Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. И. Голенищева-Кутузова, В. А. Клепцын, Исследование сходимости процедуры Крылова–Боголюбова в примере Боуэна, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 5, 678–689

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4082>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:23:56

Исследование сходимости процедуры Крылова–Боголюбова в примере Боуэна

Т. Голенищева-Кутузова, В. Клепцын

В работе исследуется поведение временных средних меры в примере Боуэна: векторном поле на плоскости с двумя седлами, связанными двумя сепаратрисными связками. В работе приведен явный критерий сходимости усредненных мер и описано множество их частичных пределов. Как следствие, для типичной начальной меры ее временные средние не сходятся.

Библиография: 13 названий.

1. Введение

1.1. Описание примера Боуэна. Рассмотрим на плоскости векторное поле с двумя седлами O_1 и O_2 такими, что исходящая сепаратриса каждого из них совпадает с входящей сепаратрисой другого. Обозначим собственные значения седел через $-\mu_1 < 0$ и $\lambda_1 > 0$ для первого седла и $-\mu_2 < 0$ и $\lambda_2 > 0$ для второго. Предположим, что

$$\Lambda = \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda_1 \lambda_2} > 1.$$

Это условие означает, что все траектории, достаточно близкие к “сепаратрисному двугольнику” (объединению сепаратрис и седел), будут к нему приближаться.

Такая динамическая система (изображенная на рис. 1) называется *примером Боуэна* или *гетероклиническим аттрактором*.

Этот пример, придуманный Боуэном на рубеже 70-х годов, впервые описан в литературе в статье [1]. В этой работе было доказано, что для почти всех в смысле лебеговой меры точек, лежащих внутри сепаратрисного двугольника, не существует временных средних.

Позднее Такенс [2] нашел полную систему инвариантов топологической сопряженности потоков в окрестности гетероклинического аттрактора.

1.2. Постановка задачи. Напомним, как устроена процедура Крылова–Боголюбова – процедура нахождения инвариантной меры у динамической системы на компактном множестве. Пусть g^t – фазовый (полу)поток, а m – мера. Пусть $g_*^t m$ –

Работа обоих авторов была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 02-01-22002, 02-01-00482) и CRDF (грант RM1-2358-MO-02).

сдвиг меры m под действием фазового потока g^t за время t , т.е. $g_*^t m(U) = m(\{x \mid g_t(x) \in U\})$. Рассмотрим временные средние m_t меры m :

$$m_t = \frac{1}{t} \int_0^t g_*^\tau m \, d\tau.$$

Известно, что если при $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} m_{t_n}$, то полученная предельная мера будет инвариантна. Процедура Крылова–Боголюбова и состоит во взятии любого частичного предела мер m_t при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим меры, абсолютно непрерывные относительно лебеговой, с носителем внутри “сепаратрисного двуугольника”. Будем выбирать начальную меру m из этого класса. Мы рассматриваем следующую задачу: *выяснить, как устроено множество частичных пределов мер m_t при $t \rightarrow \infty$* . В частности, выяснить, существует ли предел m_t при $t \rightarrow \infty$.

Тодд Янг в статье [3] доказал, что в центрально-симметричном примере Боуэна для всюду плотного множества мер процедура Крылова–Боголюбова не будет иметь предела, а также, что существуют меры, для которых предел есть. Системы, рассмотренные Янгом, имеют бесконечную коразмерность. В этой работе будет рассмотрен общий случай примера Боуэна, имеющий коразмерность 2 в пространстве векторных полей на плоскости.

В этой статье будет доказано необходимое и достаточное условие на меру, для которой в процедуре Крылова–Боголюбова имеет место предел, а в случае, когда предела нет, будет описано множество частичных пределов.

Отметим, что носитель любой инвариантной меры в примере Боуэна может состоять только из двух точек – седел O_1 и O_2 . Поэтому единственное, от чего зависит существование предела, это стабилизируется ли доля меры, сосредоточенная около первого (и, соответственно, около второго) седла.

1.3. Связь с SRB-мерами. Эта задача может быть сформулирована в терминах SRB-мер. Понятие SRB-меры появилось в работах Синая [4], Рюэлля [5] и Боуэна [6]; грубо говоря, так называются меры, которые естественно наблюдать в реальном эксперименте. Существует несколько различных (и неэквивалентных!) определений SRB-меры, из которых мы упомянем два. *Естественной* называется мера, к которой сходятся временные средние любой абсолютно непрерывной (относительно лебеговой) меры. *Наблюдаемой* называется мера, в соответствии с которой распределены траектории почти всех (в смысле меры Лебега) точек. Эти определения могут быть найдены, к примеру, в обзоре [7] (см. также работы [8]–[10]). Там же показано, что наблюдаемая мера одновременно оказывается и естественной, однако обратное, вообще говоря, неверно (см. [11], [12]). Пример Боуэна является примером несуществования наблюдаемых мер, однако отсюда не следует, что для него нет естественной меры. Настоящая работа как раз и доказывает это последнее утверждение: в примере Боуэна естественной меры также нет.

2. Формулировка теоремы об отсутствии предела

Рассмотрим пример Боуэна. Как уже было сказано выше, наложенное на собственные значения седел условие означает, что все траектории, достаточно близкие

к сепаратрисному двуугольнику и лежащие внутри него, к нему стремятся. Это означает, что существует окрестность Ω сепаратрисного двуугольника, лежащая внутри ограниченной им области, такая, что любая траектория, начинающаяся в Ω , не уходит из Ω и стремится (при $t \rightarrow +\infty$) к сепаратрисному двуугольнику.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем меру m в примере Боуэна *допустимой*, если мера m абсолютно непрерывна относительно лебеговой и ее носитель лежит внутри Ω .

ТЕОРЕМА 1. В C^3 -гладком примере Боуэна для типичной допустимой меры m усредненные меры m_t не будут иметь предела при $t \rightarrow \infty$, а множеством частичных пределов будет отрезок в пространстве мер.

Типичность в данном случае означает, что условие выполнено вне подпространства бесконечной коразмерности в пространстве мер.

Эта теорема легко выводится из теоремы 2 (см. раздел 4), описывающей предельные точки семейства m_t при $t \rightarrow \infty$, и ее следствия 1, устанавливающего явный критерий существования предела. Для того, чтобы сформулировать эти утверждения, нам понадобится несколько обозначений и определений.

3. Обозначения, определения и вспомогательные утверждения

Проведем две трансверсали l_1 и l_2 , как показано на рис. 1. Нам потребуется следующий технический (и достаточно известный) результат.

ЛЕММА 1. Для трансверсалей к сепаратрисам седла с собственными значениями λ и $-\mu$ отображение соответствия $\pi^s(\xi)$ и время последования $t^s(\xi)$ имеют вид

$$\ln \pi^s(\xi) = \frac{\mu}{\lambda} \ln \xi^{-1} + r_\pi(\xi), \quad (1)$$

$$t^s(\xi) = \frac{1}{\lambda} \ln \xi^{-1} + r_t(\xi) = \frac{1}{\mu} \ln(\pi^s(\xi))^{-1} + \tilde{r}_t(\xi), \quad (2)$$

где $r_\pi = O(1)$ и $r_t, \tilde{r}_t = O(1)$ при $\xi \rightarrow 0$.

Иначе говоря, оказывается, что отображение переклейки и время последования не очень сильно отличаются от таковых для линейных седел.

В случае C^∞ -гладкой системы для доказательства этой леммы можно воспользоваться теоремой о C^∞ -гладкой орбитальной эквивалентности плоской системы с элементарной особой точкой своей формальной орбитальной нормальной форме (см. [13; с. 47, 51]) и полным списком соответствующих нормальных форм (см. там же). Несложные прямые выкладки, приведенные в конце раздела 6 (выбор системы координат с осями-сепаратрисами, применение леммы Адамара и оценка интегралов), позволяют обобщить эту лемму и на нужный нам случай C^3 -гладких систем.

Обозначим через r_π^1 и r_π^2 остаточные члены в представлении (1) отображения последования для первого и второго седла соответственно, а через r_t^1 и r_t^2 остаточные члены в представлениях соответствующих времен последования. Пусть U_1 и U_2 – окрестности седел O_1 и O_2 , ограниченные трансверсальями l_1 и l_2 , изображенные на рисунке. Наконец, через $\tau_k^1(x)$, $\tau_k^2(x)$, $\sigma_k^1(x)$ и $\sigma_k^2(x)$ мы обозначим соответственно время k -го входа точки x в окрестности U_1 и U_2 и проводимое в этих окрестностях на

Рис. 1. Пример Боуэна

k -м проходе время. Здесь под первым входом в U_1 имеется в виду первое пересечение трансверсали l_1 , (т.е., если точка находится внутри окрестности U_1 , ей придется “сделать круг”), а под первым входом в U_2 – первое пересечение трансверсали l_2 после первого пересечения трансверсали l_1 .

Предположим для начала, что $r_\pi^j(\xi) = r_t^j(\xi) \equiv 0$, $j = 1, 2$ (“линейный случай”). Пусть начальная точка x находится на трансверсали l_1 и имеет координату по трансверсали ξ_1 . Координату n -го попадания на l_1 обозначим через ξ_n . Тогда $\ln \xi_{n+1} = \Lambda \ln \xi_n$. Соответственно, времена $\sigma_k^j(x)$, затраченные на проход U_j на k -м круге, растут в геометрической прогрессии со знаменателем Λ , а значит, то же верно и для их сумм $\tau_n^j(x)$:

$$\tau_{n+1}^1(x) = \tau_1^1(x) + \sum_{k=1}^n \Lambda^k \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{\mu_1}{\lambda_2} + 1 \right) \ln \xi_1^{-1} = \tau_1^1(x) + \frac{C(\Lambda^{k+1} - 1)}{\Lambda - 1} = C' \Lambda^{k+1} + C_1(x).$$

Следующая лемма показывает, что в общем случае справедливо аналогичное утверждение.

ЛЕММА 2. Для любой точки $x \in \Omega$ существует предел $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k^1(x) / \Lambda^k$. При этом функция $f(x)$ будет непрерывна во всех точках x , кроме трансверсали l_1 , на которой происходит скачок в Λ раз, т.е. в окрестности трансверсали l_1 будет непрерывна функция

$$\gamma(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in U_1, \\ \Lambda f(x), & \text{если } x \notin U_1. \end{cases}$$

Заметим, что функция f постоянна на не пересекающих трансверсаль l_1 отрезках орбит, поэтому если рассматривать значения функции $f(x)$ с точностью до умножения на Λ , то она становится корректно определенной непрерывной функцией на пространстве траекторий. Более формально, рассмотрим пространство орбит внутри Ω . отождествим его с отрезком трансверсали l_1 от некоторой точки p до ее образа под действием отображения первого возвращения; при этом концы выбранного отрезка склеиваются. Легко видеть, что пространство орбит с топологической точки зрения является окружностью, поэтому мы будем обозначать его S_{Traj}^1 . Также, обозначим через G_Λ факторгруппу $G_\Lambda = \mathbb{R}^+ / \Lambda^{\mathbb{Z}}$, а через π и π_Λ соответственно естественные

проекции $\pi: \Omega \rightarrow S_{\text{Traj}}^1$ и $\pi_\Lambda: \mathbb{R}^+ \rightarrow G_\Lambda$. Тогда отображению f сопоставляется непрерывное отображение $\tilde{f}: S_{\text{Traj}}^1 \rightarrow G_\Lambda$ такое, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_\Lambda \\ S_{\text{Traj}}^1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & G_\Lambda \end{array}$$

Пусть мера m' – мера на пространстве траекторий, полученная из меры m применением отображения π : $m' = \pi_*(m)$. Обозначим через ν меру на пространстве G_Λ , являющуюся образом меры m' под действием отображения $\tilde{f}(x)$. Как мы покажем, сходимость мер m_t зависит только от собственных значений седел и от меры ν .

Для исследования поведения усредненных мер нам потребуется исследовать асимптотическое поведение отдельных точек. Обозначим через $S_x^1(t)$ долю времени, проведенную точкой x в первой окрестности к моменту времени t . Пусть

$$\Lambda_{21} = \frac{\mu_1}{\lambda_2}, \quad \Lambda_0 = \frac{\Lambda + \Lambda_{21}}{1 + \Lambda_{21}}.$$

Введем функцию на группе G_Λ , смысл которой будет ясен из леммы 3:

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} 1 - \frac{\Lambda_{21}}{(\Lambda_{21} + 1)\theta}, & \theta \in [1, \Lambda_0], \\ \frac{\Lambda}{(\Lambda_{21} + 1)\theta}, & \theta \in [\Lambda_0, \Lambda), \end{cases}$$

и поднимем ее до функции на $\mathbb{R}^+$ мультипликативно-периодичным образом: $\Phi(\Lambda\theta) = \Phi(\theta)$. Следующая лемма показывает, что функция $S_x^1(t)$ асимптотически периодична с мультипликативным периодом Λ , и что в пределе она становится “похожа” именно на функцию Φ .

ЛЕММА 3. *Для любой точки $x \in \Omega$ имеет место равномерная сходимость:*

$$S_x^1(\theta f(x)\Lambda^k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\theta \in [1, \Lambda]} \Phi(\theta).$$

Строгое доказательство этой леммы приведено в разделе 6. Идея доказательства такова: времена, проводимые точкой x как в первой, так и во второй окрестности, растут в геометрической прогрессии со знаменателем Λ , сохраняя отношение $1 : \Lambda_{21}$. Соответственно, в момент очередного входа в 1-ю окрестность $S_x^1(\tau_n(x)) \approx 1/(1 + \Lambda_{21})$. В частности, время, проведенное к этому моменту в первой и во второй окрестности, асимптотически пропорционально τ_n с коэффициентами $1/(1 + \Lambda_{21})$ и $\Lambda_{21}/(1 + \Lambda_{21})$ соответственно. Рассмотрим теперь момент времени $t = \theta\tau_n$, к которому точка еще не успела покинуть первую окрестность (что происходит примерно при $\theta = \Lambda_0$). Тогда время, проведенное в первой окрестности, примерно равно $(1/(1 + \Lambda_{21}))\tau_n + (\theta - 1)\tau_n$, а во второй – $(\Lambda_{21}/(1 + \Lambda_{21}))\tau_n$. Обе части пропорциональны τ_n , поэтому их частное оказывается корректно определенной функцией от θ , которую мы и выбрали как $\Phi(\theta)$. Аналогично разбирается случай $\theta \in [\Lambda_0, \Lambda]$. Строгая формализация этих рассуждений, как уже было сказано, приведена в разделе 6.

Поскольку G_Λ – группа по умножению, на ней можно рассматривать мультипликативную свертку функции Φ , определенной на этой группе, и меры ν :

$$\Phi * \nu(T) = \int_{G_\Lambda} \Phi\left(\frac{T}{\theta}\right) \nu(d\theta).$$

Теперь можно сформулировать основную теорему.

4. Формулировки основных результатов

ТЕОРЕМА 2 (Основной результат). *В примере Боуэна класса гладкости C^3 множество частичных пределов при $t \rightarrow \infty$ семейства временных средних m_t имеет вид*

$$\{\alpha \delta_{O_1} + (1 - \alpha) \delta_{O_2} \mid \alpha \in [\inf_{G_\Lambda} (\Phi * \nu), \sup_{G_\Lambda} (\Phi * \nu)]\}.$$

Здесь δ_x – δ -мера, сосредоточенная в точке x .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Предел m_t при $t \rightarrow \infty$ существует, если и только если $\Phi * \nu = \text{const}$.*

СЛЕДСТВИЕ 2 (Теорема 1). *В любом примере Боуэна предел m_t при $t \rightarrow \infty$ не будет существовать для меры m вне подпространства бесконечной коразмерности в пространстве мер.*

Обозначим через $\log$ естественное отображение $G_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}/(\ln \Lambda)\mathbb{Z}$. Пусть $L = \log \circ \tilde{f}: S^1 \rightarrow \mathbb{R}/(\ln \Lambda)\mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\log_{\Lambda_0}(\Lambda) \notin \mathbb{Q}$. Тогда процедура Крылова–Боголюбова, начинающаяся с меры m , будет сходиться, если и только если будет выполнено следующее условие: мера m' на пространстве траекторий, построенная по мере m , переходит под действием отображения L в меру Лебега.*

ТЕОРЕМА 4. *В случае, если $\log_{\Lambda_0}(\Lambda) = p/q \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$, предел будет существовать тогда и только тогда, когда образ меры m' под действием отображения L будет инвариантен относительно отображения $\xi \rightarrow \xi + \ln(\Lambda)/q$ (поворот на $(1/q)$ -ю часть полного оборота).*

5. Доказательства основных утверждений

Докажем сначала теорему 2, считая, что леммы 2 и 3 уже доказаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Заметим, что так как предельные меры сосредоточены лишь в двух точках O_1 и O_2 , достаточно найти множество предельных точек (при $t \rightarrow \infty$) мер первой окрестности $m_t(U_1)$.

Обозначим через $I_U(x)$ индикатор множества U . Напомним, что

$$m_T = \frac{1}{T} \int_0^T g_*^t m dt.$$

Теперь переставим пределы интегрирования:

$$m_T(U_1) = \frac{1}{T} \int_0^T m(g^{-t}(U_1)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \int_\Omega I_{\{q|g^t(q) \in U_1\}}(x) dm(x) dt$$

$$= \int_{\Omega} \frac{1}{T} \int_0^T I_{\{q|g^t(q) \in U_1\}}(x) dt dm(x) = \int_{\Omega} S_x^1(T) dm.$$

Мы можем приблизить интеграл с точностью до $\varepsilon/2$ интегралом по компакту $K_{\delta} = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$. Заметим, что оценки в доказательстве леммы 3 (см. раздел 6) равномерны по x на компакте K_{δ} для любого δ . Из этого следует, что разность $S_x^1(T) - \Phi(T/f(x))$ равномерно по $x \in K_{\delta}$ стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$. С другой стороны, выбором достаточно малого δ меру $m(\Omega \setminus K_{\delta})$ можно сделать сколь угодно малой. Отсюда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T_0 \quad \forall T > T_0 \quad \left| \int_{\Omega} S_x^1(T) dm - \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{T}{f(x)}\right) dm \right| < \varepsilon.$$

Напомним, что через $\pi: \Omega \rightarrow S_{\text{Traj}}^1$ обозначено отображение, которое каждой точке x сопоставляет проходящую через нее траекторию y , что $\pi_* m = m'$, и что $\Phi(\theta) = \Phi(\Lambda\theta)$. Тогда

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{T}{f(x)}\right) dm = \int_{S_{\text{Traj}}^1} \Phi\left(\frac{T}{\tilde{f}(y)}\right) dm'.$$

Сделаем вторую замену переменных в последнем интеграле:

$$\int_{S_{\text{Traj}}^1} \Phi\left(\frac{T}{\tilde{f}(y)}\right) m'(dy) = \int_{\mathbb{R}^+/\Lambda^{\mathbb{Z}}} \Phi\left(\frac{T}{\theta}\right) \tilde{f}_* m'(d\theta) = \int_{\mathbb{R}^+/\Lambda^{\mathbb{Z}}} \Phi\left(\frac{T}{\theta}\right) \nu(d\theta) = \Phi * \nu(T).$$

Поскольку для каждого θ из $\mathbb{R}^+/\Lambda^{\mathbb{Z}}$ найдется сколь угодно большое T из $\mathbb{R}^+$, соответствующее ему при канонической проекции $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+/\Lambda^{\mathbb{Z}}$, $\Phi * \nu(\theta)$ будет предельной точкой $m_T(U_1)$ при $T \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Предел m_t при $t \rightarrow \infty$ существует тогда и только тогда, когда множество частичных пределов состоит из одной точки, т.е. $\inf_{G_{\Lambda}} \Phi * \nu = \sup_{G_{\Lambda}} \Phi * \nu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Для доказательства достаточно показать, что те меры, для которых предел не будет существовать, имеют бесконечную коразмерность на пространстве траекторий. Так как $\Phi(\theta)$ при замене $\theta = e^t$ не является тригонометрическим многочленом от t , то у нее счетное число коэффициентов Фурье отлично от нуля. Следовательно, существование предельной меры задается счетным числом условий (так как счетное число коэффициентов Фурье меры $\ln \nu$ должны быть равны нулю).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Разложим функцию $\Phi(\theta)$, где $\theta = e^t$, $t \in [0, \ln \Lambda]$, в ряд Фурье по t . Обозначим через c_n коэффициент Фурье при e^{int} , $n \in \mathbb{Z}$. Прямое вычисление показывает:

$$\begin{aligned} c_0 &= \ln \Lambda_0, \\ c_n &= (-1)^n \sqrt{\ln \Lambda} \left(\frac{1}{2\pi i n - \ln \Lambda} - \frac{1}{2\pi i n} \right) \left(\Lambda_0^{2\pi i n / \ln \Lambda} - 1 \right), \quad n \neq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

По теореме 2 в процедуре Крылова–Боголюбова есть предел, если и только если $\Phi * \nu = \text{const}$, т.е. $\Phi(e^x) * \ln(\nu) = \text{const}$. Коэффициенты Фурье свертки – это произведение коэффициентов Фурье соответствующей функции и меры. Заметим, что $c_n \neq 0$ при $\log_{\Lambda_0} \Lambda \notin \mathbb{Q}$. Поэтому в процедуре Крылова–Боголюбова есть предел тогда и только тогда, когда все коэффициенты Фурье, кроме нулевого, меры $\ln \nu$ на окружности $\mathbb{R}/(\ln \Lambda)\mathbb{Z}$ равны нулю. Это условие означает, что мера $\ln \nu$ – мера Лебега на $\mathbb{R}/(\ln \Lambda)\mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $\log_{\Lambda_0}(\Lambda) = p/q$, где $(p, q) = 1$. Тогда из (3) следует, что c_k – коэффициенты Фурье функции $\Phi(e^t)$ – равны нулю тогда и только тогда, когда k кратно q . Следовательно, в процедуре Крылова–Боголюбова есть предел, если и только если у меры $\ln \nu$ все коэффициенты Фурье с номерами, не кратными q , равны нулю, т.е. мера $\ln \nu$ инвариантна относительно поворота окружности на угол $2\pi/q$.

6. Доказательства вспомогательных утверждений

Для доказательства лемм 2 и 3 нам потребуются несколько технических предложений, формализующих следующее утверждение: “Раз все возрастает в геометрической прогрессии, то все соизмеримо с последним слагаемым”. Для их доказательства мы будем использовать лемму 1, доказательство которой приведем в конце раздела.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеем*

$$\frac{\sigma_k^2(x)}{\sigma_k^1(x)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Lambda_{21}, \quad \frac{\sigma_k^1(x)}{\sigma_{k-1}^2(x)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Lambda/\Lambda_{21}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое применение леммы 1 дает

$$\frac{\sigma_k^2(x)}{\sigma_k^1(x)} = \frac{(1/\lambda_2) \ln \xi_k^{-1} + O(1)}{(1/\mu_1) \ln \xi_k^{-1} + O(1)} \rightarrow \frac{\mu_1}{\lambda_2} = \Lambda_{21}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Аналогично,

$$\frac{\sigma_k^1(x)}{\sigma_{k-1}^2(x)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_2}{\lambda_1} = \frac{\Lambda}{\Lambda_{21}}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеем*

$$\frac{\sum_{1 \leq j \leq k} \sigma_j^2(x)}{\sum_{1 \leq j \leq k} \sigma_j^1(x)} \rightarrow \Lambda_{21}, \quad k \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое следствие предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Имеем*

$$\frac{\tau_k^2(x)}{\tau_k^1(x)} \rightarrow \Lambda_0, \quad k \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнено

$$\begin{aligned} \frac{\tau_k^2(x)}{\tau_k^1(x)} &= \frac{\sigma_k^1(x) + \sigma_{k-1}^2(x) + \sigma_{k-1}^1(x) + \cdots + \sigma_1^1(x) + \sigma_1^2(x) + O(1)}{\sigma_{k-1}^2(x) + \sigma_{k-1}^1(x) + \cdots + \sigma_1^2(x) + \sigma_1^1(x) + O(1)} \\ &= \frac{\sum_{j \leq k} \sigma_j^1(x) + \sum_{j \leq k-1} \sigma_j^2(x) + O(1)}{\sum_{j \leq k-1} \sigma_j^1(x) + \sum_{j \leq k-1} \sigma_j^2(x) + O(1)} \sim \frac{\Lambda A_k + \Lambda_{21} \cdot A_k}{A_k + \Lambda_{21} \cdot A_k} \\ &= \frac{\Lambda + \Lambda_{21}}{1 + \Lambda_{21}} = \Lambda_0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где через A_k обозначена величина $A_k = \sigma_{k-1}^1(x) + \sigma_{k-2}^1(x) + \cdots + \sigma_1^1(x)$. Эквивалентность здесь следует из предложения 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Имеем

$$S_x^1(\tau_k^1(x)) \rightarrow \frac{1}{1 + \Lambda_{21}}, \quad k \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнено

$$S_x^1(\tau_k^1(x)) = \frac{\sum_{j \leq k-1} \sigma_j^1(x) + O(1)}{\sum_{j \leq k-1} \sigma_j^1(x) + \sum_{j \leq k-1} \sigma_j^2(x) + O(1)} \sim \frac{A_k}{A_k + \Lambda_{21} A_k} = \frac{1}{1 + \Lambda_{21}},$$

где через A_k обозначена величина $A_k = \sigma_{k-1}^1(x) + \sigma_{k-2}^1(x) + \cdots + \sigma_1^1(x)$, остаточные члены $O(1)$ в знаменателе и числителе соответствуют общему времени $\tau_1^1(x)$ и его части, проведенной в первой окрестности.

ЛЕММА 4. Пусть последовательность x_n имеет вид $x_{n+1} = \Lambda x_n + y_n$, где $\Lambda > 1$, а y_n – ограниченная последовательность. Тогда существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n / \Lambda^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|y_n| < C$. Докажем, что x_n / Λ^n – последовательность Коши. Из условия имеем

$$\Lambda^k x_n - \frac{\Lambda^k - 1}{\Lambda - 1} C \leq x_{n+k} \leq \Lambda^k x_n + \frac{\Lambda^k - 1}{\Lambda - 1} C.$$

Поэтому

$$\left| \frac{x_{n+k}}{\Lambda^{n+k}} - \frac{x_n}{\Lambda^n} \right| \leq \frac{1}{\Lambda^n (\Lambda - 1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Докажем теперь леммы 2 и 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Применим лемму 4 к последовательности $\sigma_k^1(x)$: из леммы 1 следует, что $\sigma_{k+1}^1(x) = \Lambda \sigma_k^1(x) + O(1)$, значит, существует предел

$$\varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sigma_k^1(x)}{\Lambda^k}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\tau_k^1(x)}{\Lambda^k} = \frac{\sum_{1 \leq j \leq k-1} (\sigma_j^2(x) + \sigma_j^1(x)) + \tau_1^1(x)}{\sigma_k^1(x)} \cdot \frac{\sigma_k^1(x)}{\Lambda^k}.$$

Первый множитель стремится к $\Lambda_{21} / \Lambda + 1 / \Lambda + \Lambda_{21} / \Lambda^2 + 1 / \Lambda^2 + \cdots$, второй множитель стремится к $\varphi(x)$; следовательно, произведение сходится.

Непрерывность функции f получается как следствие равномерности перехода к пределу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Докажем теперь утверждение леммы. Заметим, что на отрезке $[\tau_k^1(x), \tau_k^2(x)]$ функция $S_x^1(t)$ может быть представлена в следующем виде:

$$S_x^1(\theta\tau_k^1(x)) = \frac{\tau_k^1(x)S_x^1(\tau_k^1(x)) + (\theta - 1)\tau_k^1(x)}{\theta\tau_k^1(x)} = 1 - \frac{1 - S_x^1(\tau_k^1(x))}{\theta}. \quad (4)$$

Учитывая, что $S_x^1(\tau_k^1(x)) \rightarrow 1/(1 + \Lambda_{21})$ и $\tau_k^2(x)/\tau_k^1(x) \rightarrow \Lambda_0$, имеем

$$\|S_x^1(\theta\tau_k^1(x)) - \Phi(\theta)\|_{C[1, \Lambda_0]} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad (5)$$

где $\theta \in [1, \tau_k^2(x)/\tau_k^1(x)]$.

На отрезке $[\tau_k^2(x), \tau_{k+1}^1(x)]$ функция $S_x^1(t)$ представляется как

$$S_x^1(\theta\tau_k^1(x)) = \frac{S_x^1(\tau_k^2(x))\tau_k^2(x)}{\theta\tau_k^1(x)}, \quad (6)$$

где $\theta \in [\tau_k^2(x)/\tau_k^1(x), \tau_{k+1}^1(x)/\tau_k^1(x)]$.

Мы уже знаем, что $\tau_k^2(x)/\tau_k^1(x) \rightarrow \Lambda_0$, $S_x^1(\tau_k^1(x)) \rightarrow 1/(1 + \Lambda_{21})$, $\tau_{k+1}^1(x)/\tau_k^2(x) \rightarrow \Lambda$, поэтому

$$S_x^1(\tau_k^2(x)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 - \frac{1 - 1/(1 + \Lambda_{21})}{\Lambda_0} = \frac{\Lambda}{(\Lambda_{21} + 1)\Lambda_0},$$

откуда следует, что

$$\|S_x^1(\theta\tau_k^1(x)) - \Phi(\theta)\|_{C[\Lambda_0, \Lambda]} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (7)$$

Объединяя (5) и (7), получим

$$\|S_x^1(\theta\tau_k^1(x)) - \Phi(\theta)\|_{C[1, \Lambda]} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

С другой стороны,

$$S_x^1(\theta f(x)\Lambda^k) = S_x^1\left(\theta \frac{f(x)\Lambda^k}{\tau_k^1(x)} \tau_k^1(x)\right),$$

а разница

$$\left\| \Phi\left(\theta \frac{f(x)\Lambda^k}{\tau_k^1(x)}\right) - \Phi(\theta) \right\|_{C[1, \Lambda]}$$

стремится к 0, поскольку

$$\frac{f(x)\Lambda^k}{\tau_k^1(x)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1.$$

Из неравенства треугольника получаем

$$\|S_x^1(\theta f(x)\Lambda^k) - \Phi(\theta)\|_{C[1, \Lambda]} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Легко видеть, что справедливость утверждения леммы не зависит от выбора трансверсалий и не меняется при гладкой замене координат: в результате таких изменений к x - и y -координатам применяется гладкое отображение, соответственно, а время последования меняется на ограниченную величину. Кроме того, достаточно доказать только представление (2), поскольку вид (1) из него следует.

По теореме Адамара–Перрона для гиперболической особой точки инвариантные многообразия (в нашем случае сепаратрисы) будут иметь ту же гладкость, что и векторное поле (т.е. C^3 –гладкость). Выберем систему координат, в которой осями координат будут сепаратрисы. В этой системе

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

причем $f(0, y) \equiv 0$, $g(x, 0) \equiv 0$, поскольку сепаратрисы инвариантны. По лемме Адамара функции f и g можно представить в виде

$$f(x, y) = x \cdot f_1(x, y), \quad g(x, y) = y \cdot g_1(x, y),$$

где $f_1, g_1 \in C^2$. Из условий на собственные значения $f_1(0, 0) = \lambda$, $g_1(0, 0) = -\mu$.

Заметим, что систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x f_1(x, y), \\ \dot{y} = y g_1(x, y) \end{cases}$$

можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\ln x) = f_1(x, y) = \lambda + O(|x| + |y|), \\ \frac{d}{dt}(\ln y) = g_1(x, y) = -\mu + O(|x| + |y|). \end{cases} \quad (8)$$

Из (8) следует, что в достаточно малой окрестности седла $f_1(x, y) \geq \lambda/2$, $g_1(x, y) \leq -\mu/2$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы в области между трансверсальями $x = \varepsilon$ и $y = \varepsilon$ эти неравенства были бы выполнены.

Рассмотрим участок траектории $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, начинающийся в точке $\gamma(0) = (x_0, \varepsilon)$ на входной трансверсали $y = \varepsilon$ и заканчивающийся в точке $\gamma(T) = (\varepsilon, y_0)$. Для доказательства леммы достаточно показать, что разность $\ln(1/x_0) - \lambda T$ остается ограниченной при $x_0 \rightarrow 0$ (оценка для $\ln(1/y_0) - \mu T$ получается аналогично).

Будем оценивать $|\ln(\varepsilon/x_0) - \lambda T|$ (эта величина отличается от требуемой не более, чем на $\ln \varepsilon$). Пусть C – константа для O в правой части (8): при $0 < x < \varepsilon$, $0 < y < \varepsilon$ имеем $|f_1(x, y) - \lambda| < C(x + y)$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \ln \frac{\varepsilon}{x_0} - \lambda T \right| &= \left| \int_0^T \frac{d}{dt} [\ln x(t) - \lambda t] dt \right| \leq \int_0^T \left| \frac{d}{dt} \ln x(t) - \lambda \right| dt \\ &= \int_0^T |f_1(x(t), y(t)) - \lambda| dt \leq C \left(\int_0^T x(t) dt + \int_0^T y(t) dt \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Для доказательства леммы достаточно оценить интегралы от $x(t)$ и $y(t)$. Заметим, что выполненные в указанной области неравенства $f_1(x, y) \geq \lambda/2$, $g_1(x, y) \leq -\mu/2$ влекут за собой оценки

$$x(T - t) \leq e^{-(\lambda/2)t} \varepsilon, \quad y(t) \leq e^{-(\mu/2)t} \varepsilon.$$

Соответственно,

$$\begin{aligned}\int_0^T x(t) dt &= \int_0^T x(T-t) dt \leq \int_0^T \varepsilon e^{-(\lambda/2)t} dt \leq \varepsilon \int_0^\infty e^{-(\lambda/2)t} dt = \frac{2\varepsilon}{\lambda}, \\ \int_0^T y(t) dt &\leq \int_0^T \varepsilon e^{-(\mu/2)t} dt \leq \varepsilon \int_0^\infty e^{-(\mu/2)t} dt = \frac{2\varepsilon}{\mu}.\end{aligned}$$

Интегралы в правой части (9) оценены, что дает нам равномерную оценку на $|\ln(\varepsilon/x_0) - \lambda T|$ и тем самым доказывает лемму.

Авторы выражают благодарность Ю. С. Ильяшенко и А. С. Городецкому за постановку задачи и многократные полезные обсуждения. Второй автор благодарен следующим учреждениям за гостеприимство: École Normale Supérieure de Lyon и Université de Genève.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Gaunderdorfer, “Time averages for heteroclinic attractors”, *SIAM J. Appl. Math.*, **52**:5 (1992), 1476–1489.
- [2] F. Takens, “Heteroclinic Attractors: time averages and moduli of topological conjugacy”, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, **25**:1 (1994), 107–120.
- [3] T. Young, “Asymptotic measures and distributions of Birkhoff averages with respect to Lebesgue measure”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **9**:2 (2003), 359–378.
- [4] Я. Г. Синай, “Гиббсовские меры в эргодической теории”, *УМН*, **27**:4 (1972), 21–64.
- [5] D. Ruelle, “A measure associated with axiom-A attractors”, *Amer. J. Math.*, **98**:3 (1976), 619–654.
- [6] R. Bowen, *Equilibrium states and ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math., **470**, Springer, Berlin–New York, 1975.
- [7] M. Blank, L. Bunimovich, “Multicomponent dynamical systems: SRB measures and phase transitions”, *Nonlinearity*, **16**:1 (2003), 387–401.
- [8] M. Misiurewicz, *Ergodic natural measures*, preprint, 2004.
- [9] E. Järvenpää, T. Tolonen, “Relations between natural and observable measures”, *Nonlinearity*, **18**:2 (2005), 897–912.
- [10] L.-S. Young, “What are SRB measures, and which dynamical systems have them?”, *J. Stat. Phys.*, **108**:5–6 (2002), 733–754.
- [11] M. Misiurewicz, A. Zdunik, “Convergence of images of certain measures”, *Statistical physics and dynamical systems* (Köszeg, 1984), Progr. Phys., **10**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1985, 203–219.
- [12] V. Kleptsyn, “An example of non-coincidence of minimal and statistical attractors”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **26**:3 (2006), 759–768.
- [13] Ю. С. Ильяшенко, “Мемуар Дюлака “О предельных циклах” и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений”, *УМН*, **40**:6 (1985), 41–78.

Т. Голенищева-Кутузова

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: tania@mccme.ru

Поступило

15.05.2006

В. Клепцын

Institut de Recherche Mathématique de Rennes
E-mail: kleptsyn@mccme.ru