Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Брук, Об обратимых сужениях отношений, порожденных дифференциальным выражением и неотрицательной операторной функцией, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 5, 652–664

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4080>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:08:11

Об обратимых сужениях отношений, порожденных дифференциальным выражением и неотрицательной операторной функцией

В. М. Брук

В работе описываются обратимые сужения максимального отношения, порожденного дифференциальным выражением с ограниченными операторными коэффициентами и неотрицательной операторной функцией. Устанавливается, что операторы, обратные к таким сужениям, являются интегральными, и доказывается критерий голоморфности семейства таких операторов. На основе полученных результатов дается описание обобщенных резольвент симметрических отношений.

Библиография: 18 названий.

Введение. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$; $A(t)$ – сильно измеримая на конечном интервале $[a, b]$ функция, значениями которой являются неотрицательные ограниченные операторы в H . Предполагается, что норма $\|A(t)\|$ суммируема на $[a, b]$.

В данной работе рассматриваются обратимые сужения максимального отношения, порожденного дифференциальным выражением с ограниченными операторными коэффициентами и функцией $A(t)$. Доказывается, что операторы, обратные к таким сужениям, являются интегральными, и устанавливается критерий голоморфности семейства таких операторов. На основе этих результатов дается описание обобщенных резольвент минимального отношения, порожденного функцией $A(t)$ и формально самосопряженным выражением.

1. Обозначения и вспомогательные утверждения

1.1. Описание пространства $L_p(H, A(t); a, b)$. На множестве непрерывных на интервале $[a, b]$ функций со значениями в H введем норму

$$\|y\|_p = \left(\int_a^b \|A^{1/p}(t)y(t)\|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty. \quad (1)$$

Отождествляя с нулем те функции y , для которых $\|y\|_p = 0$, а затем производя пополнение, получим банахово пространство, обозначаемое $B = L_p(H, A(t); a, b)$. Элементами B являются классы функций, отождествленных между собой по норме $\|y\|_p$. Далее $\tilde{y}$ означает класс функций с представителем y . Чтобы излишне не усложнять терминологию, про функцию y будем также говорить, что y принадлежит B .

Пусть $G(t) = \ker A(t)$, $H(t) = H \ominus G(t)$, $A_0(t)$ – сужение $A(t)$ на $H(t)$. Тогда оператор $A_0(t)$, действующий в $H(t)$, имеет обратный $A_0^{-1}(t)$ (вообще говоря, неограниченный). Через $\{H_\tau(t)\}$, $-\infty < \tau < \infty$, обозначим гильбертову шкалу пространств [1; с. 253], [2; с. 65], порожденную оператором $A_0^{-1}(t)$. Для любого α , $0 < \alpha \leq 1$, оператор $A_0(t)$ можно расширить до оператора $\tilde{A}_0(t)$, непрерывно и взаимно однозначно отображающего $H_{-\alpha}(t)$ на $H_{1-\alpha}(t)$. Действительно, из определения гильбертовой шкалы вытекает, что оператор $(A_0(t))^\alpha = A_0^\alpha(t)$ можно рассматривать как оператор, непрерывно и взаимно однозначно отображающий $H_0(t) = H(t)$ на $H_\alpha(t)$. Следовательно, сопряженный к нему оператор $\tilde{A}_0^\alpha(t)$ [1; с. 49] непрерывно и взаимно однозначно отображает $H_{-\alpha}(t)$ на $H(t)$ и является расширением $A_0^\alpha(t)$. В качестве $\tilde{A}_0(t)$ возьмем оператор $\tilde{A}_0(t) = A_0^{1-\alpha}(t)\tilde{A}_0^\alpha(t)$. Положим $\alpha = 1/p$ и обозначим через $\tilde{A}(t)$ оператор, определенный на $H_{-1/p}(t) \oplus G(t)$, равный $\tilde{A}_0(t)$ на $H_{-1/p}(t)$ и нулю на $G(t)$. Очевидно, $\tilde{A}(t)$ является расширением $A(t)$.

ЛЕММА 1. *Пространство В состоит из элементов (классов функций) с представителями вида $\tilde{A}_0^{-1}(t)A^{1/q}(t)h(t)$, где $h(t) \in L_p(H; a, b)$ (т.е. $\int_a^b \|h(t)\|^p dt < \infty$), $p^{-1} + q^{-1} = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [3] установлено, что если $\varphi(\xi)$ – измеримая по Борелю скалярная функция, y – измеримая функция такая, что $y(t)$ принадлежит области определения оператора $\varphi(A(t))$ при всех $t \in [a, b]$, то функция $\varphi(A(t))y(t)$ измерима. Отсюда следует, что пространства $H(t)$, $G(t)$, $H_{-1/p}(t)$ измеримы по параметру t [4; с. 28], если в качестве семейства измеримых функций взять соответственно семейства

$$\{P(t)h(t)\}, \quad \{(E - P(t))h(t)\}, \quad \{\tilde{A}_0^{-1/p}(t)P(t)h(t)\}, \quad (2)$$

где $h(t)$ – измеримая функция со значениями в H , $\tilde{A}_0^{-1/p}(t) = (\tilde{A}_0^{1/p}(t))^{-1}$, $P(t)$ – ортопроектор H на $H(t)$ (отметим, что $P(t) = A_0^{-\alpha}(t)A^\alpha(t)$, $0 < \alpha \leq 1$). Обозначим через $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^\perp$, $\mathcal{B}_p$ пространства, состоящие соответственно из функций вида (2), где $h(t) \in L_p(H; a, b)$. Норму в $\mathcal{B}_p$ введем равенством (1), где $A^{1/p}(t)$ заменено на $\tilde{A}_0^{1/p}(t)$, а $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^\perp$ рассматриваем как подпространства в $L_p(H; a, b)$. Пространства $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^\perp$, $\mathcal{B}_p$ полные, $L_p(H; a, b)$ разлагается в прямую сумму $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^\perp$, и отображение $P(t)h(t) \rightarrow \tilde{A}_0^{-1/p}(t)P(t)h(t)$ – изометрия $\mathcal{B}$ на $\mathcal{B}_p$. Так как сопряженным к $L_p(H; a, b)$ является пространство $L_q(H; a, b)$, то из изложенного следует, что сопряженное к $\mathcal{B}_p$ есть пространство $\mathcal{B}_p^* = \mathcal{B}_q$, состоящее из функций вида $\tilde{A}_0^{-1/q}(t)P(t)h_1(t)$, где $h_1(t) \in L_q(H; a, b)$. Билинейная форма, определяемая двойственностью между $\mathcal{B}_p$ и $\mathcal{B}_p^*$, обозначается $(\cdot, \cdot)$, а действие функционала $f_1 = \tilde{A}_0^{-1/q}(t)P(t)h_1(t) \in \mathcal{B}_p^*$ на элемент $f = \tilde{A}_0^{-1/p}(t)P(t)h(t) \in \mathcal{B}_p$ определяется формулой $(f, f_1) = \int_a^b (\tilde{A}(t)f(t), f_1(t)) dt$.

Пусть $z(t)$ – непрерывная функция со значениями в H . Тогда в пространстве В функции $z(t)$ и $z_0(t) = \tilde{A}_0^{-1/p}(t)P(t)A^{1/p}(t)z(t)$ отождествлены. Так как $A^{1/p}(t)z(t) \in L_p(H; a, b)$, то $z_0(t) \in \mathcal{B}_p$. Поэтому $V \subset \mathcal{B}_p$. Пусть $f_1 \in \mathcal{B}_p^*$. Тогда $(z_0, f_1) = \int_a^b (z(t), A^{1/p}(t)P(t)h_1(t)) dt$. Следовательно, если $(z_0, f_1) = 0$ для всех непрерывных функций $z(t)$, то $f_1 = 0$. Отсюда вытекает в силу замкнутости В равенство $V = \mathcal{B}_p$. Лемма доказана.

1.2. Максимальное и минимальное отношения. Терминология, связанная с линейными отношениями, имеется, например, в [2], [5]–[7] (там же приведена более подробная библиография). Под линейным отношением T в банаховом пространстве V понимается любое линейное многообразие $T \subset V \times V$. Далее используются обозначения: $\{\cdot, \cdot\}$ – упорядоченная пара, $\ker T$ – множество элементов $z \in V$ таких, что $\{z, 0\} \in T$; $\mathcal{R}(T)$ – область значений отношения T ; $\rho(T)$ – резольвентное множество отношения T . Поскольку все отношения, встречающиеся в дальнейшем, являются линейными, то слово “линейное” будет часто опускаться. Отметим также, что общее определение отношения, порожденного парой операторов, приведено в [6]. В ряде работ рассматривались вопросы спектральной теории отношений, порожденных парой дифференциальных операторов (см., например, [8]). Отношения, порожденные в $L_2(H, A(t); a, b)$ функцией $A(t)$ и формально самосопряженным выражением, определялись и изучались в [3], [9].

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l[y] = p_0(t)y^{(r)} + p_1(t)y^{(r-1)} + \dots + p_r(t)y,$$

коэффициенты которого – ограниченные линейные операторы в H , причем оператор $p_0(t)$ имеет ограниченный обратный при почти всех $t \in [a, b]$. Предполагается, что операторные функции $p_0^{-1}(t), p_1(t), \dots, p_r(t)$ сильно измеримы, норма $\|p_0^{-1}(t)\|$ ограничена, а нормы $\|p_1(t)\|, \dots, \|p_r(t)\|$ суммируемы на $[a, b]$.

Обозначим через D' множество функций $y \in V$, удовлетворяющих следующим условиям:

- а) производная $y^{(r-1)}$ существует и абсолютно непрерывна [2; с. 24];
- б) $l[y](t) \in H_{1/q}(t)$ при почти всех $t \in [a, b]$;
- в) $\tilde{A}_0^{-1}(t)l[y] \in V$.

Поставим в соответствие каждому классу функций, отождествленных в V с $y \in D'$, класс функций, отождествленных в V с $\tilde{A}_0^{-1}(t)l[y]$. Это соответствие, вообще говоря, не будет оператором, так как может случиться, что функция y отождествлена с нулем в V , а $\tilde{A}_0^{-1}(t)l[y]$ отлична от нуля. Таким образом, получим в пространстве V линейное отношение L' , замыкание которого обозначим L и назовем *максимальным отношением*. Минимальное отношение L_0 определим как сужение L на множество элементов $\tilde{y} \in V$, обладающих представителями $y \in D'$ со свойством $y^{(k)}(a) = y^{(k)}(b) = 0$, $k = 0, 1, \dots, r-1$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $l[y] = \lambda A(t)y$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть $W_j(t, \lambda)$ – операторное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $W_j^{(k-1)}(a, \lambda) = \delta_{jk}E$ (E – тождественный оператор, δ_{jk} – символ Кронекера, $j, k = 1, \dots, r$). Обозначим через $W(t, \lambda)$ операторную однострочную матрицу $(W_1(t, \lambda), \dots, W_r(t, \lambda))$. Так как при фиксированных t, λ оператор $W_j(t, \lambda)$ ограничен в H , то $W(t, \lambda)$ непрерывно отображает H^r в H , где H^r – декартово произведение r экземпляров H (элементы из H^r удобно рассматривать как одностолбцовые матрицы и $W(t, \lambda)c = W_1(t, \lambda)c_1 + \dots + W_r(t, \lambda)c_r$, $c = \text{col}(c_1, \dots, c_r) \in H^r$). Для функции y , имеющей $r-1$ производную, обозначим $\hat{y} = \text{col}(y, y', \dots, y^{(r-1)})$. Если $z = (z_1, \dots, z_n)$ – какая-либо система функций, имеющих $r-1$ производную, то через $\hat{z}$ обозначим матрицу с j -столбцом $\hat{z}_j$. Аналогичные обозначения используются для операторных функций.

Согласно “методу вариации произвольных постоянных” для любой функции f такой, что $\tilde{A}(t)f(t) \in L_1(H; a, b)$, общее решение уравнения

$$l[y] - \lambda \tilde{A}(t)y = \tilde{A}(t)f(t) \quad (3)$$

можно представить в виде

$$y(t) = W(t, \lambda) \left(c + \int_a^t V(s, \lambda) \tilde{A}(s) f(s) ds \right), \quad (4)$$

где $c \in H^r$, $V(t, \lambda)$ при фиксированных t, λ является оператором из H в H^r , определяемым из условия

$$\widehat{W}(t, \lambda)V(t, \lambda) = \text{col}(0, \dots, 0, p_0^{-1}(t)). \quad (5)$$

Из (4), (5) следует

$$\widehat{y}(t) = \widehat{W}(t, \lambda) \left(c + \int_a^t V(s, \lambda) \tilde{A}(s) f(s) ds \right). \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как задача Коши для уравнения (3) с начальными условиями $y^{(k-1)}(t_0) = c_k \in H$, $k = 1, \dots, r$, $t_0 \in [a, b]$, имеет единственное решение на всем интервале $[a, b]$, то при всех $t \in [a, b]$, $\lambda \in \mathbf{C}$ оператор $\widehat{W}(t, \lambda)$ имеет всюду определенный ограниченный обратный в H^r . При каждом фиксированном t функция $\widehat{W}(t, \lambda)$ голоморфна (доказательство такое же, как в конечномерном случае). Поскольку при любых $c \in H^r$, $\lambda \in \mathbf{C}$ функция $\widehat{W}(t, \lambda)c$ абсолютно непрерывна, то норма $\|\widehat{W}^{-1}(t, \lambda)\|$ ограничена на $[a, b] \times \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ – произвольное компактное множество, $\mathcal{C} \subset \mathbf{C}$. Отсюда и из (5) следует, что при почти всех t норма $\|V(t, \lambda)\|$ ограничена на $\mathcal{J} \times \mathcal{C}$, а функция $V(t, \lambda)$ голоморфна по λ при любом $t \in \mathcal{J}$, где $\mathcal{J}$ – множество $t \in [a, b]$, для которых существует $p_0^{-1}(t)$. Так как мера $[a, b] \setminus \mathcal{J}$ равна нулю, то при любом $t \in [a, b]$ интеграл в правой части равенств (4), (6) существует.

Пусть Q_0 – множество элементов $x \in H^r$, для которых функция $W(t, 0)x$ отождествлена с нулем в B , т.е. $\int_a^b \|A^{1/p}(s)W(s, 0)x\|^p ds = 0$ (это равносильно тому, что $A(s)W(s, 0)x = 0$ почти всюду). Из равенств

$$W(t, \lambda)x = W(t, 0) \left(x + \lambda \int_a^t V(s, 0) \tilde{A}(s) W(s, \lambda)x ds \right), \quad (7)$$

$$W(t, 0)x = W(t, \lambda) \left(x - \lambda \int_a^t V(s, \lambda) \tilde{A}(s) W(s, 0)x ds \right) \quad (8)$$

следует, что $W(t, \lambda)x$ тогда и только тогда отождествлена с нулем в B , когда $x \in Q_0$ (в конечномерном случае этот факт установлен в [10]).

Пусть $Q = H^r \ominus Q_0$. Введем в Q норму

$$\|x\|_- = \left(\int_a^b \|A^{1/p}(s)W(s, 0)x\|^p ds \right)^{1/p} \leq k \|x\|, \quad x \in Q, \quad k > 0. \quad (9)$$

Полношение Q по этой норме обозначим Q_1 . Из равенств (7), (8) следует, что замена в (9) $W(s, 0)$ на $W(s, \lambda)$ приводит к тому же множеству Q_1 с эквивалентной нормой.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ из Q сходится в Q_1 к $x_0 \in Q_1$ и $\widetilde{W}(t, \lambda)x_n$ – класс функций, отождествленных в B с $W(t, \lambda)x_n$. Тогда последовательность $\{\widetilde{W}(t, \lambda)x_n\}$ фундаментальна в B и, следовательно, сходится к некоторому элементу из B , который обозначим $\widetilde{W}(t, \lambda)x_0$. Если последовательность $\{\widetilde{W}(t, \lambda)x_n\}$, $x_n \in Q$, сходится в B к $\tilde{y}$, то найдется единственный элемент $x_0 \in Q$ такой, что выполняется равенство $\tilde{y} = \widetilde{W}(t, \lambda)x_0$. Действительно, из (9) следует, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в Q_1 , и в качестве x_0 можно взять элемент, к которому сходится $\{x_n\}$. Таким образом, $\widetilde{W}(t, \lambda)x_0$ принадлежит $\ker(L - \lambda E)$ для любого $x_0 \in Q_1$ и $\widetilde{W}(t, \lambda)x_0 \neq 0$ в B при $x_0 \in Q_1$, $x_0 \neq 0$.

ЛЕММА 2. *Отношение L состоит из тех и только тех пар $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in B \times B$, для которых*

$$\tilde{y} = \widetilde{W}(t, 0)x + \tilde{F}, \quad (10)$$

где $x \in Q_1$, $\tilde{F}$ – класс функций, отождествленных в B с функцией

$$F(t) = W(t, 0) \int_a^t V(s, 0) \tilde{A}(s) f(s) ds. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из рассуждений, приведенных перед леммой, следует, что пара $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in B \times B$, удовлетворяющая (10), (11), принадлежит L ; при этом если $x \in Q$, то $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in L'$. Пусть теперь $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in L$. Тогда найдется последовательность пар $\{\tilde{y}_n, \tilde{f}_n\} \in L'$, сходящаяся к паре $\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$ в $B \times B$, причем функцию y_n можно представить в виде

$$y_n(t) = W(t, 0) \left(x_n + \int_a^t V(s, 0) \tilde{A}(s) f_n(s) ds \right), \quad (12)$$

где $x_n \in Q$. Из сходимости последовательности пар $\{\tilde{y}_n, \tilde{f}_n\}$ в $B \times B$ следует сходимость последовательности $\{\widetilde{W}(t, 0)x_n\}$ в B . Переходя в (12) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим (10), (11). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как $\|A^{1/q}(s)\| \in L_q(a, b)$, $\|A_0^{-1/q}(s) \tilde{A}(s) f(s)\| \in L_p(a, b)$, то согласно замечанию 1, интеграл в правой части (11) существует при любом $t \in [a, b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для любой пары $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in L$ найдутся единственный элемент $x \in Q_1$ и единственная функция $F(t)$ вида (11) такие, что справедливо равенство (10). Действительно, если f_1, f_2 отождествлены в B между собой, то $\tilde{A}(t)f_1(t) = \tilde{A}(t)f_2(t)$. Теперь требуемое утверждение вытекает из того факта, что $\widetilde{W}(t, 0)x \neq 0$ в B при $x \in Q_1$ и $x \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отношение $L - \lambda E$ состоит из множества пар вида (10), (11), где $W(t, 0)$ и $V(t, 0)$ заменены на $W(t, \lambda)$ и $V(t, \lambda)$ соответственно (доказательство такое же, как для случая $\lambda = 0$). Отсюда следует, что оператор $x \rightarrow \widetilde{W}(t, \lambda)x$ является непрерывным и взаимно однозначным отображением Q_1 на $\ker(L - \lambda E)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В [3], где рассматривался случай $p = 2$, предполагалось выполненным условие: $\int_a^b \|A^{1/2}(t)W(t, \lambda)x dt\|^2 \leq \varepsilon \|x\|^2$ для всех $x \in H^r$, $\varepsilon > 0$. Это условие равносильно равенству $Q_- = H^r$.

ЛЕММА 3. *Отношение L_0 замкнуто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность пар $\{\tilde{y}_n, \tilde{f}_n\} \in L_0$ сходится в $B \times B$ к $\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$. Тогда можно выбрать таких представителей y_n, f_n классов функций $\tilde{y}_n, \tilde{f}_n$, для которых выполняется (12) и $\hat{y}_n(a) = \hat{y}_n(b) = 0$. В этом случае в (12) $x_n = \int_a^b V(s, 0) \tilde{A}(s) f_n(s) ds = 0$. Переходя к пределу здесь и в (12), получим, что в (10) $x = 0$

$$\int_a^b V(s, 0) \tilde{A}(s) f(s) ds = 0. \quad (13)$$

Следовательно, $y \in D'$ и $\hat{y}(a) = \hat{y}(b) = 0$. Поэтому $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in L_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из доказательства леммы 3 следует, что область значений $\mathcal{R}(L_0)$ замкнута, состоит из элементов $\tilde{f} \in B$ со свойством (13), и L_0^{-1} является ограниченным оператором на своей области определения. Аналогичные утверждения справедливы для отношения $L_0 - \lambda E$ с заменой в (13) $V(s, 0)$ на $V(s, \lambda)$.

Пусть $\tilde{Q}_0(\lambda)$ – множество элементов $z \in H^r$, для которых функция $V^*(s, \lambda)z$ отождествлена с нулем в B^* , т.е. $\int_a^b \|A^{1/q}(s)V^*(s, \lambda)z\|^q ds = 0$, что равносильно $A(s) \times V^*(s, \lambda)z = 0$ почти всюду. Докажем, что $\tilde{Q}_0 = \tilde{Q}_0(\lambda)$ не зависит от λ . Из равенств (5)–(7) следует

$$\widehat{W}^*(t, \lambda) = \left(E + \bar{\lambda} \int_a^t W^*(s, \lambda) \tilde{A}(s) V^*(s, 0) ds \right) \widehat{W}^*(t, 0).$$

Последнее равенство влечет

$$V^*(t, \lambda) \widehat{W}^*(t, \lambda) (\widehat{W}^*(t, 0))^{-1} = V^*(t, \lambda) \left(E + \bar{\lambda} \int_a^t W^*(s, \lambda) \tilde{A}(s) V^*(s, 0) ds \right).$$

Отсюда с учетом (5) получаем

$$V^*(t, 0) = V^*(t, \lambda) \left(E + \bar{\lambda} \int_a^t W^*(s, \lambda) \tilde{A}(s) V^*(s, 0) ds \right). \quad (14)$$

Аналогично получим с использованием равенства (8)

$$V^*(t, \lambda) = V^*(t, 0) \left(E - \bar{\lambda} \int_a^t W^*(s, 0) \tilde{A}(s) V^*(s, \lambda) ds \right). \quad (15)$$

Если $z \in \tilde{Q}_0(0)$, то $\tilde{A}(s)V^*(s, 0)z = 0$ почти всюду. Из (14) следует, что $\tilde{A}(t)V^*(t, \lambda)z = \tilde{A}(t)V^*(t, 0)z = 0$. Поэтому $z \in \tilde{Q}_0(\lambda)$. Аналогично, учитывая (15), получим, что $\tilde{Q}_0(\lambda) \subset \tilde{Q}_0(0)$. Таким образом, $\tilde{Q}_0(\lambda) = \tilde{Q}_0(0)$.

Пусть $\tilde{Q} = H^r \ominus \tilde{Q}_0$. Введем в $\tilde{Q}$ норму

$$\|z\|_-^* = \left(\int_a^b \|A^{1/q}(s)V^*(s, 0)z\|^q ds \right)^{1/q} \leq k \|z\|, \quad z \in \tilde{Q}, \quad k > 0. \quad (16)$$

Полноценное $\tilde{Q}$ по этой норме обозначим $\tilde{Q}_1$. Из равенств (14), (15) следует, что замена в (16) $V^*(s, 0)$ на $V^*(s, \lambda)$ приводит к тому же множеству $\tilde{Q}_1$ с эквивалентной нормой.

Символом $\tilde{V}^*(s, \lambda)z$ обозначаем элемент в B^* , к которому сходится в B^* последовательность $\{\tilde{V}^*(s, \lambda)z_n\}$, $z_n \in \tilde{Q}$, при $z_n \rightarrow z$ в $\tilde{Q}_1$. Из равенств (14)–(16) следует, что оператор $z \rightarrow \tilde{V}^*(s, \lambda)z$, обозначаемый $\mathcal{V}_*(\lambda)$, является непрерывным отображением $\tilde{Q}_1$ в B^* . Так как область значений $\mathcal{R}(\mathcal{V}_*(\lambda))$ замкнута в B^* и $\ker \mathcal{V}_*(\lambda) = \{0\}$, то сопряженный оператор $\mathcal{V}_*^*(\lambda): B^{**} = B \rightarrow \tilde{Q}_1^* \subset \tilde{Q}^* = \tilde{Q} \subset H^r$ имеет область значений, совпадающую с $\tilde{Q}_1^*$. Обозначим $\mathcal{V}(\lambda) = \mathcal{V}_*^*(\lambda)$ и найдем вид $\mathcal{V}(\lambda)$. Для любых элементов $z \in \tilde{Q} \subset \tilde{Q}_1$ и $\tilde{f} \in B$ имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{f}, \mathcal{V}_*(\lambda)z) &= \int_a^b (\tilde{A}(s)f(s), \tilde{V}^*(s, \lambda)z) ds \\ &= \left(\int_a^b V(s, \lambda)\tilde{A}(s)f(s) ds, z \right) = (\mathcal{V}_*^*(\lambda)\tilde{f}, z) = (\mathcal{V}(\lambda)\tilde{f}, z). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\tilde{Q}$ плотно вкладывается в $\tilde{Q}_1$, получим

$$\mathcal{V}(\lambda)\tilde{f} = \int_a^b V(s, \lambda)\tilde{A}(s)f(s) ds. \quad (17)$$

Таким образом, с учетом замечания 1 доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 4. *Оператор $\mathcal{V}(\lambda)$ имеет вид (17) и $\mathcal{R}(\mathcal{V}(\lambda)) = \tilde{Q}_1^*$. Операторная функция $\lambda \rightarrow \mathcal{V}(\lambda)$ голоморфна.*

2. Основные утверждения

2.1. Описание сужений отношения $(L - \lambda E)^{-1}$, являющихся ограниченными операторами. Пусть $M_0(\lambda): \tilde{Q}_1^* \rightarrow \tilde{Q}_1$ – ограниченный всюду определенный оператор при фиксированном λ . Обозначим

$$K(t, s, \lambda) = \tilde{W}(t, \lambda)(M_0(\lambda) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(s - t)E)V(s, \lambda). \quad (18)$$

ТЕОРЕМА 1. *Отношение $R(\lambda) \subset B \times B$ тогда и только тогда обладает свойством*

$$(L_0 - \lambda E)^{-1} \subset R(\lambda) \subset (L - \lambda E)^{-1} \quad (19)$$

и является ограниченным всюду определенным оператором, когда $R(\lambda)$ имеет вид

$$R(\lambda)\tilde{f} = \int_a^b K(t, s, \lambda)\tilde{A}(s)f(s) ds. \quad (20)$$

Функция $\lambda \rightarrow R(\lambda)$ голоморфна в некоторой окрестности точки λ_0 в том и только том случае, когда функция $\lambda \rightarrow M_0(\lambda)$ голоморфна в той же окрестности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из замечаний 1, 4, 6 и леммы 2 следует, что равенства (20), (18) определяют семейство всюду определенных ограниченных операторов со свойством (19), при этом голоморфность $M_0(\lambda)$ влечет голоморфность $R(\lambda)$. Предположим теперь, что $R(\lambda)$ – ограниченный всюду определенный оператор со свойством (19). Тогда $R(\lambda)\tilde{f}$ – класс функций с представителем $y(t, \tilde{f}, \lambda)$, являющимся решением (3). Поэтому

$$\tilde{y}(t, \tilde{f}, \lambda) = \tilde{W}(t, \lambda) \left(c(\tilde{f}, \lambda) + \frac{1}{2} \int_a^t V(s, \lambda)\tilde{A}(s)f(s) ds - \frac{1}{2} \int_t^b V(s, \lambda)\tilde{A}(s)f(s) ds \right), \quad (21)$$

где $c(\tilde{f}, \lambda) \in Q_1$ и $c(\tilde{f}, \lambda)$ единственным образом определяется по λ и $\tilde{f}$, причем $c(\tilde{f}, \lambda)$ непрерывно (и линейно) зависит от $\tilde{f}$. Действительно, если последовательность $\{\tilde{f}_n\} \rightarrow 0$ в B , то $\{R(\lambda)\tilde{f}_n\} \rightarrow 0$. Поэтому $\{\tilde{W}(t, \lambda)c(\tilde{f}_n, \lambda)\} \rightarrow 0$ и согласно замечанию 4 $\{\tilde{c}(\tilde{f}_n, \lambda)\} \rightarrow 0$. Таким образом, существует такой ограниченный линейный оператор $C(\lambda)$, отображающий B в Q_1 , что $c(\tilde{f}, \lambda) = C(\lambda)\tilde{f}$.

Докажем, что $c(\tilde{f}, \lambda)$ единственным образом определяется элементом $\mathcal{V}(\lambda)\tilde{f} \in \tilde{Q}_1^*$. Для этого предположим, что $\mathcal{V}(\lambda)\tilde{f} = 0$. Тогда пара $\{\tilde{y}(t, \tilde{f}, \lambda) - \tilde{W}(t, \lambda)c(\tilde{f}, \lambda), \tilde{f}\} \in L_0 - \lambda E$. Отсюда и из (19) вытекает, что пара $\{0, \tilde{W}(t, \lambda)c(\tilde{f}, \lambda)\} \in R(\lambda)$, а это возможно лишь при $c(\tilde{f}, \lambda) = 0$.

Следовательно, существует всюду определенный оператор $M_0(\lambda): \tilde{Q}_1^* \rightarrow Q_1$ такой, что $C(\lambda)\tilde{f} = M_0(\lambda)\mathcal{V}(\lambda)\tilde{f}$. Докажем, что $M_0(\lambda)$ ограничен. Согласно замечанию 6 область значений $\mathcal{R}(L_0 - \lambda E)$ замкнута. Рассмотрим факторпространство $B_0(\lambda) = B/\mathcal{R}(L_0 - \lambda E)$. Пусть $\pi(\lambda)$ – каноническое отображение B на $B_0(\lambda)$. Так как $\ker C(\lambda) \supset \ker \mathcal{V}(\lambda) = \mathcal{R}(L_0 - \lambda E)$, то $\mathcal{V}_0(\lambda) = \mathcal{V}(\lambda)\pi^{-1}(\lambda)$ и $C_0(\lambda) = C(\lambda)\pi^{-1}(\lambda)$ – ограниченные операторы, причем $\mathcal{V}_0(\lambda)$ отображает $B_0(\lambda)$ на $\tilde{Q}_1^*$ взаимно однозначно. Теперь ограниченность оператора $M_0(\lambda)$ следует из равенства $M_0(\lambda) = C_0(\lambda)\mathcal{V}_0^{-1}(\lambda)$.

Предположим теперь, что $R(\lambda)$ – голоморфная в некоторой окрестности точки λ_0 функция. Тогда из (21) следует голоморфность функции $\tilde{W}(t, \lambda)C(\lambda)\tilde{f}$. Из равенства (7), в котором элемент x заменяется на $C(\lambda)\tilde{f}$, вытекает, что функция $\tilde{W}(t, 0)C(\lambda)\tilde{f}$ голоморфна. Из замечания 4 получаем, что функция $C(\lambda)\tilde{f} = M_0(\lambda) \times \mathcal{V}(\lambda)\tilde{f}$ голоморфна при любом $\tilde{f} \in B$. Теперь голоморфность функции $M_0(\lambda)$ вытекает из свойств операторов $C(\lambda)$, $\mathcal{V}(\lambda)$ и следующей леммы, доказанной в [11].

ЛЕММА 5. Пусть при каждом фиксированном λ из некоторой окрестности точки λ_0 ограниченные операторы $S_3(\lambda): B_1 \rightarrow B_3$, $S_1(\lambda): B_1 \rightarrow B_2$, $S_2(\lambda): B_2 \rightarrow B_3$ связаны равенством $S_3(\lambda) = S_2(\lambda)S_1(\lambda)$, причем $\mathcal{R}(S_1(\lambda_0)) = B_2$, где B_1, B_2, B_3 – банаховы пространства. Тогда если функции $S_1(\lambda)$, $S_3(\lambda)$ сильно дифференцируемы в точке λ_0 , то в этой же точке сильно дифференцируема функция $S_2(\lambda)$.

2.2. Описание обобщенных резольвент минимального отношения, порожденного формально самосопряженным выражением. В целях сокращения записи рассмотрим дифференциальное выражение четного порядка $r = 2n$ (все результаты с техническими изменениями сохраняются для выражений нечетного порядка [3]). Пусть l имеет вид

$$l_1[y] = \sum_{k=1}^n (-1)^k \{ (p_{n-k}(t)y^{(k)})^{(k)} - i[(q_{n-k}(t)y^{(k)})^{(k-1)} + (q_{n-k}(t)y^{(k-1)})^{(k)}] \} + p_n(t)y,$$

где коэффициенты – ограниченные самосопряженные операторы в H , причем $p_0(t)$ обратим при почти всех $t \in [a, b]$. Предполагается, что функции $p_0^{-1}(t), p_1(t), \dots, p_n(t), q_0(t), \dots, q_{n-1}(t)$ измеримы, а их нормы и нормы $\|p_0^{-1}(t)q_0(t)\|, \|q_0(t)p_0^{-1}(t)q_0(t)\|$ суммируемы на $[a, b]$.

Для выражения l_1 сохраним прежние обозначения и определения с заменой производных на квазипроизводные (квазипроизводные определены в [10]). Например, $W_j(t, \lambda)$ – операторное решение уравнения $l_1[y] = \lambda A(t)y$, удовлетворяющее условиям $W_j^{[k-1]}(a, \lambda) = \delta_{jk}E$. При определении функции $V(t, \lambda)$ в формуле (5) $p_0^{-1}(t)$ заменяется на $-E$.

В качестве B берем пространство $B = L_2(H, A(t); a, b)$. Отметим, что норма в B порождается скалярным произведением

$$(\tilde{f}, \tilde{g})_B = \int_a^b (\tilde{A}(t)f(t), g(t)) dt.$$

Тогда отношение L_0 симметрическое и $L_0^* = L$ (доказательство такое же как в [3], [9]). Пространство Q_1 является гильбертовым. Из неравенства (9) следует, что Q_1 можно рассматривать как пространство с негативной нормой относительно Q [1; с. 45, с. 81], [2; с. 59]. Обозначим $Q_- = Q_1$, а Q_+ – соответствующее пространство с позитивной нормой. Согласно замечанию 4 оператор $x \rightarrow \tilde{W}(t, \bar{\lambda})x$ непрерывно, взаимно однозначно отображает Q_- в B и имеет замкнутую область определения. Поэтому сопряженный к нему оператор $\tilde{f} \rightarrow \int_a^b W^*(s, \bar{\lambda})\tilde{A}(s)f(s) ds$ непрерывно отображает B на Q_+ (доказательство такое же, как приведенное выше для $\mathcal{V}(\lambda)$). Из равенства $V(t, \lambda) = -J_r W^*(t, \bar{\lambda})$ [3] и из (18) следует

$$K(t, s, \lambda) = \tilde{W}(t, \lambda)(M_1(\lambda) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(s - t)J_r)W^*(s, \bar{\lambda}), \quad (22)$$

где $M_1(\lambda) = -M_0(\lambda)J_r: Q_+ \rightarrow Q_-$ – ограниченный оператор, J_r – операторная матрица порядка $r = 2n$, у которой все элементы, кроме стоящих на побочной диагонали, равны нулю, а на побочной диагонали в первых n строках стоят $-E$, а в последних n строках стоят E .

Напомним определение обобщенной резольвенты (см., например, [12; с. 331], [13], [14]). Пусть B – J -пространство ($J^* = J = J^{-1}$), $\mathcal{L}_0$ – замкнутое J -симметрическое отношение, $\mathcal{L}_0 \subset B \times B$ (терминология, связанная с J -пространствами, имеется в [12]). Операторная функция R_λ называется *обобщенной резольвентой* отношения $\mathcal{L}_0$ в некоторой окрестности Λ_0 точки λ_0 ($\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$), если существуют такое $\tilde{J}$ -пространство $\tilde{B} \supset B$ ($\tilde{J}|_B = J$) и такое $\tilde{J}$ -самосопряженное отношение $\tilde{\mathcal{L}} \supset \mathcal{L}_0$, $\tilde{\mathcal{L}} \subset \tilde{B} \times \tilde{B}$, что $\Lambda_0 \subset \rho(\tilde{\mathcal{L}})$ и для всех $\lambda \in \Lambda_0$ выполняется равенство $R_\lambda = P(\tilde{\mathcal{L}} - \lambda E)^{-1}|_B$, где P – ортопроектор $\tilde{B}$ на B . Обобщенная резольвента называется κ -регулярной, если в качестве $\tilde{B}$ можно выбрать такое пространство, что $\tilde{B} \ominus B$ является пространством Понтрягина Π_κ . Если $\kappa = 0$, то обобщенная резольвента называется *регулярной*.

В случае, когда $B, \tilde{B}$ – гильбертовы пространства, описание обобщенных резольвент дано в [13] для симметрических операторов и в [14] для отношений. В случае, когда $\mathcal{L}_0, \tilde{\mathcal{L}}$ – операторы в J -пространствах, это описание дано в [12; с. 333]. Пусть B – гильбертово пространство. В [15] доказано, что операторная функция R_λ тогда и только тогда является обобщенной резольвентой отношения $\mathcal{L}_0$ в окрестности Λ_0 точки λ_0 , когда R_λ удовлетворяет условиям:

- (i) $(\mathcal{L}_0 - \lambda E)^{-1} \subset R_\lambda \subset (\mathcal{L}_0^* - \lambda E)^{-1}$;
- (ii) R_λ – голоморфная функция в Λ_0 .

Обозначим через Λ_0^* множество, симметричное Λ_0 относительно вещественной оси. Тогда $\Lambda_0^* \subset \rho(\tilde{\mathcal{L}})$ и

$$R_{\bar{\lambda}} = R_\lambda^*. \quad (23)$$

Пусть $T(z, \zeta)$ – функция, определенная на непустом множестве $Z \times Z$, значения которой – ограниченные операторы из Q_+ в Q_- , причем $T(z, \zeta) = T^*(\zeta, z)$. Следуя [16], говорим, что T имеет точно κ отрицательных квадратов в Z , если для

любого натурального k и любых элементов $z_1, \dots, z_k \in Z$, $h_1, \dots, h_k \in Q_+$ матрица $(T(z_\nu, z_\mu)h_\nu, h_\mu)_{\nu, \mu=1, \dots, k}$ имеет не более κ отрицательных собственных значений и хотя бы для одного набора $k, z_1, \dots, z_k, h_1, \dots, h_k$ имеет κ отрицательных собственных значений.

Ограниченный оператор $\mathbf{I}_{ab}(\lambda, \mu): Q_- \rightarrow Q_+$ определим равенством

$$\mathbf{I}_{ab}(\lambda, \mu)x = \int_a^b W^*(s, \mu) \tilde{A}(s) \tilde{W}(s, \lambda) x ds, \quad x \in Q_-.$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1°. Операторная функция R_λ тогда и только тогда является обобщенной резольвентой отношения L_0 в некоторой окрестности Λ_0 точки λ_0 ($\text{Im } \lambda_0 \neq 0$), когда R_λ является в этой окрестности интегральным оператором (20) с ядром (22), где $M_1(\lambda)$ голоморфная в Λ_0 операторная функция, значения которой – ограниченные операторы, отображающие Q_+ в Q_- .

2°. Обобщенная резольвента R_λ κ -регулярна в том и только том случае, когда операторная функция

$$\mathbf{N}(\lambda, \mu) = (\lambda - \bar{\mu})^{-1}(M_1(\lambda) - M_1^*(\mu)) - (M_1^*(\mu) + 2^{-1}J_r)\mathbf{I}_{ab}(\lambda, \mu)(M_1(\lambda) - 2^{-1}J_r)$$

имеет не более κ отрицательных квадратов в Λ_0 и отрицательная часть спектров операторов $\mathbf{N}(\lambda_0, \lambda_0)$, $\mathbf{N}(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_0)$ состоит из $\kappa_1 \leq \kappa$ собственных значений (с учетом кратности).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В (22) функция $M_1(\lambda)$ на Λ_0^* определяется формулой $M_1(\bar{\lambda}) = M_1^*(\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda_0$), что соответствует равенству (23).

Первая часть теоремы об описании обобщенных резольвент с выходом в произвольное J -пространство следует из теоремы 1 и условий (i), (ii), приведенных после определения обобщенной резольвенты.

Докажем вторую часть теоремы об описании κ -регулярных резольвент. Предварительно установим связь между функциями $\mathbf{N}(\lambda, \mu)$ и

$$\mathbf{R}(\lambda, \mu) = (\lambda - \bar{\mu})^{-1}(R_\lambda - R_\mu^*) - R_\mu^* R_\lambda. \quad (24)$$

Для произвольных элементов $x_1, x_2 \in Q_+$ положим

$$\tilde{z}_1(t) = \tilde{W}(t, \lambda)(M_1(\lambda) - 2^{-1}J_r)x_1, \quad \tilde{z}_2(t) = \tilde{W}(t, \mu)(M_1(\mu) - 2^{-1}J_r)x_2. \quad (25)$$

Пусть $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ – такие элементы из V , для которых

$$\int_a^b W^*(s, \bar{\lambda}) \tilde{A}(s) \tilde{f}_1(s) ds = x_1, \quad \int_a^b W^*(s, \bar{\mu}) \tilde{A}(s) \tilde{f}_2(s) ds = x_2.$$

Положим $\tilde{y}_1 = R_\lambda \tilde{f}_1$, $\tilde{y}_2 = R_\mu \tilde{f}_2$. Тогда

$$\tilde{y}_1(t) = \tilde{W}(t, \lambda) \left(M_1(\lambda)x_1 - \frac{1}{2}J_r \int_a^t W^*(s, \bar{\lambda}) \tilde{A}(s) \tilde{f}_1(s) ds + \frac{1}{2}J_r \int_t^b W^*(s, \bar{\lambda}) \tilde{A}(s) \tilde{f}_1(s) ds \right).$$

Аналогичное равенство, в котором $\lambda, x_1, \tilde{f}_1$ заменяются соответственно на $\mu, x_2, \tilde{f}_2$, имеет место для $\tilde{y}_2$.

Из формулы Лагранжа

$$\int_a^b (l_1[u], v) dt - \int_a^b (u, l_1[v]) dt = (J_r \hat{u}(t), \hat{v}(t))|_a^b$$

вытекает, что для любых пар $\{\tilde{u}, \tilde{u}_1\}, \{\tilde{v}, \tilde{v}_1\} \in L'$ справедливо равенство

$$\int_a^b (\tilde{A}(t)u_1(t), v(t)) dt - \int_a^b (\tilde{A}(t)u(t), v_1(t)) dt = (J_r \hat{u}(t), \hat{v}(t))|_a^b \quad (26)$$

(здесь предполагается, что u, v – такие представители классов $\tilde{u}, \tilde{v}$, к которым применима операция l_1). Так как L' плотно в L , то предельным переходом получаем, что равенство (26) останется верным, например, тогда, когда $J_r \hat{u}(a) \in Q_+$, $\hat{u}(b) = 0$. При этом полагаем $\hat{v}(a) = x \in Q_-$, где x единственным образом определяется по паре $\{\tilde{v}, \tilde{v}_1\} \in L$ из равенства

$$\tilde{v}(t) = \tilde{W}(t, 0) \left(x - J_r \int_a^t W^*(s, 0) \tilde{A}(s) v_1(s) ds \right).$$

Отсюда и из (25), (26) непосредственными вычислениями получим

$$\begin{aligned} & \int_a^b (\tilde{A}(t)(\lambda z_1 - f_1 - \lambda y_1), z_2 + y_2) dt - \int_a^b (z_1 - y_1, \tilde{A}(t)(\mu z_2 + f_2 + \mu y_2)) dt \\ & + \int_a^b (\tilde{A}(t)(\lambda z_1 + f_1 + \lambda y_1), z_2 - y_2) dt - \int_a^b (z_1 + y_1, \tilde{A}(t)(\mu z_2 - f_2 - \mu y_2)) dt \\ & = 2(M_1(\lambda)x_1, x_2) - 2(x_1, M_1(\mu)x_2). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} & (\lambda - \bar{\mu})(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)_B - (\tilde{f}_1, R_\mu \tilde{f}_2)_B + (R_\lambda \tilde{f}_1, \tilde{f}_2)_B - (\lambda - \bar{\mu})(R_\lambda \tilde{f}_1, R_\mu \tilde{f}_2)_B \\ & = (M_1(\lambda)x_1, x_2) - (x_1, M_1(\mu)x_2). \end{aligned}$$

Теперь, учитывая (24), (25), получим

$$(\mathbf{N}(\lambda, \mu)x_1, x_2) = (\mathbf{R}(\lambda, \mu)\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)_B. \quad (27)$$

Если обобщенная резольвента R_λ порождена в Λ_0 $\tilde{J}$ -самосопряженным расширением $\tilde{\mathcal{L}}$ в $\tilde{J}$ -пространстве $\tilde{B}$, то, обозначая $\tilde{R} = (\tilde{\mathcal{L}} - \lambda E)^{-1}$, $[\cdot, \cdot]$ – индефинитное скалярное произведение в $\tilde{B}$, используя резольventное тождество $\tilde{R}_\lambda - \tilde{R}_\mu = (\lambda - \mu)\tilde{R}_\lambda \tilde{R}_\mu$ и равенство $\tilde{J}|_B = E$, получим для всех $\tilde{f}, \tilde{g} \in B$, $\lambda, \mu \in \Lambda_0 \cup \Lambda_0^*$ ($\lambda \neq \bar{\mu}$)

$$\begin{aligned} & [\tilde{R}_\lambda \tilde{f} - R_\lambda \tilde{f}, \tilde{R}_\mu \tilde{g} - R_\mu \tilde{g}] = [\tilde{R}_\mu \tilde{R}_\lambda \tilde{f}, \tilde{g}] - [R_\lambda \tilde{f}, R_\mu \tilde{g}] \\ & = (\bar{\mu} - \lambda)^{-1} [(\tilde{R}_\mu - \tilde{R}_\lambda) \tilde{f}, \tilde{g}] - [R_\lambda \tilde{f}, R_\mu \tilde{g}] \\ & = (\lambda - \bar{\mu})^{-1} ((R_\lambda - R_\mu^*) \tilde{f}, \tilde{g})_B - (R_\mu^* R_\lambda \tilde{f}, \tilde{g})_B \\ & = (\mathbf{R}(\lambda, \mu) \tilde{f}, \tilde{g})_B. \end{aligned} \quad (28)$$

Предположим, что обобщенная резольвента R_λ κ -регулярна. Тогда в качестве $\tilde{B}$ можно взять пространство Π_κ . Из (27), (28) следует, что функции $\mathbf{R}(\lambda, \mu)$, $\mathbf{N}(\lambda, \mu)$

имеют в Λ_0 не более κ отрицательных квадратов. Так как $\mathbf{R}(\lambda_0, \lambda_0)$, $\mathbf{R}(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_0)$ – самосопряженные операторы в $\mathbf{B}$, то из (28) следует, что отрицательные части спектров этих операторов состоят из $\kappa_1 \leq \kappa$ собственных значений (с учетом кратности). Равенство (27) влечет, что тем же свойством обладают операторы $\mathbf{N}(\lambda_0, \lambda_0)$, $\mathbf{N}(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_0)$.

Обратно, предположим, что функция $\mathbf{N}(\lambda, \mu)$ имеет в Λ_0 не более κ отрицательных квадратов, а отрицательные части спектров операторов $\mathbf{N}(\lambda_0, \lambda_0)$, $\mathbf{N}(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_0)$ состоят из $\kappa_1 \leq \kappa$ собственных значений (с учетом кратности). Из (27) вытекает, что такими же свойствами обладают функция $\mathbf{R}(\lambda, \mu)$ и операторы $\mathbf{R}(\lambda_0, \lambda_0)$, $\mathbf{R}(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_0)$. Докажем, что резольвента R_λ κ -регулярна. При этом используем схему доказательства теоремы 3.22 из [12; с. 333]. Оператор $E + (\lambda - \lambda_0)R_\lambda$ имеет ограниченный обратный при всех λ из некоторой окрестности точки λ_0 . Обозначим

$$U(\lambda) = E + (\lambda_0 - \bar{\lambda}_0)R_\lambda(E + (\lambda - \lambda_0)R_\lambda)^{-1}. \quad (29)$$

Непосредственными вычислениями получим равенства

$$(\mathbf{R}(\lambda, \mu)\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)_\mathbf{B} = (\mathbf{U}(\lambda, \mu)\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)_\mathbf{B}, \quad (30)$$

$$E - U^*(\lambda_0)U(\lambda_0) = (2 \operatorname{Im} \lambda_0)^2 \mathbf{R}(\lambda_0, \lambda_0), \quad (31)$$

$$E - U(\lambda_0)U^*(\lambda_0) = (2 \operatorname{Im} \lambda_0)^2 \mathbf{R}(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_0), \quad (32)$$

где $\mathbf{U}(\lambda, \mu) = (\bar{\lambda}_0 - \lambda_0)^{-1}(\lambda - \bar{\mu})^{-1}(E - U^*(\mu)U(\lambda))$, $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \mathbf{B}$, $\tilde{g}_1 = (E + (\lambda - \lambda_0)R_\lambda)\tilde{f}_1$, $\tilde{g}_2 = (E + (\mu - \lambda_0)R_\mu)\tilde{f}_2$.

Пусть

$$\xi = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda - \bar{\lambda}_0}. \quad (33)$$

Тогда $\lambda = (\xi\bar{\lambda}_0 - \lambda_0)/(\xi - 1)$. Положим $U_0(\xi) = U((\xi\bar{\lambda}_0 - \lambda_0)/(\xi - 1))$. Равенства (30)–(33) влекут, что функция $\mathbf{U}_0(\xi, \tau) = (1 - \xi\bar{\tau})^{-1}(E - U_0^*(\tau)U_0(\xi))$ имеет не более κ отрицательных квадратов в некоторой окрестности нуля и отрицательные части спектров операторов $E - U_0^*(0)U_0(0)$, $E - U_0(0)U_0^*(0)$ состоят из $\kappa_1 \leq \kappa$ собственных значений (с учетом кратности). Следовательно (см. [12; гл. 5, теоремы 3.16, 3.18]), существуют J -пространство B' и $\tilde{J} = E \oplus J$ -унитарный оператор T в пространстве $\tilde{B} = \mathbf{B} \oplus B'$ такие, что B' является пространством Π_κ и

$$P(E - \xi T)^{-1}|_\mathbf{B} = (E - \xi U_0(\xi))^{-1} \quad (34)$$

для всех ξ из некоторой окрестности нуля (здесь P – ортопроектор $\tilde{B}$ на $\mathbf{B}$). Согласно [12; гл. 5, упр. 3.11] T можно выбрать так, что T будет расширением преобразования Кэли отношения L_0 . Пусть $\tilde{\mathcal{L}} = (\lambda_0 T - \bar{\lambda}_0 E)(T - E)^{-1}$ – преобразование Кэли оператора T . Тогда $\tilde{\mathcal{L}}$ является $\tilde{J}$ -самосопряженным отношением в $\tilde{B}$, $\tilde{\mathcal{L}} \supset L_0$ и $(\tilde{\mathcal{L}} - \lambda_0 E)^{-1} = (\lambda_0 - \bar{\lambda}_0)^{-1}(T - E)$. Следовательно, $\lambda_0 \in \rho(\tilde{\mathcal{L}})$ и для всех λ из некоторой окрестности λ_0

$$(\tilde{\mathcal{L}} - \lambda E)^{-1} = (\lambda_0 - \lambda)^{-1}(E + (\xi - 1)(E - \xi T)^{-1})$$

(λ и ξ связаны равенством (33)). Отсюда и из (29), (34) получим

$$P(\tilde{\mathcal{L}} - \lambda E)^{-1}|_\mathbf{B} = (\lambda_0 - \lambda)^{-1}(E + (\xi - 1)(E - \xi U_0(\xi))^{-1}) = R_\lambda.$$

Таким образом, резольвента R_λ κ -регулярна. Теорема доказана.

Формула регулярных обобщенных резольвент симметрического отношения, порожденного неотрицательной операторной функцией и различными дифференциальными выражениями, получена в конечномерном случае в [3], [17], [18] и в бесконечномерном случае – в [3] при условии, сформулированном в замечании 5. В этих работах, а также в [5] приведена подробная библиография, относящаяся к обобщенным резольвентам.

Автор благодарит рецензента за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова Думка, Киев, 1965.
- [2] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наукова Думка, Киев, 1984.
- [3] В. М. Брук, “О линейных отношениях в пространстве вектор-функций”, *Матем. заметки*, **24:4** (1978), 499–511.
- [4] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971.
- [5] Ф. С. Рофе-Бекетов, А. М. Холькин, *Спектральный анализ дифференциальных операторов*, НАН Украины, Мариуполь, 2001.
- [6] E. A. Coddington, *Extension theory of formally normal and symmetric subspaces*, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **134**, 1973.
- [7] А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, “Спектральный анализ линейных отношений и выродившиеся полугруппы операторов”, *Матем. сб.*, **193:11** (2002), 3–42.
- [8] Pleijel Ake, “A survey of spectral theory for pairs of ordinary differential operators”, *Spectral theory and differential equations* (Proc. Sympos., Dundee, 1974; dedicated to Konrad Jörgens), *Lecture Notes in Math.*, **448**, 1975, 256–272.
- [9] В. М. Брук, “О числе линейно независимых, квадратично интегрируемых решений систем дифференциальных уравнений”, *Функцион. анализ*, **5** (1975), 25–33.
- [10] V. I. Kogan, F. S. Rofo-Beketov, “On square-integrable solutions of symmetric systems of differential equations of arbitrary order”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **74** (1976), 5–40.
- [11] В. М. Брук, “О краевых задачах, связанных с голоморфными семействами операторов”, *Функцион. анализ*, **29** (1989), 32–42.
- [12] Т. Я. Азизов, Ф. С. Иохвидов, *Основы теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986.
- [13] А. В. Штраус, “Обобщенные резольвенты симметрических операторов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **18:1** (1954), 51–86.
- [14] A. Dijksma, H. S. V. de Snoo, “Self-adjoint extensions of symmetric subspaces”, *Pacific J. Math.*, **54:1** (1974), 71–100.
- [15] В. М. Брук, “Об обобщенных резольвентах симметрических отношений в пространстве с индефинитной метрикой”, *Функцион. анализ*, **22** (1984), 29–34.
- [16] M. G. Krein, H. Langer, “Some propositions on analytic matrix functions related to the theory of operators in the space Π_κ ”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **43:1–2** (1981), 181–205.
- [17] S. J. Lee, “Formally self-adjoint systems of differential operators”, *J. Math. Anal. Appl.*, **55:1** (1976), 90–101.
- [18] В. И. Храбустовский, “Спектральный анализ периодических систем с вырождающим весом на оси и полугоси”, *Теория функций, функцион. анализ и их прилож.*, **44** (1985), 122–133.

В. М. Брук

Саратовский государственный технический университет

E-mail: bruk@san.ru

Поступило

15.04.2005

Исправленный вариант

17.03.2007