Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Глушак, О свойствах задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 5, 665–677

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4081>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 11:23:48

О свойствах задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными

А. В. Глушак

Исследуется связь между решениями абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными и их устойчивостью по отношению к возмущению ограниченным оператором. Кроме того, получены представления для решения неоднородного уравнения и для уравнения, содержащего дробную степень генератора косинус оператор-функции.

Библиография: 19 названий.

Введение. В банаховом пространстве X рассмотрим следующую задачу типа Коши с линейным замкнутым и плотно определенным оператором A :

$$D^\alpha D^\beta u(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} D^{\beta-1} u(t) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D^{\alpha-1} D^\beta u(t) = 0, \quad (2)$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$,

$$D^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u(s) ds$$

– левосторонняя дробная производная Римана–Лиувилля (см. [1; с. 84]), $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, а

$$D^{\beta-1} u(t) = I^{1-\beta} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} u(s) ds$$

– левосторонний дробный интеграл Римана–Лиувилля.

Особенностью рассматриваемой задачи является наличие двух условий вида (2) даже в том случае, когда $0 < \alpha + \beta < 1$. Эта особенность в случае обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка ($E = \mathbb{R}^1$, A – оператор умножения на число) объясняется равенством (см. [1; формула (2.68)])

$$D^\alpha D^\beta u(t) = D^{\alpha+\beta} u(t) - \frac{D^{\beta-1} u(0) t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)},$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00131).

в силу которого уравнение (1) может быть сведено к неоднородному уравнению

$$D^{\alpha+\beta}u(t) = Au(t) + \frac{D^{\beta-1}u(0)t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)},$$

и для выделения единственного решения следует задавать два условия, а именно, одно условие

$$\lim_{t \rightarrow 0} D^{\beta-1}u(t) = u_0,$$

чтобы определить правую часть уравнения, и еще одно условие, чтобы получить задачу типа Коши.

В частности, если $A = 0$, то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(t) = t^{\beta-1}c_1 + t^{\alpha+\beta-1}c_2$$

с произвольными постоянными $c_1, c_2 \in E$.

Метод сведения к неоднородному уравнению, по-видимому, менее удобен, так как он требует отдельного рассмотрения каждого из случаев $0 < \alpha + \beta \leq 1$ и $1 < \alpha + \beta < 2$.

В работе [2] доказано, что если при $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ оператор A имеет резольвенту $R(\lambda^{\alpha+\beta}) = (\lambda^{\alpha+\beta}I - A)^{-1}$, которая удовлетворяет неравенству

$$\left\| \frac{d^n(\lambda^\alpha R(\lambda^{\alpha+\beta}))}{d\lambda^n} \right\| \leq \frac{M\Gamma(n+\beta)}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{n+\beta}} \quad (3)$$

для всех целых $n \geq 0$, то задача (1), (2) равномерно корректна, ее решение определяется равенством

$$u(t) = \Phi(t)u_0 = D^{1-\beta} \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha+\beta-1} R(\lambda^{\alpha+\beta}) u_0 d\lambda, \quad (4)$$

где $u_0 \in D(A)$, $\sigma = \max(\omega, 0)$, и при этом для любого $x \in X$ справедливо представление

$$R(\lambda^{\alpha+\beta})x = \lambda^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t)x dt. \quad (5)$$

Кроме того, в [2] установлено, что неравенство (3) является и необходимым условием равномерной корректности задачи (1), (2).

В настоящей работе, являющейся продолжением [2], мы покажем, что если с оператором A равномерно корректна задача (1), (2), то с этим же оператором равномерно корректна и задача

$$D^\delta v(t) = Av(t), \quad t > 0, \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} D^{\delta-1}v(t) = v_0 \in D(A), \quad (7)$$

содержащая дробную производную порядка $\delta = (\alpha + \beta)/2$. Отметим, что равномерная корректность задачи (6), (7) и ряд других вопросов были исследованы автором в [3]–[6].

Далее в настоящей работе доказывается теорема о сохранении равномерной корректности задачи (1), (2) при возмущении оператора A ограниченным оператором,

а также устанавливается формула для решения неоднородного уравнения. Наконец, мы рассмотрим задачу типа Коши, содержащую дробную степень генератора косинус оператор-функции (КОФ).

Полученные результаты стыкуются с соответствующими результатами (см. обзорную работу [7]) для абстрактных дифференциальных уравнений целого порядка, когда $\alpha = \beta = 1$.

Среди работ, посвященных изучению абстрактных дифференциальных уравнений с дробной производной порядка α , отметим работу [8], в которой изучается ослабленная задача Коши с регуляризованной дробной производной, и работу [9], содержащую критерий равномерной корректности задачи типа Коши. Неоднородное дифференциальное уравнение порядка $1 + \alpha$ с регуляризованной дробной производной и позитивным оператором A было исследовано в [10] методом сумм Да Прато и Гривара.

1. Равномерная корректность задачи (6), (7). В дальнейшем нам понадобится функция типа Миттаг–Леффлера (см. [11; с. 224])

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

При $\beta = 1$ эта функция совпадает с функцией Миттаг–Леффлера $E_{\alpha}(z) = E_{\alpha, 1}(z)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено неравенство (3) и $\delta = (\alpha + \beta)/2$. Тогда задача (6), (7) равномерно корректна и ее решение имеет вид

$$v(t) = T_{\delta}(t)v_0 = \frac{2t^{\delta-1}}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} s^{\beta-1} E_{1, \delta}(-ts^2) \sin\left(\frac{\pi\beta}{2} - \tau s\right) ds \Phi(\tau)v_0 d\tau. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что резольвента $R(\mu)$ оператора A при $\operatorname{Re} \mu > \omega_1$ удовлетворяет неравенству

$$\left\| \frac{d^n R(\mu^{\delta})}{d\mu^n} \right\| \leq \frac{M\Gamma(n + \delta)}{(\operatorname{Re} \mu - \omega_1)^{n+\delta}} \quad (9)$$

для всех целых $n \geq 0$. Учитывая результаты работы [3], из неравенства (9) будет следовать равномерная корректность задачи (6), (7).

Положив в (5) $\lambda = \sqrt{\mu}$, получим

$$R(\mu^{\delta})x = \mu^{-\alpha/2} \int_0^{\infty} e^{-t\sqrt{\mu}} \Phi(t)x dt, \quad (10)$$

откуда, обозначив $z = t\sqrt{\mu}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^n R(\mu^{\delta})x}{d\mu^n} &= \int_0^{\infty} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^{-\alpha/2} e^{-t\sqrt{\mu}}) \Phi(t)x dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{2n+\alpha} \left(\frac{d}{d(\mu t^2)} \right)^n ((t\sqrt{\mu})^{-\alpha} e^{-t\sqrt{\mu}}) \Phi(t)x dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t^{2n+\alpha}}{2^n} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \left(z^{1-\alpha} \frac{e^{-z}}{z} \right) \Phi(t)x dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Воспользуемся в (11) формулой (см. [12; формула (1.13)])

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n (z^{2p+2n} f(z)) = \sum_{j=0}^n \frac{2^{n-j} C_n^j \Gamma(n+1+p)}{\Gamma(j+1+p)} z^{2p+2j} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^j f(z),$$

положив $2p+2n=1-\alpha$, $f(z)=z^{-1}e^{-z}$. Получим

$$\frac{d^n R(\mu^\delta)x}{d\mu^n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_n^j \Gamma(3/2-\alpha/2)}{2^j \Gamma(j-n+3/2-\alpha/2)} \int_0^\infty t^{2n+\alpha} z^{1-\alpha-2n+2j} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^j \left(\frac{e^{-z}}{z}\right) \Phi(t)x dt. \quad (12)$$

Чтобы вычислить производную функции, находящейся под знаком интеграла в (12), выразим функцию $z^{-1}e^{-z}$ через функцию Макдональда

$$K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$$

и для $\nu=1/2$ применим известную формулу дифференцирования функции Макдональда (см. [13; с. 729])

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^j (z^{-\nu} K_\nu(z)) = (-1)^j z^{-\nu-j} K_{\nu+j}(z).$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^n R(\mu^\delta)x}{d\mu^n} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=0}^n \frac{C_n^j \Gamma(3/2-\alpha/2)}{(-2)^j \Gamma(j-n+3/2-\alpha/2)} \int_0^\infty t^{2n+\alpha} z^{1/2-\alpha-2n+j} K_{1/2+j}(z) \Phi(t)x dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=0}^n \frac{C_n^j \Gamma(3/2-\alpha/2) \mu^{1/4-\alpha/2-n+j/2}}{(-2)^j \Gamma(j-n+3/2-\alpha/2)} \int_0^\infty t^{j+1/2} K_{1/2+j}(t\sqrt{\mu}) \Phi(t)x dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку (см. [14; с. 217]) в точке $z=0$ функция $K_\nu(z)$ имеет особенность вида $z^{-\nu}$, $\nu>0$, а при больших $|z|$ и $|\arg z|<\pi/2-\gamma$, $\gamma>0$,

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

то из (13) для достаточно малых $\varepsilon>0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d^n R(\mu^\delta)}{d\mu^n} \right\| &\leq M_1 \sum_{j=0}^n \frac{C_n^j |\mu|^{(1-2\alpha-4n+2j)/4}}{2^j |\Gamma(j-n+3/2-\alpha/2)|} \\ &\quad \times \left(|\mu|^{-(1+2j)/4} \int_0^{\varepsilon/\sqrt{|\mu|}} \|\Phi(t)\| dt \right. \\ &\quad \left. + \mu^{-1/4} \int_{\varepsilon/\sqrt{|\mu|}}^\infty t^j e^{-t \operatorname{Re} \sqrt{\mu}} \|\Phi(t)\| dt \right). \end{aligned} \quad (14)$$

В работе [2] для операторной функции $\Phi(t)$ доказана справедливость неравенства

$$\|\Phi(t)\| \leq M_0 t^{\beta-1} e^{\omega t}. \quad (15)$$

Таким образом, из (14), (15) выводим

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d^n R(\mu^\delta)}{d\mu^n} \right\| &\leq M_2 \sum_{j=0}^n \frac{C_n^j}{2^j |\Gamma(j-n+3/2-\alpha/2)|} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{|\mu|^{n+(\alpha+\beta)/2}} + \frac{\Gamma(j+\beta)}{|\mu|^{n+(\alpha-j)/2} (\operatorname{Re} \sqrt{\mu} - \omega)^{j+\beta}} \right) \\ &\leq \frac{M_3}{(\operatorname{Re} \mu - \omega_1)^{n+(\alpha+\beta)/2}} \sum_{j=0}^n \frac{C_n^j \Gamma(j+\beta)}{2^j |\Gamma(j-n+3/2-\alpha/2)|} \\ &\leq \frac{M_4}{(\operatorname{Re} \mu - \omega_1)^{n+(\alpha+\beta)/2}} \sum_{j=0}^n 2^{-j} C_n^j \Gamma(j+\beta) \left| \Gamma\left(n-j+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right) \right| \end{aligned} \quad (16)$$

для $\operatorname{Re} \mu > \omega_1 > 0$.

Покажем далее, что для всех целых $n \geq 0$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=0}^n 2^{-j} C_n^j \Gamma(j+\beta) \left| \Gamma\left(n-j+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right) \right| \leq M_5 \Gamma\left(n+\frac{(\alpha+\beta)}{2}\right) \quad (17)$$

с постоянной $M_5 > 0$, не зависящей от n .

При доказательстве будем использовать известное асимптотическое равенство (см. формулу (4) на с. 62 в [15])

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b} \left(1 + \frac{1}{2z} (a-b)(a+b-1) + O(z^{-2}) \right).$$

Поскольку для достаточно больших n

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^n \frac{C_n^j \Gamma(j+\beta) |\Gamma(n-j+\alpha/2-1/2)|}{2^j \Gamma(n+(\alpha+\beta)/2)} \\ &\leq M_6 \sum_{j=0}^n \frac{C_n^j \Gamma(j+1)}{2^j n^{j+(\beta+1)/2}} = \frac{M_6}{n^{(\beta+1)/2}} \sum_{j=0}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-j+1)}{2^j n^j} \leq \frac{2M_6}{n^{(\beta+1)/2}}, \end{aligned}$$

неравенство (17), очевидно, выполняется.

Из (16), (17) вытекает справедливость требуемого неравенства (9), а вместе с ним и равномерная корректность задачи (6), (7).

Установим формулу, связывающую решения задач (1), (2) и (6), (7). Учитывая представление решения задачи (6), (7) через резольвенту (см. [2]) и равенство (5), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} T_\delta(t) v_0 &= D^{1-\delta} \frac{1}{2\pi i} \text{ v. p. } \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mu^{\delta-1} e^{\mu t} R(\mu^\delta) v_0 d\mu \\ &= D^{1-\delta} \frac{1}{2\pi i} \text{ v. p. } \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mu^{\beta/2-1} e^{\mu t} d\mu \int_0^\infty e^{-\tau\sqrt{\mu}} \Phi(\tau) v_0 d\tau \\ &= \int_0^\infty D_t^{1-\delta} \frac{1}{2\pi i} \text{ v. p. } \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mu^{\beta/2-1} e^{\mu t-\tau\sqrt{\mu}} d\mu \Phi(\tau) v_0 d\tau. \end{aligned} \quad (18)$$

Так же как и в [16; с. 236] преобразуем интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mu^{\beta/2-1} e^{\mu t - \tau \sqrt{\mu}} d\mu = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty s^{\beta-1} e^{-ts^2} \sin\left(\frac{\pi\beta}{2} - \tau s\right) ds, \quad (19)$$

и учитывая равенство (см. [1; с. 140]) $D^{1-\delta} e^{\lambda t} = t^{\delta-1} E_{1,\delta}(\lambda t)$, из (18), (19) получаем представление (8). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для согласования полученного представления (8) с уже имеющимся, отметим, что если в (19) положить $\alpha = \beta = 1$, то интеграл (19) можно вычислить и формула (8) превращается в хорошо известную формулу (см. [7; с. 130]), связывающую C_0 -полугруппу $T(t, A)$ с КОФ $C(t, A)$,

$$T(t, A)v_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\tau^2/(4t)} C(\tau, A)v_0 d\tau.$$

2. Возмущение оператора A в задаче (1), (2) ограниченным оператором. Переходим к установлению равномерной корректности задачи (1), (2) при возмущении оператора A ограниченным оператором P , $P \in B(X)$. Рассмотрим задачу о нахождении решения уравнения

$$D^\alpha D^\beta u(t) = (A + P)u(t), \quad t > 0, \quad (20)$$

удовлетворяющего начальным условиям (2).

ТЕОРЕМА 2. Пусть задача (1), (2) равномерно корректна и $P \in B(X)$. Тогда задача (20), (2) также равномерно корректна и при этом для разрешающего оператора $\Phi(t, A + P)$ справедливо представление

$$\Phi(t, A + P)x = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(t)x, \quad x \in X,$$

где $\Phi_0(t)x = \Phi(t)x$ (см. (4)), $\Psi_0(t)x = I^\alpha \Phi(t)x$,

$$\begin{aligned} \Psi_n(t)x &= \int_0^t \Psi_0(t-s)P\Psi_{n-1}(s)x ds, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \Phi_n(t)x &= D^\alpha \Psi_n(t)x = \int_0^t \Phi(t-s)P\Psi_{n-1}(s)x ds, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (3) при $\operatorname{Re} \lambda > \omega_2 > 0$ вытекает существование резольвенты $R(\lambda^{\alpha+\beta}, A + P)$ и справедливость равенства

$$R(\lambda^{\alpha+\beta}, A + P)x = R(\lambda^{\alpha+\beta}, A) \sum_{n=0}^{\infty} (PR(\lambda^{\alpha+\beta}, A))^n x. \quad (21)$$

В дальнейшем нам понадобятся оценки норм операторов, введенных при формулировке теоремы. В [2] доказана справедливость неравенства

$$\|\Phi(t)\| \leq M_0 t^{\beta-1} e^{\omega t}, \quad (22)$$

из которого легко следуют следующие неравенства:

$$\|\Psi_0(t)\| \leq M_1 t^{\alpha+\beta-1} e^{\omega t}, \quad M_1 = \frac{M_0 \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \quad (23)$$

$$\|\Psi_n(t)\| \leq \frac{M_1^{n+1} \|P\|^n \Gamma^{n+1}(\alpha + \beta)}{\Gamma((n+1)(\alpha + \beta))} t^{(n+1)(\alpha+\beta)-1} e^{\omega t}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

$$\|\Phi_n(t)\| \leq \frac{M M_1^n \|P\|^n \Gamma^n(\alpha + \beta) \Gamma(\beta)}{\Gamma(n(\alpha + \beta) + \beta)} t^{(n+1)\beta+n\alpha-1} e^{\omega t}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (25)$$

Введем в рассмотрение ряды

$$\widehat{\Psi}(t)x = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(t)x, \quad \widehat{\Phi}(t)x = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(t)x,$$

сходящиеся абсолютно в силу (22)–(25) и допускающие оценки

$$\begin{aligned} \|\widehat{\Psi}(t)x\| &\leq M_1 \Gamma(\alpha + \beta) t^{\alpha+\beta-1} e^{\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(M_1 \|P\| \Gamma(\alpha + \beta) t^{\alpha+\beta})^n}{\Gamma(n(\alpha + \beta) + \alpha + \beta)} \\ &= M_1 \Gamma(\alpha + \beta) t^{\alpha+\beta-1} e^{\omega t} E_{\alpha+\beta, \alpha+\beta}(M_1 \Gamma(\alpha + \beta) \|P\| t^{\alpha+\beta}) \\ &\leq M_2 t^{\alpha+\beta-1} e^{\omega_3 t}, \quad M_2, \omega_3 > 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\|\widehat{\Phi}(t)x\| \leq M_3 t^{\beta-1} e^{\omega_4 t}, \quad M_3, \omega_4 > 0, \quad (27)$$

при этом мы использовали асимптотическое равенство

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{\alpha\pi}{2},$$

которому удовлетворяет функция типа Миттаг–Леффлера (см. формулу (22) на с. 224 в [11]).

Более того, в силу абсолютной сходимости рядов справедливо равенство

$$I^\alpha \widehat{\Phi}(t)x = \widehat{\Psi}(t)x. \quad (28)$$

Покажем, что при $x \in X$, $\operatorname{Re} \lambda > \omega_5 = \max(\omega_5, \omega_4)$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \Psi_n(t)x dt = R(\lambda^{\alpha+\beta}, A)P \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Psi_{n-1}(t)x dt. \quad (29)$$

Действительно, в силу (5) после очевидных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Psi_n(t)x dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \int_0^t \Psi_0(t-s)P\Psi_{n-1}(s)x ds \\ &= \int_0^\infty ds \int_s^\infty e^{-\lambda t} \Psi_0(t-s)P\Psi_{n-1}(s)x dt \\ &= \int_0^\infty ds \int_0^\infty e^{-\lambda(s+\tau)} \Psi_0(\tau)P\Psi_{n-1}(s)x d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} ds \int_0^\infty e^{-\lambda \tau} \Psi_0(\tau)P\Psi_{n-1}(s)x d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{-\lambda s} ds \lambda^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-\lambda \tau} \Phi(\tau) P \Psi_{n-1}(s) x d\tau \\
&= R(\lambda^{\alpha+\beta}, A) P \int_0^\infty e^{-\lambda s} \Psi_{n-1}(s) x ds.
\end{aligned}$$

Применяя равенство (29) n раз, с учетом (5) получим

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t} \Psi_n(t) x dt &= R(\lambda^{\alpha+\beta}, A) (P R(\lambda^{\alpha+\beta}, A))^{n-1} P \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Psi_0(t) x dt \\
&= R(\lambda^{\alpha+\beta}, A) (P R(\lambda^{\alpha+\beta}, A))^{n-1} P \lambda^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t) x dt \\
&= R(\lambda^{\alpha+\beta}, A) (P R(\lambda^{\alpha+\beta}, A))^n
\end{aligned}$$

и, следовательно, в силу (21)

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \widehat{\Psi}(t) x dt = R(\lambda^{\alpha+\beta}, A + P) x. \quad (30)$$

Учитывая (28), из (30) выводим

$$R(\lambda^{\alpha+\beta}, A + P) x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} I^\alpha \widehat{\Phi}(t) x dt = \lambda^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \widehat{\Phi}(t) x dt$$

и, окончательно,

$$\lambda^\alpha R(\lambda^{\alpha+\beta}, A + P) x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \widehat{\Phi}(t) x dt. \quad (31)$$

Из (31) и (27) вытекает неравенство

$$\left\| \frac{d^n (\lambda^\alpha R(\lambda^{\alpha+\beta}, A + P))}{d\lambda^n} \right\| \leq \frac{M_0 \Gamma(n + \beta)}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega_5)^{n+\beta}}$$

для всех целых $n \geq 0$ и $\operatorname{Re} \lambda > \omega_5$, которое в силу теоремы 4 из [2] является достаточным условием равномерной корректности задачи (20), (2).

Наконец, из (31) в силу теоремы 2 из [2] и единственности преобразования Лапласа следует

$$\Phi(t, A + P) x = \widehat{\Phi}(t) x = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(t) x.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для согласования полученного результата, отметим, что утверждение теоремы 2 при $\alpha = \beta = 1$ и замене операторных функций $\Phi_0(t)$ и $\Psi_0(t)$ соответственно на КОФ $C(t, A)$ и синус оператор-функцию (СОФ)

$$S(t, A) = \int_0^t C(\tau, A) d\tau,$$

превращается в соответствующий результат работы [17] о возмущении генератора КОФ ограниченным оператором.

3. Неоднородное уравнение. Установим далее формулу для решения задачи типа Коши для неоднородного уравнения

$$D^\alpha D^\beta u(t) = Au(t) + f(t), \quad t > 0. \quad (32)$$

При этом мы будем использовать операторную функцию $\Phi(t)$ (см. (4)), а также операторную функцию $\Psi_0(t) = I^\alpha \Phi(t)$, введенную в теореме 2 и которую в дальнейшем будем обозначать $\Psi(t)$.

Отметим, что функция $\Psi(t)u_1$, $u_1 \in D(A)$, удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} D^{\beta-1} \Psi(t)u_1 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D^{\alpha-1} D^\beta \Psi(t)u_1 = u_1. \quad (33)$$

Этот факт легко может быть установлен, используя соответствующие свойства функции $\Phi(t)u_1$ и теорему 2.5 [1] о полугрупповом свойстве операции дробного интегрирования.

ТЕОРЕМА 3. Пусть задача (1), (2) равномерно корректна, $u_0 \in D(A)$, функция $f(t) \in C((0, \infty), X)$ абсолютно интегрируема в нуле, принимает значения в $D(A)$, $Af(t) \in C(0, \infty), X$ и также абсолютно интегрируема в нуле. Тогда задача (32), (2) имеет единственное решение, которое определяется равенством

$$u(t) = \Phi(t)u_0 + \int_0^t \Psi(t-s)f(s) ds. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить, что при сделанных предположениях функция

$$w(t) = \int_0^t \Psi(t-s)f(s) ds$$

удовлетворяет уравнению (32) и нулевым начальным условиям (2). При $t > 0$ после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} D^\beta w(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} d\tau \int_0^\tau \Psi(\tau-s)f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t ds \int_s^t (t-\tau)^{-\beta} \Psi(\tau-s)f(s) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t ds \int_0^{t-s} (t-s-\xi)^{-\beta} \Psi(\xi)f(s) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \lim_{s \rightarrow t} \int_0^{t-s} (t-s-\xi)^{-\beta} \Psi(\xi)f(s) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t ds \frac{d}{dt} \int_0^{t-s} (t-s-\xi)^{-\beta} \Psi(\xi)f(s) d\xi \\ &= \lim_{t-s \rightarrow 0} D^{\beta-1} \Psi(t-s)f(s) + \int_0^t D^\beta \Psi(t-s)f(s) ds \\ &= \int_0^t D^\beta \Psi(t-s)f(s) ds. \end{aligned} \quad (35)$$

Далее, аналогично предыдущему будем иметь

$$\begin{aligned} D^\alpha D^\beta w(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{s \rightarrow t} \int_0^{t-s} (t-s-\xi)^{-\alpha} D^\beta \Psi(\xi) f(s) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t ds \frac{d}{dt} \int_0^{t-s} (t-s-\xi)^{-\alpha} D^\beta \Psi(\xi) f(s) d\xi \\ &= \lim_{t-s \rightarrow 0} D^{\alpha-1} D^\beta \Phi(t-s) f(s) + \int_0^t D^\alpha D^\beta \Psi(t-s) f(s) ds \\ &= f(t) + A \int_0^t \Psi(t-s) f(s) ds = f(t) + Aw(t); \end{aligned}$$

следовательно, функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению (32).

Проверим теперь, что функция $w(t)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям (2). Имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} D^{\beta-1} w(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} d\tau \int_0^\tau \Psi(\tau-s) f(s) ds. \quad (36)$$

В силу неравенства (23) для $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} d\tau \int_0^\tau \Psi(\tau-s) f(s) ds \right\| \\ &\leq M_1 \int_0^t \|f(s)\| ds \int_s^t (t-\tau)^{-\beta} (\tau-s)^{\alpha+\beta-1} e^{\omega(\tau-s)} d\tau \\ &\leq M_4 \int_0^t (t-s)^\alpha \|f(s)\| ds. \end{aligned} \quad (37)$$

Из (36), (37) следует, что функция $w(t)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow 0} D^{\beta-1} w(t) = 0.$$

Для того, чтобы проверить справедливость второго начального условия в (2), используя (35), запишем

$$\begin{aligned} D^{\alpha-1} D^\beta w(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \int_0^\tau D^\beta \Psi(\tau-s) f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t ds \int_s^t (t-\tau)^{-\alpha} D^\beta \Psi(\tau-s) f(s) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t ds \int_0^{t-s} (t-s-\xi)^{-\alpha} D^\beta \Psi(\xi) f(s) d\xi \\ &= \int_0^t D^{\alpha-1} D^\beta I^\alpha \Phi(t-s) f(s) ds = \int_0^t D^{\beta-1} \Phi(t-s) f(s) ds, \end{aligned}$$

откуда аналогично (37) для $t \in [0, 1]$ получим

$$\|D^{\alpha-1} D^\beta w(t)\| \leq M_5 \int_0^t \|f(s)\| ds$$

и, следовательно, $\lim_{t \rightarrow 0} D^{\alpha-1} D^\beta w(t) = 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Формула (34) при $\alpha = \beta = 1$ и замене операторных функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ соответственно на КОФ $C(t, A)$ и СОФ $S(t, A)$ превращается в хорошо известную формулу для решения неоднородного уравнения второго порядка с генератором КОФ.

4. Задача типа Коши (1), (2) с оператором A , являющимся дробной степенью генератора КОФ. Пусть E – комплексное банаховое пространство и A – генератор равномерно ограниченной КОФ. Тогда можно определить положительную дробную степень оператора $-A$ (см., например, [18; с. 96])

$$-(-A)^\gamma f = \frac{\sin \gamma \pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\gamma-1} (\lambda I - A)^{-1} A f d\lambda, \quad (38)$$

где $\gamma \in (0, 1)$, $f \in D(A)$.

При этом, если $g \in E$, $\mu > 0$, то для резольвенты оператора $-(-A)^\gamma$, который в дальнейшем будем обозначать A_γ , справедливо представление

$$(\mu I - A_\gamma)^{-1} g = \frac{\sin \gamma \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^\gamma (\lambda I - A)^{-1} g d\lambda}{\mu^2 - 2\mu\lambda^\gamma \cos \gamma \pi + \lambda^{2\gamma}}. \quad (39)$$

Покажем, что с оператором A_γ , где $\gamma = (\alpha + \beta)/2$, равномерно корректна следующая задача типа Коши

$$D^\alpha D^\beta u(t) = A_\gamma u(t), \quad t > 0, \quad (40)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} D^{\beta-1} u(t) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D^{\alpha-1} D^\beta u(t) = 0. \quad (41)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\gamma = (\alpha + \beta)/2$, A является генератором равномерно ограниченной КОФ и оператор A_γ определен равенством (38). Тогда задача типа Коши (40), (41) равномерно корректна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось во введении, критерий равномерной корректности задачи (40), (41) состоит в том, чтобы при $\mu > 0$ резольвента $(\mu I - A_\gamma)^{-1}$ удовлетворяла неравенству типа (3), которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\left\| \frac{d^n (\mu^\alpha (\mu^{\alpha+\beta} I - A_\gamma)^{-1})}{d\mu^n} \right\| \leq \frac{M\Gamma(n + \beta)}{\mu^{n+\beta}}. \quad (42)$$

Используя представление (39), установим справедливость оценки (42). Полагая $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$, после замены переменной из (39) получим

$$\begin{aligned} \mu^\alpha (\mu^{\alpha+\beta} I - A_\gamma)^{-1} g &= \frac{\mu^{2-\beta} \sin \gamma \pi}{\gamma \pi} \int_0^\infty \frac{s^{1/\gamma} R(\mu^2 s^{1/\gamma}) g ds}{s^2 - 2s \cos \gamma \pi + 1} \\ &= \frac{\sin \gamma \pi}{\gamma \pi} \int_0^\infty \frac{s^{\beta/(2\gamma)} p^{2-\beta} R(p^2) g ds}{s^2 - 2s \cos \gamma \pi + 1}, \end{aligned}$$

где $p = \mu s^{1/(2\gamma)}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} &\frac{d^n (\mu^\alpha (\mu^{\alpha+\beta} I - A_\gamma)^{-1} g)}{d\mu^n} \\ &= \frac{\sin \gamma \pi}{\gamma \pi} \int_0^\infty (s^{(\beta+n)/(2\gamma)} s^2 - 2s \cos \gamma \pi + 1) \frac{d^n}{dp^n} (p^{1-\beta} (p R(p^2) g)) ds. \end{aligned} \quad (43)$$

Используя формулу Лейбница и неравенство

$$\left\| \frac{d^n(pR(p^2))}{dp^n} \right\| \leq \frac{M_1 n!}{p^{n+1}}, \quad p > 0,$$

которое для резольвенты генератора КОФ справедливо в силу теоремы Совы (см. [7], [18]), оценим

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{d^n}{dp^n} (p^{1-\beta} (pR(p^2)g)) \right\| \\ & \leq \frac{M_1 \|g\|}{p^{n+\beta}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (1-\beta)\beta \times \cdots \times |-\beta - n + j + 2|j! \\ & = \frac{M_1 \|g\| \Gamma(n+\beta-1)}{|\Gamma(\beta-1)| p^{n+\beta}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n+\beta-2}{j}^{-1} \\ & = \frac{M_1 \|g\| \Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta) p^{n+\beta}} \left(1 - \binom{n}{n+1} \binom{n+\beta-1}{n+1}^{-1} \right) = \frac{M_1 \Gamma(n+\beta) \|g\|}{\Gamma(\beta) p^{n+\beta}}, \end{aligned} \quad (44)$$

при этом мы воспользовались формулой [19; 4.2.8.1].

Из (43), (44) вытекает справедливость неравенства

$$\left\| \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^\alpha (\mu^{\alpha+\beta} I - A_\gamma)^{-1}) \right\| \leq \frac{M_1 \Gamma(n+\beta)}{\mu^{n+\beta}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2 - 2s \cos \gamma\pi + 1} \leq \frac{M \Gamma(n+\beta)}{\mu^{n+\beta}},$$

и тем самым доказано неравенство (42), а вместе с ним и теорема.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.
- [2] А. В. Глушак, “Задача типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными”, *Матем. заметки*, **77**:1 (2005), 28–41.
- [3] А. В. Глушак, “О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной”, *Вестн. ВГУ. Сер. физ., матем.*, 2001, № 2, 74–77.
- [4] А. В. Глушак, “О задаче типа Коши для неоднородного абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной”, *Вестн. ВГУ. Сер. физ., матем.*, 2002, № 1, 121–123.
- [5] А. В. Глушак, “О связи решений абстрактных дифференциальных уравнений, содержащих дробные производные”, *Вестн. ВГУ. Сер. физ., матем.*, 2002, № 2, 61–63.
- [6] А. В. Глушак, “О периодических решениях абстрактных дифференциальных уравнений с дробной производной”, *Вестн. ВГУ. Сер. физ., матем.*, 2003, № 1, 96–98.
- [7] В. В. Васильев, С. Г. Крейн, С. И. Пискарев, “Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения”, *Итоги науки и техники. Матем. анализ*, **28**, ВИНТИ, М., 1990, 87–202.
- [8] А. Н. Кочубей, “Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка”, *Дифференц. уравнения*, **25**:8 (1989), 1359–1368.
- [9] В. А. Костин, “К задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными”, *Докл. РАН*, **326**:4 (1992), 597–600.
- [10] Ph. Clement, G. Gripenberg, S.-O. Loden, “Regularity properties of solution of fractional evolution equation”, *Evolution Equations and Their Applications in Physical and Life Sciences* (Bad Herrenalb, 1998), *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, **215**, Dekker, New York, 2001, 235–246.

- [11] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матъе*, Наука, М., 1967.
- [12] С. А. Терсенов, *Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе*, Новосибирский ГУ, Новосибирск, 1973.
- [13] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, М., 1983.
- [14] А. Г. Земаян, *Интегральные преобразования обобщенных функций*, Наука, М., 1974.
- [15] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Наука, М., 1965.
- [16] А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов, *Теория функций комплексной переменной*, Курс высшей математики и математической физики, 4, Наука, М., 1967.
- [17] С. С. Travis, G. F. Webb, "Perturbation of strongly continuous cosine family generators", *Colloq. Math.*, **45**:2 (1981), 277–285.
- [18] Дж. Голдстейн, *Полугруппы линейных операторов и их приложения*, Выща школа, Киев, 1989.
- [19] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981.

А. В. Глушак

Белгородский государственный университет

E-mail: aleglu@mail.ru

Поступило

09.02.2005

Исправленный вариант

10.04.2007