Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Деревенский, ЛОДУ с постоянными коэффициентами над банаховой алгеброй, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 3, 365–380

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4079>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 13:21:16

УДК 517.9

ЛОДУ с постоянными коэффициентами над банаховой алгеброй

В. П. Деревенский

В статье определяются коэффициенты левосторонних линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами над некоммутативной банаховой алгеброй, обладающих решениями эйлера типа.

Библиография: 6 названий.

В работе дается модификация метода Л. Эйлера решения левосторонних линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами, заданными над некоммутативной банаховой алгеброй.

1. Постановка задачи. Пусть $\mathfrak{B}$ – банахова алгебра с единицей E , т.е. ассоциативная алгебра с непрерывным по обоим сомножителям произведением, являющаяся банаховым пространством над комплексным полем $\mathbb{C}$ [1; с. 346], $\mathfrak{A}$ – ее сужение на действительное поле $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}(t)$ – множество элементов $\mathfrak{A}$, зависящих от непрерывной переменной, а $\mathfrak{A}^k(t)$ – его подмножество k -го порядка непрерывной дифференцируемости, которая понимается в смысле предела по норме [1; с. 265].

Как известно, динамика сложных социально-экономических, технологических и многих других процессов описывается дифференциальными уравнениями над некоммутативными многообразиями, а точность их описания определяется порядками рассматриваемых уравнений, так что весьма актуальна задача интегрирования их для произвольных конечных порядков.

Разумеется, подобная задача, в первую очередь, должна быть поставлена для ЛОДУ N -го порядка (ЛОДУ. N), аналога наиболее исследованного класса скалярных дифференциальных уравнений высших порядков.

Как и в классическом случае решение неоднородного ЛОДУ. N над ассоциативной алгеброй методом вариации постоянных сводится к решению соответствующего однородного уравнения [2; с. 70, лемма]. Это позволяет и над $\mathfrak{A}$ ограничиваться рассмотрением однородных ЛОДУ.

В работах [2], [3] установлены достаточные условия разрешимости в квадратурах таких уравнений в случаях, когда они либо факторизуемы, либо эквивалентны системам односторонних ЛОДУ.1. Сложность определения их решений и условий на переменные коэффициенты заставляет искать альтернативные методы интегрирования отдельных видов ЛОДУ. N .

Естественным первым ограничением является постоянство коэффициентов линейных уравнений. В скалярном случае такие уравнения интегрируются методом

Эйлера, который сводит проблему интегрирования дифференциального уравнения к задаче решения полиномиального характеристического уравнения. Однако как известно со времен Н. Г. Абеля, подобные уравнения не разрешимы в радикалах для порядков, больших четырех. Для уравнений же над некоммутативным множеством проблемой является решение уравнений и меньших порядков.

Избежать эту проблему для $\mathfrak{A}$ удастся путем определения коэффициентов ЛОДУ, обладающих заданными видами решений. Метод Эйлера задает эти виды как комбинации показательных, тригонометрических и полиномиальных функций, которые определимы и над $\mathfrak{A}$.

Экспоненциальная функция над банаховой алгеброй задается в виде ряда $e^Q \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (1/n!) Q^n$, который равномерно сходится для любых ограниченных по норме Q [4; с. 91]. Это разложение экспоненты и справедливость над $\mathfrak{B}$ формулы Эйлера позволяют определить синус и косинус над $\mathfrak{A}$:

$$\sin Q \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!} Q^{2n-1}, \quad \cos Q \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} Q^{2n}, \quad Q^0 \equiv E, \quad (1)$$

где оба ряда, очевидно, также равномерно сходятся для любых ограниченных Q . При этом из вида функций (1) следует, что при $Q = Rt$ для них сохраняются классические правила дифференцирования. Полиномы же по t с коэффициентами из $\mathfrak{A}$ определяются как $P_N(t) = \sum_{n=0}^N C_n t^{N-n}$. Таким образом, все функции, используемые в методе Эйлера, существуют над $\mathfrak{A}$, что и позволяет находить ЛОДУ N , обладающие аналогами решений Л. Эйлера.

Вот в статье и ставится задача дать метод определения коэффициентов уравнения

$$\sum_{n=0}^N A_n X^{(N-n)} = 0, \quad A_0 = E, \quad A_n \in \mathfrak{A}, \quad \dot{A}_n = 0, \quad x \in \mathfrak{A}^N(t), \quad (2)$$

где $\dot{A}_n \equiv (d/dt)A_n$, для любых конечных порядков N в форме

$$X = \sum_{i=0}^{I_0} e^{Q_i t} \sum_{j=1}^{J_{i0}} K_{ij} t^{j-1} + \sum_{i=I_0+1}^I e^{Q_i t} \sum_{j=1}^{J_i} (\cos R_i t L_{ij} t^{j-1} + \cos R_i t M_{ij} t^{j-1}), \quad (3)$$

где $(Q_i R_i, K_{ij}, L_{ij}, M_{ij}) \subset \mathfrak{A}$, $\dot{Q}_i = \dot{R}_i = \dot{K}_{ij} = \dot{L}_{ij} = \dot{M}_{ij} = 0$, а I_0, I, J_{i0} и J_i — натуральные числа, удовлетворяющие равенству

$$\sum_{i=0}^{I_0} J_{i0} + 2 \sum_{i=I_0+1}^I J_i = N. \quad (4)$$

А так как для уравнения (2) над некоммутативным многообразием решение задачи Коши обладает специфическими особенностями, наряду с общими будут определяться решения, удовлетворяющие начальным условиям

$$X^{(n)}(t_0) = X_{0n}, \quad X_{0n} \in \mathfrak{A}, \quad \dot{X}_{0n} = 0, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (5)$$

2. ЛОДУ.2. Пояснить суть предлагаемой модификации метода Эйлера определения достаточных условий разрешимости линейных уравнений с постоянными

коэффициентами над банаховой алгеброй и выявить дополнительные условия на вид искомого решения (3) позволяют уже уравнения второго порядка:

$$\ddot{X} + A_1 \dot{X} + A_2 X = 0, \quad A_n \in \mathfrak{A}, \quad \dot{A}_n = 0, \quad n = 1, 2. \quad (6)$$

Прежде всего для него необходимо установить число и виды его существенно различных решений. Находятся они путем определения натуральных параметров I_0 , I , J_{i0} и J_i , связанных соотношением (4). В силу этого равенства при $N = 2$ пара (I_0, I) может принимать лишь два значения: $(2, 0)$ и $(0, 1)$. Первому из них соответствует два значения J_{i0} : $(J_{10}, J_{20}) = [(1, 1) \vee (2, 0)]$, а второму, очевидно, лишь одно. Следовательно, общее число различных вариантов значений натуральных параметров, определяющих виды решений уравнения (6), равно трем, и их можно записать как

$$X_1 = \sum_{i=1}^2 e^{Q_i t} K_{i0}, \quad (Q_i, K_{i0}) \subset \mathfrak{A}, \quad \dot{Q}_i = \dot{K}_{i0} = 0, \quad (7)$$

$$X_2 = e^{Q_1 t} \sum_{j=1}^2 K_{1j} t^{j-1}, \quad (Q_1, K_{1j}) \subset \mathfrak{A}, \quad \dot{Q}_1 = \dot{K}_{1j} = 0, \quad (8)$$

$$X_3 = e^{Q_1 t} (\cos R_1 t L_{10} + \sin R_1 t M_{10}), \quad (Q_1, R_1, L_{10}, M_{10}) \subset \mathfrak{A}, \quad (9)$$

$$\dot{Q}_1 = \dot{R}_1 = \dot{L}_{10} = \dot{M}_{10} = 0.$$

Найдем ЛОДУ.2, обладающие этими решениями.

Так как $X_1^{(k)} = \sum_{i=1}^2 Q_i^k e^{Q_i t} K_{i0}$, подставляя $\dot{X}_1$ и $\ddot{X}_2$ в (6), имеем

$$\sum_{i=1}^2 (Q_i^2 + A_1 Q_i + A_2) e^{Q_i t} K_{i0} = 0.$$

Очевидно, это равенство тождественно выполняется при $Q_i^2 + A_1 Q_i + A_2 = 0$. Эти два уравнения образуют систему линейных левосторонних алгебраических уравнений относительно параметров ЛОДУ.2 (6):

$$\begin{cases} A_1 Q_1 + A_2 = -Q_1^2, \\ A_1 Q_2 + A_2 = -Q_2^2. \end{cases} \quad (10)$$

Если разность $Q_1 - Q_2$ обратима в $\mathfrak{A}$, то решением этой системы будет

$$A_1 = (Q_2^2 - Q_1^2)(Q_1 - Q_2)^{-1}, \quad A_2 = (Q_1^2 - Q_2^2)(Q_1 - Q_2)^{-1} Q_1 - Q_1^2. \quad (11)$$

Тождественные преобразования позволяют записать

$$A_2 = (Q_1 - Q_2) Q_2 (Q_1 - Q_2)^{-1} Q_1.$$

Таким образом, можно сформулировать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Общим решением уравнения*

$$\ddot{X} + (Q_2^2 - Q_1^2)(Q_1 - Q_2)^{-1} \dot{X} + (Q_1 - Q_2) Q_2 (Q_1 - Q_2)^{-1} Q_1 X = 0, \quad (12)$$

$$Q_i \in \mathfrak{A}, \quad \dot{Q}_i = 0, \quad x \in \mathfrak{A}^2(t),$$

где $(Q_1 - Q_2)^{-1} \in \mathfrak{A}$, является

$$X = \sum_{i=1}^2 e^{Q_i t} C_i, \quad C_i \in \mathfrak{A}, \quad \dot{C}_i = 0, \quad (13)$$

а решением, удовлетворяющим начальным условиям

$$X(t_0) = X_{00}, \quad \dot{X}(t_0) = X_{01}, \quad X_{0n} \in \mathfrak{A}, \quad \dot{X}_{0n} = 0, \quad n = 0, 1, \quad (14)$$

является

$$X = e^{Q_1(t-t_0)}(Q_2 - Q_1)^{-1}(Q_2 X_{00} - X_{01}) + e^{Q_2(t-t_0)}(Q_2 - Q_1)^{-1}(X_{01} - Q_1 X_{00}). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как коэффициенты данного уравнения совпадают с (11), а все действия, проделанные при решении системы (10), обратимы, то X вида (13) обращают (12) в тождество. Убедимся в том, что найденное решение является общим, т.е. удовлетворяет условиям (14) для любых X_{0n} .

Действительно, для X вида (13) требования (14) записываются как

$$e^{Q_1 t_0} C_1 + e^{Q_2 t_0} C_2 = X_{00}, \quad Q_1 e^{Q_1 t_0} C_1 + Q_2 e^{Q_2 t_0} C_2 = X_{01}.$$

Эти равенства образуют линейную неоднородную левостороннюю систему относительно C_i . Так как по определению уравнения (12) разность $Q_1 - Q_2$ обратима в $\mathfrak{A}$, а экспонента обратима для любых показателей, эта система разрешима в виде

$$\begin{aligned} C_1 &= e^{-Q_1 t_0} (Q_2 - Q_1)^{-1} (Q_2 X_{00} - X_{01}), \\ C_2 &= e^{-Q_2 t_0} [X_{00} - (Q_2 - Q_1)^{-1} (Q_2 X_{00} - X_{01})], \end{aligned}$$

Тождественными преобразованиями C_2 приводится к следующей форме:

$$C_2 = e^{-Q_2 t_0} (Q_2 - Q_1)^{-1} (X_{01} - Q_1 X_{00}).$$

Так что, подставляя найденные C_i в (13), получаем (15), что и требовалось показать.

Для X_2 из (8) можно привести

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Общими, удовлетворяющими условиям (14) решениями уравнения

$$\ddot{X} - 2Q\dot{X} + Q^2 X = 0, \quad Q \in \mathfrak{A}, \quad \dot{Q} = 0, \quad X \in \mathfrak{A}^2(t), \quad (16)$$

соответственно являются

$$X = e^{Q t} (C_1 + C_2 t), \quad C_i \in \mathfrak{A}, \quad \dot{C}_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

и

$$X = e^{Q(t-t_0)} [(t-t_0)(X_{01} - QX_{00}) + X_{00}]. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для X из (17) справедливо равенство

$$X^{(k)} = Q^k X + kQ^{k-1} e^{Q t} C_2,$$

подставляя нужные производные в уравнение (16), получаем тождественное равенство

$$Q^2 X + 2Q e^{Q t} C_2 - 2Q(QX + e^{Q t} C_2) + Q^2 X \equiv 0.$$

Запишем условия (14) для решения (17):

$$e^{Qt_0}(C_1 + C_2 t) = X_{00}, \quad QX_{00} + e^{Qt_0}C_2 = X_{01}.$$

Из этой алгебраической системы константы интегрирования находятся как

$$C_1 = e^{-Qt_0}(X_{00} - t_0(X_{01} - QX_{00})), \quad C_2 = e^{-Qt_0}(X_{01} - QX_{00})$$

без каких либо ограничений на X_{0n} . Остается лишь подставить C_i в (17), чтобы после простых тождественных преобразований получить (18).

Рассмотрим последнюю форму решения Эйлера уравнения (6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Общим решением уравнения*

$$\begin{aligned} \ddot{X} - 2Q\dot{X} + (Q^2 + R^2)X &= 0, \\ (Q, R) &\subset \mathfrak{A}, \quad [Q, R] = 0, \quad \dot{Q} = \dot{R} = 0, \quad R^{-1} \in \mathfrak{A}, \end{aligned} \quad (19)$$

является

$$X = e^{Qt}(\cos RtC_1 + \sin RtC_2), \quad C_i \in \mathfrak{A}, \quad \dot{C}_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

а решением, удовлетворяющим начальным условиям (14), является

$$X = e^{Q(t-t_0)}[\cos R(t-t_0)X_{00} + R^{-1} \sin R(t-t_0)(X_{01} - QX_{00})]. \quad (21)$$

Для упрощения доказательства предложения 3 будет полезна

ЛЕММА. *Функции (1) удовлетворяют основному тригонометрическому тождеству в виде $\sin^2 Q + \cos^2 Q \equiv E$ и обычным правилам сложения коммутирующих аргументов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения аналогично скалярному случаю. Рассмотрим над $\mathfrak{B}$ экспоненциальную функцию $\exp iR$, где $R \in \mathfrak{A}$. Перемножая члены ряда этой экспоненты, получаем формулу Эйлера $\exp iR = \cos R + i \sin R$.

Так как для коммутирующих A и B $\exp A \exp B = \exp(A + B)$, умножая $\exp iR$ на $\exp(-iR)$, имеем

$$\exp 0 \equiv E = (\cos R + i \sin R)(\cos R - i \sin R) = \cos^2 R + \sin^2 R + (\sin R \cos R - \cos R \sin R).$$

Однако перестановочность всех членов рядов (1) влечет перестановочность функций, определяемых ими. Следовательно, разность, стоящая в скобках, равна нулю, т.е. основное тригонометрическое тождество выполняется и над банаховой алгеброй.

Пусть A и B – коммутирующие между собой элементы $\mathfrak{A}$. Тогда

$$\begin{aligned} \exp iA \exp iB &= \exp i(A + B) = \cos(A + B) + i \sin(A + B) \\ &= (\cos A + i \sin A)(\cos B + i \sin B) \\ &= \cos A \cos B - \sin A \sin B + i(\sin A \cos B + \cos A \sin B). \end{aligned}$$

Приравнивая действительные и мнимые части двух видов произведения, получаем школьные формулы для косинуса и синуса суммы аргументов. Что и требовалось показать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Для X вида (20) справедливы формулы

$$\begin{aligned}\dot{X} &= QX + e^{Qt}R(-\sin RtC_1 + \cos RtC_2), \\ \ddot{X} &= (Q^2 - e^{Qt}R^2e^{-Qt})X + 2Qe^{Qt}R(-\sin RtC_1 + \cos RtC_2).\end{aligned}$$

Так как по условию предложения 3 $[Q, R] = 0$, сомножитель при X в $\ddot{X}$ обращается в разность $Q^2 - R^2$. Так что, подставляя эти производные в уравнение (19), имеем

$$\begin{aligned}(Q^2 - R^2)X + 2QRe^{Qt}(-\sin RtC_1 + \cos RtC_2) \\ - 2Q(QX + e^{Qt}R(-\sin RtC_1 + \cos RtC_2)) + (Q^2 + R^2)X \equiv 0.\end{aligned}$$

Следовательно, (20) определяет решение уравнения (19). Убедимся в его общности. Для этого запишем условия (14)

$$e^{Qt_0}(\cos Rt_0C_1 + \sin Rt_0C_2) = X_{00}, \quad QX_{00} + e^{Qt_0}R(-\sin Rt_0C_1 + \cos Rt_0C_2) = X_{01}.$$

Так как экспонента обратима всегда, а R – по условию предложения 3, записанные равенства эквивалентны системе левосторонних линейных уравнений

$$\begin{cases} \cos Rt_0C_1 + \sin Rt_0C_2 = e^{-Qt_0}, \\ -\sin Rt_0C_1 + \cos Rt_0C_2 = R^{-1}e^{-Qt_0}(X_{01} - QX_{00}), \end{cases}$$

из которой определяются C_i . Чтобы найти эти константы, умножим слева на $\cos Rt_0$ первое уравнение, на $\sin Rt_0$ – второе, и вычтем из первого второе. Тогда, в силу коммутативности тригонометрических функций и доказанного выше основного тригонометрического тождества мы получаем

$$C_1 = \cos Rt_0e^{-Qt_0}X_{00} - \sin Rt_0R^{-1}e^{-Qt_0}(X_{01} - QX_{00}).$$

Так как по условию предложения 3 Q и R перестановочны, полученную константу можно записать как

$$e^{-Qt_0}(\cos Rt_0X_{00} - R^{-1}\sin Rt_0(X_{01} - QX_{00})).$$

Складывая же уравнения системы, после умножения первого уравнения на $\sin Rt_0$, а второго на $\cos Rt_0$, получаем

$$\begin{aligned}C_2 &= \sin Rt_0e^{-Qt_0}X_{00} + \cos Rt_0R^{-1}e^{-Qt_0}(X_{01} - QX_{00}) \\ &\equiv e^{-Qt_0}(\sin Rt_0X_{00} + R^{-1}\cos Rt_0(X_{01} - QX_{00})).\end{aligned}$$

Так как C_i найдены без ограничений на X_{0n} , то X из (20) является общим решением уравнения (19).

Если же найденные константы подставить в X , то это решение принимает вид

$$\begin{aligned}X &= e^{Qt}[\cos Rte^{-Qt_0}(\cos Rt_0X_{00} - R^{-1}\sin Rt_0(X_{01} - QX_{00})) \\ &\quad + \sin Rte^{-Qt_0}(\sin Rt_0X_{00} + \cos Rt_0R^{-1}(X_{01} - QX_{00}))].\end{aligned}$$

Пользуясь перестановочностью Q и R , полученное решение можно записать так

$$\begin{aligned}X &= e^{Q(t-t_0)}[(\cos Rt \cos Rt_0 + \sin Rt \sin Rt_0)X_{00} \\ &\quad + R^{-1}(\sin Rt \cos Rt_0 - \cos Rt \sin Rt_0)(X_{01} - QX_{00})],\end{aligned}$$

что в соответствии со второй частью леммы сводится к (21).

Таким образом, над $\mathfrak{A}$ определены три типа разрешимых в эйлеровом виде (3) левосторонних однородных ЛОДУ.2 с постоянными коэффициентами. Их решения аналогичны решениям скалярных уравнений, имеющих действительные различные, двукратные и комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения. Эту аналогию подтверждают и некоторые из отмечаемых ниже фактов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Параметр A_2 из системы (10) может находиться в двух видах. Из первого уравнения он был найден в (11). Из второго же его можно определить как

$$A_2 = -Q_2^2 - (Q_2^2 - Q_1^2)(Q_1 - Q_2)^{-1}Q_2.$$

Тождественные преобразования позволяют записать его так:

$$A_2 = (Q_1 - Q_2)Q_1(Q_1 - Q_2)^{-1}Q_2.$$

Следовательно, для X вида (13) можно определить еще одно ЛОДУ.2, решением которого он является:

$$\ddot{X} + (Q_2^2 - Q_1^2)(Q_1 - Q_2)^{-1}\dot{X} + (Q_1 - Q_2)Q_1(Q_1 - Q_2)^{-1}Q_2X = 0. \quad (22)$$

Однако можно показать, что две формы параметра A_2 эквивалентны. Действительно, из тождества

$$Q_2^2 - Q_1^2 \equiv (Q_2^2 - Q_1^2)(Q_1 - Q_2)^{-1}(Q_1 - Q_2)$$

следует, что

$$-Q_1^2 - (Q_2^2 - Q_1^2)(Q_1 - Q_2)^{-1}Q_1 = -Q_2^2 - (Q_2^2 - Q_1^2)(Q_1 - Q_2)^{-1}Q_2. \quad (23)$$

Таким образом, уравнения (12) и (22) являются эквивалентными, а второе из них можно использовать лишь в качестве альтернативной формы первого.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для данных в предложениях 1–3 ЛОДУ.2 можно определить три алгебраических левосторонних уравнения второй степени, являющихся аналогами характеристических уравнений скалярного метода Эйлера $K^2 + A_1K + A_2 = 0$. Их решения связаны с решениями ЛОДУ.2 так же, как в классическом случае. Непосредственной подстановкой легко убедиться в том, что уравнение

$$K^2 + (Q_2^2 - Q_1^2)(Q_1 - Q_2)^{-1}K + (Q_1 - Q_2)Q_2(Q_1 - Q_2)^{-1}Q_1 = 0 \quad (24)$$

имеет корень $K = Q_1$, а равенство (23) позволяет доказать, что и Q_2 обращает (24) в тождество. Этот факт дает возможность следующим образом перенести на $\mathfrak{A}$ средневековую теорему Виета.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если в уравнении

$$K^2 + A_1K + A_2 = 0 \quad (25)$$

над $\mathfrak{A}$

$$A_1 = (Q_2^2 - Q_1^2)(Q_1 - Q_2)^{-1}, \quad A_2 = (Q_1 - Q_2)Q_2(Q_1 - Q_2)^{-1}Q_1,$$

то оно имеет два решения $K_i = Q_i$ с обратимой над $\mathfrak{A}$ разностью $(K_1 - K_2)^{-1} \in \mathfrak{A}$.

При этом следует иметь в виду, что корнями уравнения (25) с A_n , данными в предложении 3, являются элементы $\mathfrak{B}$ привычного вида. Если Q и R перестановочны, то $K_{1,2} = Q \pm iR$ обращают уравнение (25) вида $K^2 - 2QK + (Q^2 + R^2) = 0$ в тождество.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как следует из формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа [5; с. 191] равенство $\exp(A + B) = \exp A \exp B$ справедливо лишь для перестановочных A и B . Следовательно, требование коммутативности Q и R в предложении 3 является необходимым и достаточным для того, чтобы метод Эйлера мог использоваться в экспоненциальном виде над $\mathfrak{B}$ с комплексно-сопряженными корнями уравнения (25). Действительно, так как над $\mathfrak{B}$ справедлива формула Эйлера, перестановочность Q и R позволяет записывать частные решения уравнения (19) в виде $X_{1,2} = \exp(Q \pm iR)t$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Начальные условия (14), рассматривавшиеся в предложениях 1–3, соответствуют традиционной их форме (5). Они могут быть заменены на более общие. Это не создает принципиальных трудностей для нахождения решений в видах (15), (18) и (21), но ведет к заметному усложнению их записи.

ПРИМЕР. Пусть $\mathfrak{A}$ – множество (2×2) -матриц $\mathfrak{M}_2$ над $\mathfrak{R}$, в котором параметры уравнения (6) в целях явного определения решения задаются в нижнетреугольной форме:

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{n1} & 0 \\ a_{n2} & a_{n3} \end{pmatrix}, \quad a_{n\alpha} \in \mathfrak{R}, \quad \dot{a}_{n\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad n = 1, 2, \quad (26)$$

где $D_s \equiv a_{1s}^2 - 4a_{2s} > 0$, $s = 1, 3$, $a_{11} - a_{13} \neq \pm(\sqrt{D_1} + \sqrt{D_3})$.

Так как множество треугольных матриц является подалгеброй $\mathfrak{M}_2$, частные решения рассматриваемого уравнения можно определить как

$$X_n = \exp Q_n t, \quad Q_n = \begin{pmatrix} q_{n1} & 0 \\ q_{n2} & q_{n3} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$q_{n\alpha} \in \mathfrak{R}, \quad \dot{q}_{n\alpha} = 0, \quad (q_{11} - q_{21})(q_{13} - q_{23}) \neq 0,$$

где последнее требование обеспечивает обратимость разности $Q_1 - Q_2$.

В рассматриваемом случае предложение 1 связывает компоненты данных и искомым матриц соотношениями (12), которые мы запишем как

$$(Q_2^2 - Q_1^2)(Q_1 - Q_2)^{-1} = A_1, \quad (Q_1 - Q_2)Q_2(Q_1 - Q_2)^{-1}Q_1 = A_2. \quad (28)$$

Эта матричная система эквивалентна скалярной системе шести уравнений с шестью неизвестными

$$\begin{cases} q_{11} + q_{21} = -a_{11}, \\ q_{13} + q_{23} = -a_{13}, \\ \frac{1}{q_{11} - q_{21}}(q_{22}(q_{21} - q_{13}) + q_{12}(q_{23} - q_{11})) = a_{12}, \\ q_{11}q_{21} = a_{21}, \\ q_{13}q_{23} = a_{23}, \\ \frac{1}{q_{11} - q_{21}}(q_{21}q_{12}(q_{13} - q_{23}) - q_{11}q_{22}(q_{21} - q_{13})) = a_{22}, \end{cases}$$

которая распадается на три подсистемы:

$$\begin{cases} q_{1s} + q_{2s} = -a_{1s}, \\ q_{1s}q_{2s} = a_{2s}, \end{cases} \quad s = 1, 3, \quad (29)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{q_{11} - q_{21}}(q_{22}(q_{21} - q_{13}) + q_{12}(q_{23} - q_{11})) = a_{12}, \\ \frac{1}{q_{11} - q_{21}}(q_{21}q_{12}(q_{11} - q_{23}) - q_{11}q_{22}(q_{21} - q_{13})) = a_{22}. \end{cases}$$

Так как по условию, наложенному в (26) на дискриминанты D_s , $a_{1s}^2 > 4a_{2s}$, первые две подсистемы в (29) имеют решения

$$q_{ns} = -\frac{1}{2}(a_{1s} + (-1)^{n+1}\sqrt{D_s}), \quad n = 1, 2, \quad s = 1, 3, \quad (30)$$

а третья –

$$q_{12} = \frac{a_{22} + a_{12}q_{11}}{q_{23} - q_{11}}, \quad q_{22} = \frac{a_{22} + a_{12}q_{21}}{q_{13} - q_{21}}. \quad (31)$$

При этом второе неравенство в (26) обеспечивает неравенство нулю знаменателей q_{n2} .

Таким образом, компоненты матриц Q_n выражены через компоненты A_n и необходимо убедиться в том, что общим решением рассматриваемого уравнения является (13) с найденными Q_n . Для этого определим матричные экспоненты частных решений (27).

Так как для Q_n из (27) справедливо соотношение

$$Q_n^k = \begin{pmatrix} q_{n1}^k & 0 \\ q_{n2} \sum_{l=0}^{k-1} q_{n1}^l q_{n3}^{k-1-l} & q_{n3}^k \end{pmatrix},$$

в силу условия $q_{n1} \neq q_{n3}$ можно эти степени представить в виде

$$Q_n^k = \begin{pmatrix} q_{n1}^k & 0 \\ \frac{q_{n2}}{q_{n1} - q_{n3}}(q_{n1}^k - q_{n3}^k) & q_{n3}^k \end{pmatrix}.$$

Следовательно, частными решениями ЛОДУ.2 являются

$$X_n = \exp Q_n t = \begin{pmatrix} \exp q_{n1} t & 0 \\ \frac{q_{n2}}{q_{n1} - q_{n3}}(\exp q_{n1} t - \exp q_{n3} t) & \exp q_{n3} t \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Нетрудно убедиться в том, что обе найденные матрицы удовлетворяют уравнениям $R_n \equiv Q_n^2 + A_1 Q_n + A_2 = 0$. Действительно, так как множество треугольных матриц является подалгеброй алгебры квадратных матриц, наддиагональные элементы R_n тождественно равны нулю. Диагональные же элементы согласно (30) имеют вид

$$q_{ns}^2 + a_{1s}q_{ns} + a_{2s} = \left[-\frac{1}{2}(a_{1s} + (-1)^{n+1}\sqrt{D_s}) \right]^2 + a_{1s} \left[-\frac{1}{2}(a_{1s} + (-1)^{n+1}\sqrt{D_s}) \right] + a_{2s} \equiv 0.$$

Ненулевой внедиагональный элемент записывается как

$$q_{n2}(q_{n1} + q_{n3}) + a_{12}q_{n1} + a_{13}q_{n2} + a_{22}.$$

В соответствии с (31) для $n = 1$ этот многочлен преобразуется так:

$$\frac{a_{22} + a_{12}q_{11}}{q_{23} - q_{11}}(q_{11} + q_{13} + a_{13}) + a_{12}q_{11} + a_{22} \equiv \frac{a_{22} + a_{12}q_{11}}{q_{23} - q_{11}}(q_{13} + q_{23} + a_{13}),$$

где вторая скобка, как следует из (30), тождественно равна нулю. Для $n = 2$ аналогичный элемент принимает форму

$$\begin{aligned} q_{22}(q_{21} + q_{23}) + a_{12}q_{21} + a_{13}q_{22} + a_{22} &= \frac{a_{22} + a_{12}q_{21}}{q_{13} - q_{21}}(q_{21} + q_{23} + a_{13}) + a_{12}q_{21} + a_{22} \\ &= \frac{a_{22} + a_{12}q_{21}}{q_{13} - q_{21}}(a_{13} + q_{13} + a_{23}) \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким образом, X_n из (32) являются частными решениями исходного уравнения, а $X = \sum_{n=1}^2 X_n C_n$, где C_n – постоянные (2×2) -матрицы, его общим решением.

3. ЛОДУ. N . Предлагаемая модификация метода Эйлера определения достаточных условий разрешимости линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами позволяет находить подобные уравнения, обладающие заданным видом их решений. Правда, для каждого N существует K_N структур эйлеровых функций (3), число которых, во-первых, больше N , а во-вторых, растет с увеличением порядка уравнения в соответствии с числом различных совокупностей (J_{i0}, I_0, J_i, I) в равенстве (4). Следовательно, с увеличением порядка рассматриваемого ЛОДУ еще быстрее растет число достаточных условий их разрешимости в форме (3). Тем не менее, так как дифференцирование функций (3) не имеет принципиальных трудностей, а решение систем односторонних линейных алгебраических уравнений над $\mathfrak{A}$ определимо в символах операторов Гаусса [2; с. 64], для заданной структуры функции (3) можно определить коэффициенты ЛОДУ. N , обладающего эйлеровым решением (3). Однако запись коэффициентов ЛОДУ. N в общем случае задания такого решения настолько громоздка и труднообозрима, что вряд ли может считаться целесообразной. Поэтому полезнее рассмотреть наиболее важные частные случаи достаточных условий разрешимости ЛОДУ. N .

Для этого нам понадобятся переформулировки на случай $\mathfrak{A}$ некоторых введенных в работе [6] понятий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Левым оператором Гаусса* обратимого элемента последовательности (A_i) , $i = 1, \dots, I$, называется оператор $\Gamma(A_i)$, действующий на последовательность (Y_j) , $j = 1, \dots, J$, перемножающийся по правилам

$$\Gamma(A_i)Y_j \equiv Y_j - A_j A_i^{-1} Y_i, \quad (33)$$

$$\Gamma(B_k)\Gamma(A_i)Y_j \equiv \Gamma(\Gamma(A_i|B_k)(\Gamma(A_i)Y_j)). \quad (34)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Правым оператором Гаусса* обратимого элемента последовательности (A_i) , $i = 1, \dots, I$, называется оператор $\tilde{\Gamma}(A_i)$, действующий на последовательность (Y_j) , $j = 1, \dots, J$, и перемножающийся по правилам

$$Y_j \tilde{\Gamma}(A_i) \equiv Y_j - Y_i A_i^{-1} A_j, \quad (35)$$

$$Y_j \tilde{\Gamma}(A_i) \tilde{\Gamma}(B_k) \equiv (Y_j \tilde{\Gamma}(A_i)) \tilde{\Gamma}(B_k \tilde{\Gamma}(A_i)). \quad (36)$$

В символах введенных операторов можно дать следующие достаточные условия разрешимости ЛОДУ. N .

ТЕОРЕМА 1. Если в уравнении (2) коэффициенты A_n имеют вид

$$A_n = -Q_n^N \prod_{k=n-1}^1 \tilde{\Gamma}(Q_k^{N-k}) \prod_{\tau=n+1}^N \tilde{\Gamma}(Q_\tau^{N-\tau}) \left[Q_n^{N-n} \prod_{k=n-1}^1 \tilde{\Gamma}(Q_k^{N-k}) \right]^{-1}, \quad (37)$$

где Q_n – постоянные элементы $\mathfrak{A}$ с такой нумерацией, при которой обратимы все сомножители произведения

$$D \equiv (Q_2 - Q_1) \prod_{j=3}^{N-1} \left((Q_j^{j-1} - Q_1^{j-1}) \prod_{k=1}^{j-1} \tilde{\Gamma}(Q_{j-k}^{j-k-1} - Q_1^{j-k-1}) \right), \quad (38)$$

то его общим решением является

$$X = \sum_{i=1}^N \exp Q_i t C_i, \quad C_i \in \mathfrak{A}, \quad \dot{C}_i = 0, \quad (39)$$

а решением, удовлетворяющим начальным условиям (5), является (39) с константами интегрирования, связанными с X_{0n} соотношениями

$$C_i = \exp(-Q_i t_0) \left[\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(Q_k^{k-1}) Q_i^k \right]^{-1} \prod_{\tau=N}^{i+1} \Gamma(Q_\tau^{\tau-1}) \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(Q_k^{k-1}) X_{0i-1} \right). \quad (40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для X из (39) производные k -го порядка определяются как $X^{(k)} = \sum_{i=1}^N Q_i^k \exp Q_i t C_i$, подставляя их в (2), имеем

$$\sum_{n=0}^N A_n \sum_{i=1}^N Q_i^{N-n} \exp Q_i t C_i = 0,$$

что приводится к виду

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{n=0}^N A_n Q_i^{N-n} \right) e^{Q_i t} C_i = 0.$$

Достаточным условием этого равенства является, очевидно, $\sum_{n=0}^N A_n Q_i^{N-n} = 0$. Совокупность этих равенств можно рассматривать как правостороннюю систему алгебраических линейных уравнений, определяющих A_n , которую можно записать как

$$\sum_{n=1}^N A_n Q_i^{N-n} = -Q_i^N, \quad n = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, N. \quad (41)$$

Для A_{N-n} коэффициенты этой системы образуют матрицу Вандермонда (Q_i^{N-n}) . Согласно [6; с. 34] система $\sum_{i=1}^N X_i A_j^i = B_j$, $i, j = 1, \dots, N$, над $\mathfrak{A}$ является невырожденной, если в ней обратимы все сомножители произведения

$$A_1^1 \prod_{i=2}^{N-1} \left(A_i^i \prod_{k=1}^{i-1} \tilde{\Gamma}(A_{i-k}^{i-k}) \right).$$

Для матрицы Вандермонда это произведение обращается в D из (38). Следовательно, требование, наложенное в теореме 1 на Q_n , обеспечивает невырожденность системы (41). Решение ее в соответствии с теоремой 2 работы [6] и записано в (37). Так как все действия, проделываемые при решении системы (41), обратимы, заданные в (37) A_n определяют достаточные условия разрешимости уравнения (2) в виде (39).

Общность этого решения доказывается обычным образом. Так как требования (5) означают совокупность равенств

$$\sum_{i=1}^N Q_i^n \exp Q_i t_0 C_i = X_{0n}, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (42)$$

можно показать, что для любых X_{0n} C_i находятся без дополнительных ограничений на Q_i . Действительно, (42) является левосторонней системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $Y_i \equiv e^{Q_i t_0} C_i$. Эта система является невырожденной, так как совокупность ее коэффициентов вновь образует матрицу Вандермонда над $\mathfrak{A}$, которая при наложенных на Q_i ограничениях обратима. В соответствии с теоремой 1 работы [6] Y_i из нее находятся в виде правых сомножителей экспонент правых частей равенств (40) для любых Q_i , удовлетворяющих условиям доказываемой теоремы. Так что C_i находятся из определений Y_i как $C_i = \exp(-Q_i t_0) Y_i$ без ограничений на Q_i , так как экспонента обратима всегда. Именно эти равенства и даны в определении (40) констант C_i .

Второй важный случай достаточных условий разрешимости уравнения (2) в эйлеровом виде (3) определяет

ТЕОРЕМА 2. Если в уравнении (2) коэффициенты A_n рекуррентно задаются как

$$A_n = - \sum_{\alpha=N}^{N-n+1} C_\alpha^{N-\alpha} A_{N-\alpha} Q^{\alpha+n-N}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (43)$$

где C_α^{N-n} — числа сочетаний, а Q — постоянный элемент $\mathfrak{A}$, то его общим решением является

$$X = \exp Qt \sum_{i=1}^N C_i t^{i-1}, \quad C_i \in \mathfrak{A}, \quad \dot{C}_i = 0, \quad (44)$$

а решением, удовлетворяющим условиям (5), является (44) с константами интегрирования, задаваемыми рекуррентным соотношением

$$C_i = \frac{1}{(i-1)!} \left\{ e^{-Qt_0} \sum_{j=0}^{i-1} C_{i-1}^j (-Q)^j X_{0(i-j-1)} - \sum_{k=i+1}^N \prod_{q=1}^{k-1} (k-q) C_k t^{k-1} \right\},$$

$$i = 1, \dots, N-1, \quad (45)$$

$$C_N = \frac{1}{(N-1)!} e^{Qt_0} \sum_{j=0}^{N-1} C_{N-1}^j (-Q)^j X_{0(N-j-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как над $\mathfrak{A}$ справедлива формула Г. Лейбница кратного дифференцирования произведения, для X из (44) можно записать производную k -го

порядка как

$$X^{(k)} = \sum_{l=k}^0 C_k^l Q^l e^{Qt} \sum_{i=k-l+1}^N \prod_{q=1}^{k-l+1} (i-q) C_i t^{i-k+l}, \quad (46)$$

где C_k^l – число сочетаний из k элементов по l . Подставим эти производные в (2), делая замену $k \rightarrow N-n$ и сокращая на экспоненту. Тогда это уравнение принимает вид

$$\sum_{n=0}^N A_n \sum_{l=N-n}^0 C_{N-n}^l Q^l \sum_{i=N-n-l+1}^N \prod_{q=1}^{N-n-l+1} (i-q) C_i t^{i-N+n+l} = 0.$$

Собирая и приравнявая нулю коэффициенты при

$$e^{Qt} \sum_{i=N-n-l+1}^N \prod_{q=1}^{N-n-l+1} t^{i-N+n+l},$$

получаем для определения A_n правостороннюю линейную алгебраическую систему, которая при замене $N-n = \alpha$ записывается как

$$\sum_{\alpha=N}^{i-1} C_{\alpha}^{i-1} A_{N-\alpha} Q^{\alpha-i+1} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (47)$$

Полученная система является верхне-треугольной. Последними слагаемыми ее i -го уравнения является A_{N-i+1} , так как при $\alpha = i-1$ $C_{\alpha}^{i-1} = 1$, а $Q^{\alpha-i+1} = E$. Тривиальный перенос за знак равенства остальных членов каждого уравнения и дает

$$A_{N-i+1} = - \sum_{\alpha=N}^i C_{\alpha}^{i-1} A_{N-\alpha} Q^{\alpha-i+1}.$$

Если в этом равенстве сделать замену $N-i+1 = n$, то оно принимает вид (43). Следовательно, наложенные в этом равенстве условия на параметры уравнения (2) обращают его в тождество $0 \equiv 0$ при подстановке в него X вида (44). То есть приведенная в (44) функция является решением ЛОДУ.2 (2).

Для обоснования общности этого решения потребуем, чтобы оно удовлетворяло условиям (5). Формула (46) позволяет записать эти условия в форме

$$\sum_{l=n}^0 C_n^l Q^l e^{Qt_0} \sum_{i=n-l+1}^N \prod_{q=1}^{n-l+1} (i-q) t^{i-n+l} C_i = X_{0n}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (48)$$

Совокупность этих равенств является линейной по C_i системой. Расписывая ее для $n=0$ и $n=1$, имеем соответственно

$$e^{Qt_0} \sum_{i=1}^N C_i t_0^{i-1} = X_{00} \quad \text{и} \quad QX_{00} + e^{Qt_0} \sum_{i=2}^N (i-1) C_i t_0^{i-2} = X_{01}.$$

Эти уравнения, очевидно, можно записать как

$$\sum_{i=1}^N C_i t_0^{i-1} = e^{-Qt_0} X_{00}, \quad \sum_{i=2}^N (i-1) C_i t_0^{i-2} = e^{-Qt_0} (X_{01} - QX_{00}).$$

Аналогичные преобразования остальных уравнений позволяют записать (48) в виде

$$\sum_{i=n}^N \prod_{q=1}^{n-1} (i-q) C_i t_0^{i-n} = e^{-Q t_0} \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j (-Q)^j X_{0(n-j-1)}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (49)$$

Совокупность этих равенств является верхне-треугольной системой относительно C_i . Последнее уравнение в ней ($n = N$) определяет последнюю константу интегрирования как C_N из (45). Так что перенос в каждом из уравнений системы всех слагаемых кроме последнего из левой части в правую позволяет записать C_i , $i = 1, \dots, N-1$, в форме (45). А так как все проделанные при этом операции обратимы, во-первых, и не ограничивают значений X_{0n} , во-вторых, то X вида (44) является общим решением уравнения (2) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям теоремы 2.

Пределные случаи, рассмотренные в теоремах 1, 2 должна дополнить

ТЕОРЕМА 3. Если в уравнении (2) коэффициенты A_n удовлетворяют совокупности I систем вида

$$\sum_{\alpha=N}^{N-J_i-1} C_{\alpha}^{N-J_i-1} A_{N-\alpha} Q_i^{\alpha-N+J_i+1} = 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad \sum_{i=1}^I J_i = N, \quad J_{i+1} \geq J_i, \quad (50)$$

где Q_i – постоянные элементы $\mathfrak{A}$, имеющие обратимые разности всех одинаковых степеней, а C_{α}^m – числа сочетаний, то решением этого ЛОДУ N является

$$X = \sum_{i=1}^I \exp Q_i t \sum_{j=1}^{J_i} C_{ij} t^{j-1}, \quad C_{ij} \in \mathfrak{A}, \quad \dot{C}_{ij} = 0, \quad (51)$$

где натуральные числа I и J_i связаны соотношением $\sum_{i=1}^I J_i = N$, причем, J_i равно числу первых уравнений системы (50), которые Q_i обращает в тождество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как X является суммой I произведений вида (44), пронумерованных индексом i , а дифференцирование является линейной операцией, достаточным условием того, чтобы X был решением уравнения (2), является (47), в котором $i-1$ заменяется на натуральные числа m , принимающие значения от 0 до $M \leq N-1$. При $m = 0$ и $m = N-1$ это дает случаи, рассмотренные в теоремах 1 и 2, соответственно. В (50) и записана совокупность равенств (47) с указанной заменой и введенной нумерацией Q_i . Следовательно, условие (50) делает каждое из суммируемых по i слагаемых в (51) решением уравнения (2). Значит, и вся сумма, определяющая X , также является им.

При этом требование обратимости разностей одинаковых степеней обеспечивает разрешимость системы (50) относительно A_n .

А так как для каждого i выполняется J_i первых уравнений системы (50), в силу введенной упорядоченности J_i , $J_{i+1} \gg J_i$, для каждого i берется J_i первых уравнений системы (50).

Общность решения (51) доказывается аналогично двум предыдущим случаям (теоремы 1, 2). Метод решения системы, определяющей C_{ij} , объединяет методы решения аналогичных систем теорем 1 и 2 в соответствии с объединением в решении (51) решений (39) и (44).

Рассмотрим еще один важный случай ЛОДУ N .

ТЕОРЕМА 4. Если в уравнении (2) $N = 2K$, а коэффициенты A_n имеют вид

$$A_n = -P_{Nn} \prod_{k=n-1}^1 \tilde{\Gamma}(P_{kN-k}) \prod_{\tau=n+1}^N \tilde{\Gamma}(P_{\tau N-\tau}) \left[P_{nN-n} \prod_{k=n-1}^1 \tilde{\Gamma}(P_{kN-k}) \right]^{-1}, \quad (52)$$

где $\tilde{\Gamma}$ – операторы Гаусса, введенные в определении 2, причем

$$P_{nj} \equiv \begin{cases} P_{n1j}, & j = 1, \dots, K, \\ P_{n2j}, & j = K+1, \dots, 2K, \end{cases} \quad (53)$$

определяются рекуррентными соотношениями для $P_{n\alpha j}$, $\alpha = 1, 2$,

$$\begin{aligned} P_{n+11j} &= P_{n1j}Q_j - P_{n2j}R_j, & P_{n+12j} &= P_{n1j}R_j + P_{n2j}Q_j, \\ P_{01j} &= 1, & P_{02j} &= 0, & [Q_i, R_i] &= 0, \end{aligned} \quad (54)$$

в которых Q_j и R_j – постоянные элементы $\mathfrak{A}$ с такой нумерацией индексов n и j в (53), что все множители, стоящие в квадратных скобках в (52), обратимы, то решением этого ЛОДУ N является

$$X = \sum_{i=1}^K \exp Q_i t (\cos R_i t C_{i1} + \sin R_i t C_{i2}), \quad (55)$$

где $C_{i\alpha}$ – постоянные элементы $\mathfrak{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим производную от X . Очевидно, в силу перестановочности Q_i и R_i

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^K (Q_i F_{i1} + R_i F_{i2}),$$

где

$$F_{i1} \equiv e^{Q_i t} (\cos R_i t C_{i1} + \sin R_i t C_{i2}), \quad F_{i2} \equiv e^{Q_i t} (-\sin R_i t C_{i1} + \cos R_i t C_{i2}).$$

В символах $P_{n\alpha j}$, введенных в (54) рекуррентными соотношениями первого порядка,

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^K (P_{11j} F_{i1} + P_{12j} F_{i2}),$$

так как при заданных начальных условиях рекуррентного соотношения

$$P_{11j} = P_{01j}Q_j - P_{02j}R_j = Q_j, \quad P_{12j} = P_{01j}R_j + P_{02j}Q_j = R_j.$$

Индукцией можно получить производную любого порядка в виде

$$X^{(k)} = \sum_{j=1}^K (P_{k1j} F_{j1} + P_{k2j} F_{j2}). \quad (56)$$

Подставляя эти производные в уравнение (2), получаем равенство

$$\sum_{n=0}^N A_n \sum_{j=1}^K (P_{N-n1j} F_{j1} + P_{N-n2j} F_{j2}) = 0.$$

Достаточным условием его обращения в тождество является совокупность равенств

$$\sum_{n=0}^N A_n P_{N-n\alpha j} = 0, \quad (57)$$

которые образуют систему N уравнений с N неизвестными A_n . Так как $A_N = E$, после введения ее коэффициентов соотношениями (53) систему (57) можно записать в традиционной форме системы правосторонних алгебраических линейных неоднородных уравнений, решение которой, как отмечалось выше, дается в виде (52). Невырожденность этой системы и обеспечивается условием обратимости в $\mathfrak{A}$ всех сомножителей, стоящих в квадратных скобках правой части (52).

Таким образом, наложенные на A_n требования (52) обеспечивают достаточные условия разрешимости уравнения (2) в форме (55).

Хотя используемый метод определения вида ЛОДУ N , обладающего эйлеровым решением, позволяет рассматривать случай, аналогичный случаю кратных комплексных корней характеристического уравнения скалярной теории, рассматривать его нецелесообразно ввиду громоздкости получаемых условий. Однако для достаточно малых порядков уравнений, используемых в практических задачах, можно такие условия сформулировать в явном виде.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. С естественной поправкой на порядок рассматриваемых ЛОДУ все замечания, сделанные к уравнениям второго порядка, полностью переносятся и на общий случай. При этом теоремы 1–3 позволяют определять односторонние алгебраические уравнения N -й степени, обладающие, соответственно, действительными (над $\mathfrak{A}$) различными и кратными и различными комплексными (над $\mathfrak{B}$) корнями. Это может оказаться полезным в тех случаях, когда возникает проблема решения полиномиальных уравнений над некоммутативным многообразием.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теоремы 3 и 4 утверждают, что приведенные в них X в форме (51) и (55) являются лишь решениями соответствующих ЛОДУ N , хотя число произвольных констант в них равно N . Доказательство их общности сопряжено с громоздкими и труднообозримыми выкладками. Однако для достаточно малых, конкретных N можно доказать, что оба решения являются общими.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Функциональный анализ*, Справочная математическая библиотека, ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972.
- [2] В. П. Деревенский, “Системы матричных линейных дифференциальных уравнений первого порядка”, *Матем. заметки*, **66**:1 (1999), 63–75.
- [3] В. П. Деревенский, “Матричные линейные дифференциальные уравнения высших порядков”, *Дифференц. уравнения*, **29**:4 (1993), 711–714.
- [4] В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, 1971.
- [5] Н. Джекобсон, *Алгебры Ли*, Мир, 1964.
- [6] В. П. Деревенский, “Решение систем матричных алгебраических линейных уравнений”, *Изв. вузов. Матем.*, 1998, № 10, 32–36.

В. П. Деревенский

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Поступило

19.08.2005