a_2}{2}, \quad C := a_3, \quad F := f. \quad (50)$$

Отметим также, что согласно равенству (30) решение $U(\xi, \tau)$ задачи (48), (49) представимо в виде

$$U(\xi, \tau) = 2 \int_{\Omega_{\xi, \tau}} G(\xi', \tau'; \xi, \tau) F(\xi', \tau') d\xi' d\tau', \quad (\xi, \tau) \in \overline{\Omega}_T. \quad (51)$$

ЛЕММА 6. Пусть

$$k \geq 0, \quad (52)$$

где $k := B_\tau + AB - C$ – инвариант Лапласа уравнения (48). Тогда выполнено условие (47).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор L из (48) представим в виде

$$LU = lU - kU, \quad (53)$$

где

$$lU := \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + A \right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + B \right) U. \quad (54)$$

Непосредственным интегрированием легко убедиться, что решение задачи

$$lV = F_1, \quad V(\xi, 0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq T, \quad V(\tau, \tau) = 0, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2} \quad (55)$$

представимо в виде

$$V(\xi, \tau) = \int_{\Omega_{1;\xi,\tau}} R(\xi', \tau'; \xi, \tau) F_1(\xi', \tau') d\xi' d\tau'. \quad (56)$$

Здесь

$$R(\xi, \tau; \xi', \tau') := \exp \left\{ \int_{\tau'}^{\tau} A(\xi, \tau_1) d\tau_1 + \int_{\xi'}^{\xi} B(\xi_1, \tau') d\xi_1 \right\} \geq 0 \quad (57)$$

– функция Римана оператора l , действующего согласно формуле (54) (см., например, [24; с. 16]).

С учетом (53) и (56) решение задачи (48), (49) удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} U(\xi, \tau) = & \int_{\Omega_{1;\xi,\tau}} R(\xi', \tau'; \xi, \tau) k(\xi', \tau') U(\xi', \tau') d\xi' d\tau' \\ & + \int_{\Omega_{1;\xi,\tau}} R(\xi', \tau'; \xi, \tau) F(\xi', \tau') d\xi' d\tau', \quad (\xi, \tau) \in \overline{\Omega}_T. \end{aligned} \quad (58)$$

Как известно, интегральное уравнение Вольтерра (58) можно решить методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} U_0 = 0, \quad U_n(\xi, \tau) = & \int_{\Omega_{1;\xi,\tau}} R(\xi', \tau'; \xi, \tau) k(\xi', \tau') U_{n-1}(\xi', \tau') d\xi' d\tau' \\ & + \int_{\Omega_{1;\xi,\tau}} R(\xi', \tau'; \xi, \tau) F(\xi', \tau') d\xi' d\tau', \quad n \geq 1, \quad (\xi, \tau) \in \overline{\Omega}_T. \end{aligned} \quad (59)$$

В силу (52) и (57) при $F \geq 0$ из рекуррентных соотношений (59) следует

$$U_n(\xi, \tau) \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (\xi, \tau) \in \overline{\Omega}_T. \quad (60)$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n - U\|_{C(\overline{\Omega}_T)} = 0$, в силу (60)

$$U(\xi, \tau) \geq 0 \quad \text{при} \quad F(\xi, \tau) \geq 0, \quad (\xi, \tau) \in \overline{\Omega}_T. \quad (61)$$

Таким образом, в силу (61) для любой неотрицательной функции $F \in C(\overline{\Omega}_T)$ правая часть равенства (51) также будет неотрицательной. Отсюда непосредственно следует справедливость условия (47). Этим лемма 7 доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Как известно (см., например, [19; с. 230]) функция Грина–Адамара в характеристическом прямоугольнике $\Omega_{1;\xi,\tau}$ совпадает с функцией Римана оператора L из (48). В то же время, как следует из представления (56), функция Грина–Адамара задачи (55) в треугольной части $\Omega_{2;\xi,\tau}$ области $\Omega_{\xi,\tau}$ равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Отметим, что в случае, когда коэффициенты оператора L_0 постоянны, достаточное условие (52) для неотрицательности функции Грина–Адамара задачи (1), (2) при $\lambda = 0$ является и необходимым.

Действительно, предположим, что коэффициенты A , B и C уравнения (48) постоянны и инвариант Лапласа

$$k := AB - C < 0. \quad (62)$$

Задача (48), (49) относительно новой неизвестной функции $V = U \exp(A\tau + B\xi)$ переписывается в виде

$$V_{\xi\tau} + (C - AB)V = F \exp(A\tau + B\xi), \quad (\xi, \tau) \in \bar{\Omega}_T, \quad (63)$$

$$V(\xi, 0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq T, \quad V(\tau, \tau) = 0, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}. \quad (64)$$

Решение этой задачи можно представить следующим образом:

$$V(\xi, \tau) = 2 \int_{\Omega_{\xi,\tau}} \tilde{G}(\xi', \tau'; \xi, \tau) F(\xi', \tau') \exp(A\tau' + B\xi') d\xi' d\tau', \quad (\xi, \tau) \in \bar{\Omega}_T. \quad (65)$$

где $\tilde{G}(\xi, \tau; \xi', \tau')$ – функция Грина–Адамара задачи (63), (64).

Сравнивая представления (51) и (65) легко установить, что

$$G(\xi, \tau; \xi', \tau') = \tilde{G}(\xi, \tau; \xi', \tau') \exp\{A(\tau - \tau') + B(\xi - \xi')\}.$$

Согласно замечанию 5 функция Грина–Адамара $\tilde{G}(\xi, \tau; \xi', \tau')$ задачи (63), (64) в характеристическом прямоугольнике $\Omega_{1;\xi,\tau}$ совпадает с функцией Римана уравнения (63), которая представима с помощью функции Бесселя J_0 согласно формуле [25; с. 455]

$$\tilde{G}(\xi, \tau; \xi', \tau') = J_0(2\sqrt{k(\xi - \xi')(\tau - \tau')}), \quad (\xi', \tau') \in \Omega_{1;\xi,\tau}.$$

Остается только заметить, что функция Бесселя J_0 знакопеременна, имея бесчисленное множество нулей.

Аналогичные результаты, о неотрицательности функции Римана получены в работе [18].

7. Случай отсутствия глобального решения задачи (1), (2). Ниже мы рассмотрим случай, когда в уравнении (1) параметр $\lambda < 0$, показатель нелинейности $\alpha > 0$ и выполнены условия (25) при $k = 1$.

ЛЕММА 7. Пусть u является сильным обобщенным решением задачи (1), (2) класса C в области D_T в смысле определения 1. Тогда справедливо следующее интегральное равенство:

$$\int_{D_T} u L_0^* \varphi dx dt = -\lambda \int_{D_T} |u|^\alpha u \varphi dx dt + \int_{D_T} f \varphi dx dt \quad (66)$$

для любой функции φ такой, что

$$\varphi \in C^2(\overline{D}_T), \quad \varphi|_{\gamma_{3,T}} = 0, \quad \varphi_t|_{\gamma_{3,T}} = 0, \quad \varphi|_{\gamma_{2,T}} = 0, \quad (67)$$

где L_0^* – оператор, сопряженный по Лагранжу, который действует по формуле $L_0^*\varphi := \varphi_{tt} - \varphi_{xx} - (a_1\varphi)_t - (a_2\varphi)_x + a_3\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению сильного обобщенного решения и задачи (1), (2) класса C в области D_T , функция $u \in C(\overline{D}_T)$ и найдется такая последовательность функций $u_n \in \mathring{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$, что имеют место (4).

Положим $f_n := L_\lambda u_n$. Умножим обе части равенства $L_\lambda u_n = f_n$ на функцию φ и проинтегрируем полученное равенство по области D_T . В результате интегрирования левой части этого равенства по частям, с учетом (67) и краевых условий $u_n|_{\gamma_i, T} = 0$, $i = 1, 2$, получим

$$\int_{D_T} u_n L_0^* \varphi \, dx \, dt = -\lambda \int_{D_T} |u_n|^\alpha u_n \varphi \, dx \, dt + \int_{D_T} f_n \varphi \, dx \, dt.$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $n \rightarrow \infty$ в силу (4) получим (66). Этим лемма 7 доказана.

Ниже условие (52) будем рассматривать в исходных переменных x, t согласно формулам (50).

ЛЕММА 8. Пусть $\lambda < 0$ и $\alpha > 0$, а функция $u \in C(\overline{D}_T)$ является сильным обобщенным решением задачи (1), (2) класса C в области D_T . Тогда если выполнено условие (52) и $f \geq 0$, то $u \geq 0$ в области D_T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2 и равенствам (27)–(29) функция u является решением следующего интегрального уравнения типа Вольтерра:

$$u(x, t) = \int_{D_{x,t}} K(x, t; x', t') u(x', t') \, dx' \, dt' + F(x, t), \quad (x, t) \in \overline{D}_T. \quad (68)$$

Здесь

$$K(x, t; x', t') := -\frac{\lambda}{2} G(x', t'; x, t) |u(x', t')|^\alpha, \\ F(x, t) := \frac{1}{2} \int_{D_{x,t}} G(x', t'; x, t) F(x', t') \, dx' \, dt'.$$

В предположениях леммы 8, принимая во внимание лемму 6, будет иметь место неравенство (47) и, следовательно,

$$K(x, t; x', t') \geq 0, \quad (x, t) \in \overline{D}_T, \quad (x', t') \in \overline{D}_{x,t}, \quad F(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in \overline{D}_T. \quad (69)$$

Считая функцию $K(x, t; x', t')$ заданной, рассмотрим линейное интегральное уравнение типа Вольтерра

$$v(x, t) = \int_{D_{x,t}} K(x, t; x', t') v(x', t') \, dx' \, dt' + F(x, t), \quad (x, t) \in \overline{D}_T, \quad (70)$$

в классе $C(\overline{D}_T)$ относительно неизвестной функции $v(x, t)$. Как известно (см., например, [15]), уравнение (70) в классе $C(\overline{D}_T)$ имеет единственное непрерывное решение $v(x, t)$, которое при $(x, t) \in \overline{D}_T$ может быть получено методом последовательных приближений:

$$v_0(x, t) = 0, \quad v_{n+1}(x, t) = \int_{D_{x,t}} K(x, t; x', t') v_n(x', t') dx' dt' + F(x, t), \quad n = 0, 1, \dots \quad (71)$$

Из (71) в силу (69) имеем $v_n(x, t) \geq 0$ в $\overline{D}_T$ при всех $n = 0, 1, \dots$. Но $v_n \rightarrow v$ в классе $C(\overline{D}_T)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому предельная функция $v \geq 0$ в области D_T . Остается только заметить, что в силу равенства (68) и функция u является решением уравнения (70), а поэтому в силу единственности решения этого уравнения окончательно получаем, что $u = v \geq 0$ в области D_T . Этим лемма 8 доказана.

В предположениях леммы 8 равенство (66) можно переписать в виде

$$\int_{D_T} |u| L_0^* \varphi dx dt = |\lambda| \int_{D_T} |u|^p \varphi dx dt + \int_{D_T} f \varphi dx dt, \quad p := \alpha + 1. \quad (72)$$

Воспользуемся методом пробных функций [10; с. 10–12]. Введем в рассмотрение функцию $\varphi^0 := \varphi^0(x, t)$ такую, что

$$\varphi^0 \in C^2(\overline{D}_\infty), \quad \varphi^0|_{D_{T=1}} > 0, \quad \varphi_x^0|_{D_{T=1}} \geq 0, \quad \varphi_t^0|_{D_{T=1}} \leq 0, \quad \varphi^0|_{\gamma_{2,\infty}} = 0, \quad \varphi^0|_{t \geq 1} = 0 \quad (73)$$

и

$$\kappa_0 := \int_{D_{T=1}} \frac{|\square \varphi^0|^{p'}}{|\varphi^0|^{p'-1}} dx dt < +\infty, \quad p' = 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad (74)$$

где $\square := \partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2$.

Легко проверить, что в качестве функции φ^0 , удовлетворяющей условиям (73) и (74), может быть взята функция

$$\varphi^0(x, t) = \begin{cases} x^n(1-t)^m, & (x, t) \in D_{T=1}, \\ 0, & t \geq 1, \end{cases}$$

при достаточно больших положительных постоянных n и m .

Полагая $\varphi_T(x, t) := \varphi^0(x/T, t/T)$, $T > 0$, в силу (73) легко видеть, что

$$\varphi_T \in C^2(\overline{D}_T), \quad \varphi_T|_{D_T} > 0, \quad \frac{\partial \varphi_T}{\partial x} \Big|_{D_T} \geq 0, \quad \frac{\partial \varphi_T}{\partial t} \Big|_{D_T} \leq 0, \quad (75)$$

$$\varphi_T|_{\gamma_{2,T}} = 0, \quad \varphi_T|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_T}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0. \quad (76)$$

Считая, что функция f зафиксирована, введем в рассмотрение функцию одной переменной T

$$\zeta(T) := \int_{D_T} f \varphi_T dx dt, \quad T > 0. \quad (77)$$

Имеет место следующая теорема об отсутствии глобальной разрешимости задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено условие (52) и $\lambda < 0$, $\alpha > 0$, функция $f \in C(\overline{D}_\infty)$ неотрицательна и $a_1 \leq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_3 - \partial a_1 / \partial t - \partial a_2 / \partial x \leq 0$ в области D_∞ . Тогда если

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \zeta(T) > 0, \quad (78)$$

то найдется такое положительное число $T_0 := T_0(f)$, что при $T > T_0$ задача (1), (2) не может иметь сильного обобщенного решения класса C в области D_T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что при выполнении условий этой теоремы существует сильное обобщенное решение и задачи (1), (2) класса C в области D_T . Тогда в силу лемм 7 и 8 имеет место равенство (72), в котором в силу (75), (76) в качестве функции φ может быть взята функция $\varphi = \varphi_T$, т.е.

$$\int_{D_T} |u| L_0^* \varphi_T dx dt = |\lambda| \int_{D_T} |u|^p \varphi_T dx dt + \int_{D_T} f \varphi_T dx dt.$$

С учетом обозначения (77), определения операторов L_0^* и $\square$ последнее равенство перепишем в виде

$$\begin{aligned} |\lambda| \int_{D_T} |u|^p \varphi_T dx dt &= \int_{D_T} |u| \square \varphi_T dx dt - \int_{D_T} |u| \left(a_1 \frac{\partial \varphi_T}{\partial t} + a_2 \frac{\partial \varphi_T}{\partial x} \right) dx dt \\ &\quad + \int_{D_T} |u| \left(a_3 - \frac{\partial a_1}{\partial t} - \frac{\partial a_2}{\partial x} \right) \varphi_T dx dt - \zeta(T), \end{aligned}$$

из которого в силу условий теоремы 3 и (75) получим неравенство

$$|\lambda| \int_{D_T} |u|^p \varphi_T dx dt \leq \int_{D_T} |u| \square \varphi_T dx dt - \zeta(T). \quad (79)$$

Если в неравенстве Юнга с параметром $\varepsilon > 0$

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{p' \varepsilon^{p'-1}} b^{p'}, \quad a, b \geq 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad p := \alpha + 1 > 1,$$

возьмем $a = |u| \varphi_T^{1/p}$, $b = |\square \varphi_T| / \varphi_T^{1/p}$, то с учетом того, что $p'/p = p' - 1$, получим

$$|u \square \varphi_T| = |u| \varphi_T^{1/p} \frac{|\square \varphi_T|}{\varphi_T^{1/p}} \leq \frac{\varepsilon}{p} |u|^p \varphi_T + \frac{1}{p' \varepsilon^{p'-1}} \frac{|\square \varphi_T|^{p'}}{\varphi_T^{p'-1}}.$$

В силу (79) и последнего неравенства будем иметь

$$\left(|\lambda| - \frac{\varepsilon}{p} \right) \int_{D_T} |u|^p \varphi_T dx dt \leq \frac{1}{p' \varepsilon^{p'-1}} \int_{D_T} \frac{|\square \varphi_T|^{p'}}{\varphi_T^{p'-1}} dx dt - \zeta(T),$$

откуда при $\varepsilon < |\lambda|p$ получим

$$\int_{D_T} |u|^p \varphi_T dx dt \leq \frac{p}{(|\lambda|p - \varepsilon)p' \varepsilon^{p'-1}} \int_{D_T} \frac{|\square \varphi_T|^{p'}}{\varphi_T^{p'-1}} dx dt - \frac{p}{|\lambda|p - \varepsilon} \zeta(T). \quad (80)$$

С учетом того, что $p' = p/(p-1)$, $p = p'/(p'-1)$ и

$$\min_{0 < \varepsilon < |\lambda|p} \frac{p}{(|\lambda|p - \varepsilon)p' \varepsilon^{p'-1}} = \frac{1}{|\lambda|^{p'}},$$

который достигается при $\varepsilon = |\lambda|$, из (80) следует, что

$$\int_{D_T} |u|^p \varphi_T dx dt \leq \frac{1}{|\lambda|^{p'}} \int_{D_T} \frac{|\square \varphi_T|^{p'}}{\varphi_T^{p'-1}} dx dt - \frac{p'}{|\lambda|} \zeta(T). \quad (81)$$

Поскольку $\varphi_T(x, t) := \varphi^0(x/T, t/T)$, в силу (73), (74) после замены переменных $x = Tx'$, $t = Tt'$ легко проверить, что

$$\int_{D_T} \frac{|\square \varphi_T|^{p'}}{\varphi_T^{p'-1}} dx dt = T^{-2(p'-1)} \int_{D_{T=1}} \frac{|\square \varphi^0|^{p'}}{|\varphi^0|^{p'-1}} dx' dt' = T^{-2(p'-1)} \kappa_0 < +\infty.$$

Отсюда в силу (75) из неравенства (81) получаем

$$0 \leq \int_{D_T} |u|^p \varphi_T dx dt \leq \frac{1}{|\lambda|^{p'}} T^{-2(p'-1)} \kappa_0 - \frac{p'}{|\lambda|} \zeta(T). \quad (82)$$

Поскольку $p' = p/(p-1) > 1$, то $-2(p'-1) < 0$, и в силу (74) будем иметь

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda|^{p'}} T^{-2(p'-1)} \kappa_0 = 0.$$

Поэтому в силу (78) найдется такое положительное число $T_0 := T_0(f)$, что при $T > T_0$ правая часть неравенства (82) будет отрицательной, в то время как левая часть этого неравенства неотрицательна. Это означает, что если существует сильное обобщенное решение u задачи (1), (2) класса C в области D_T , то обязательно $T \leq T_0$, что и доказывает теорему 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Отметим, что условия, наложенные на коэффициенты a_1 , a_2 и a_3 в теореме 3, будут выполнены, если, например, $a_1 = a_2 = 0$ и $a_3 \leq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Легко проверить, что если $f \in C(\overline{D_\infty})$, $f \geq 0$ и $f(x, t) \geq ct^{-m}$ при $t \geq 1$, где $c := \text{const} > 0$, $0 \leq m := \text{const} \leq 2$, то условие (77) будет выполнено, и, тем самым, при $\lambda < 0$, $\alpha > 0$, $k \geq 0$, $a_1 \leq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_3 - \partial a_1 / \partial t - \partial a_2 / \partial x \leq 0$ задача (1), (2) при достаточно больших T не будет иметь сильного обобщенного решения u класса C в области D_T .

Действительно, вводя в (77) преобразование независимых переменных x и t по формуле $x = Tx'$, $t = Tt'$, после несложных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} \zeta(T) &= T^2 \int_{D_{T=1}} f(Tx', Tt') \varphi^0(x', t') dx' dt' \\ &\geq cT^{2-m} \int_{D_{T=1} \cap \{t' \geq T^{-1}\}} t'^{-m} \varphi^0(x', t') dx' dt' \\ &\quad + T^2 \int_{D_{T=1} \cap \{t' < T^{-1}\}} f(Tx', Tt') \varphi^0(x', t') dx' dt' \end{aligned}$$

в предположении, что $T > 1$. Далее, пусть $T_1 > 1$ – произвольное фиксированное число. Тогда из последнего неравенства для функции ζ будем иметь

$$\begin{aligned} \zeta(T) &\geq cT^{2-m} \int_{D_{T=1} \cap \{t' \geq T^{-1}\}} t'^{-m} \varphi^0(x', t') dx' dt' \\ &\geq c \int_{D_{T=1} \cap \{t' \geq T_1^{-1}\}} t'^{-m} \varphi^0(x', t') dx' dt', \end{aligned} \quad (83)$$

если $T \geq T_1 > 1$ и $m \leq 2$. Из (83) в силу (75) сразу следует справедливость неравенства (78).

8. Локальная разрешимость задачи (1), (2) в случае $\lambda < 0$ и $\alpha > 0$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнено условие (25) при $k = 1$, $\lambda < 0$, $\alpha > 0$ и функция $f \in C(\overline{D}_\infty)$, $f \not\equiv 0$. Тогда найдется такое положительное число $T_* := T_*(f)$, что при $T \leq T_*$ задача (1), (2) в области D_T будет иметь хотя бы одно сильное обобщенное решение и класса C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В четвертом разделе задача (1), (2) в пространстве $C(\overline{D}_T)$ эквивалентным образом была редуцирована к функциональному уравнению (34), где оператор $A: C(\overline{D}_T) \rightarrow C(\overline{D}_T)$ являлся непрерывным и компактным. Поэтому для разрешимости уравнения (34) согласно теореме Шаудера достаточно показать, что оператор A переводит некоторый шар $B_R := \{v \in C(\overline{D}_T) : \|v\|_{C(\overline{D}_T)} \leq R\}$ радиуса $R > 0$, который является замкнутым и выпуклым множеством в банаховом пространстве $C(\overline{D}_T)$, в себя. Покажем, что это имеет место при достаточно малых T .

Действительно, в силу (28) и (34) при $\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \leq R$ имеем

$$\begin{aligned} \|Au\|_{C(\overline{D}_T)} &\leq \|L_0^{-1}\|_{C(\overline{D}_T) \rightarrow C(\overline{D}_T)} [|\lambda| \|u\|_{C(\overline{D}_T)}^{\alpha+1} + \|f\|_{C(\overline{D}_T)}] \\ &\leq G_T \sup_{(x,t) \in \overline{D}_T} \text{mes } D_{x,t} [|\lambda| \|u\|_{C(\overline{D}_T)}^{\alpha+1} + \|f\|_{C(\overline{D}_T)}] \\ &\leq G_T \text{mes } D_T [|\lambda| \|u\|_{C(\overline{D}_T)}^{\alpha+1} + \|f\|_{C(\overline{D}_T)}] \\ &= \frac{1}{2} G_T T^2 [|\lambda| \|u\|_{C(\overline{D}_T)}^{\alpha+1} + \|f\|_{C(\overline{D}_T)}] \leq \frac{1}{2} G_T T^2 [|\lambda| R^{\alpha+1} + \|f\|_{C(\overline{D}_T)}], \end{aligned} \quad (84)$$

где $G_T := \sup_{(x,t) \in \overline{D}_T, (x',t') \in \overline{D}_{x,t}} |G(x,t; x',t')| < +\infty$.

Зафиксируем произвольным образом положительное число T_0 . Тогда в силу оценки (84) при $0 < T \leq T_0$ будем иметь

$$\|Au\|_{C(\overline{D}_T)} \leq \frac{1}{2} G_{T_0} T^2 [|\lambda| R^{\alpha+1} + \|f\|_{C(\overline{D}_{T_0})}].$$

Отсюда в свою очередь следует, что если

$$T_*^2 := \min \left\{ T_0^2, \frac{2RG_{T_0}}{|\lambda|R^{\alpha+1} + \|f\|_{C(\overline{D}_{T_0})}} \right\},$$

то $\|Au\|_{C(\overline{D}_T)} \leq R$ при $\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \leq R$, $0 < T \leq T_*$. Этим теорема 4 доказана полностью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Бицадзе, *Некоторые классы уравнений в частных производных*, Наука, М., 1981.
- [2] F. John, "Blow-up of solutions of nonlinear wave equation in three space dimensions", *Manuscripta Math.*, **28**:1–3 (1979), 235–268.
- [3] F. John, "Blow-up for quasi-linear wave equations in three space dimensions", *Comm. Pure Appl. Math.*, **34**:1 (1981), 29–51.
- [4] F. John, S. Klainerman, "Almost global existence to nonlinear wave equations in three space dimensions", *Comm. Pure Appl. Math.*, **37**:4 (1984), 443–455.

- [5] T. Kato, “Blow-up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33**:4 (1980), 501–505.
- [6] V. Georgiev, H. Lindblad, C. Sogge, “Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations”, *Amer. J. Math.*, **119**:6 (1977), 1291–1319.
- [7] T. C. Sideris, “Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions”, *J. Differential Equations*, **52**:3 (1984), 378–406.
- [8] L. Hörmander, *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations*, Math. Appl. (Berlin), **26**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [9] S. I. Pohozaev, L. Véron, “Blow-up results for nonlinear hyperbolic inequities”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **29**:2 (2000), 393–420.
- [10] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, *Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных*, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001.
- [11] G. Todorova, E. Vitillaro, “Blow-up for nonlinear dissipative wave equations in $\mathbb{R}^n$ ”, *J. Math. Anal. Appl.*, **303**:1 (2005), 242–257.
- [12] Э. Гурса, *Курс математического анализа*, т. 3, ч. 1: Бесконечно близкие интегралы. Уравнения с частными производными, Гостехиздат, М.–Л., 1933.
- [13] Е. И. Моисеев, “О приближении классического решения задачи Дарбу гладкими решениями”, *Дифференц. уравнения*, **20**:1 (1984), 73–87.
- [14] Е. И. Моисеев, *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром*, Изд-во МГУ, М., 1988.
- [15] S. Kharibegashvili, *Goursat and Darboux Type Problems for Linear Hyperbolic Partial Differential Equations and Systems*, Mem. Differential Equations Math. Phys., **4**, Georgian Acad. Sci., Tbilisi, 1995.
- [16] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.
- [17] Д. Хенри, *Геометрическая теория полуминейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985.
- [18] М. Е. Лернер, “О качественных свойствах функции Римана”, *Дифференц. уравнения*, **27**:12 (1991), 2106–2120.
- [19] А. М. Нахушев, *Уравнения математической биологии*, Высшая школа, М., 1995.
- [20] М. М. Смирнов, *Уравнения смешанного типа*, Наука, М., 1970.
- [21] Р. Нарасимхан, *Анализ на действительных и комплексных многообразиях*, Мир, М., 1971.
- [22] Д. Гильбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.
- [23] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1993.
- [24] В. И. Жегалов, А. Н. Миронов, *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными*, Монографии по математике, **5**, Казанск. матем. общ-во, Казань, 2001.
- [25] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.

О. М. Джохадзе

Институт математики им. А. М. Размадзе, г. Тбилиси

E-mail: ojokhadze@yahoo.com

Поступило

06.08.2007

С. С. Харибегашвили

Институт математики им. А. М. Размадзе

E-mail: kharibegashvili@yahoo.com