Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, О законе дисперсии вида $\varepsilon(p) = \hbar^2 p^2 / 2m + \tilde{V}(p) - \tilde{V}(0)$ элементарных возбуждений неидеально-го ферми-газа в приближении парного взаимодействия ($i \leftrightarrow j$), $V(|x_i - x_j|)$, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 5, 690–708

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4083>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:11:20

О законе дисперсии вида $\varepsilon(p) = \hbar^2 p^2 / 2m + \tilde{V}(p) - \tilde{V}(0)$ элементарных возбуждений неидеального ферми-газа в приближении парного взаимодействия ($i \leftrightarrow j$), $V(|x_i - x_j|)$

В. П. Маслов

В работе дан вывод закона дисперсии $\varepsilon(p) = \hbar^2 p^2 / 2m + \tilde{V}(p) - \tilde{V}(0)$, где $\tilde{V}(p)$ – преобразование Фурье потенциала парного взаимодействия $V(r)$ (взаимодействие между частицами x_i и x_j есть $V(|x_i - x_j|)$).

Библиография: 10 названий.

1. Введение

В знаменитой работе Боголюбова [1] был получен спектр (энергетические уровни) неидеального бозе-эйнштейновского газа.

Формула для спектра имеет следующий вид:

$$\lambda_p = -\hbar^2 v p + \varepsilon(p), \quad \varepsilon(p) = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 p^2}{2m} + \tilde{V}(p)\right)^2 - \tilde{V}^2(p)}. \quad (1)$$

где v – скорость жидкости (газа), $\tilde{V}(p)$ – преобразование Фурье парного потенциала взаимодействия $V(|x_i - x_j|)$ между частицами i и j .

Член $\varepsilon(p)$ при малых p ведет себя как $|p| \sqrt{\tilde{V}(0)}$, что отвечает звуку – фононам, если $\tilde{V}(0) > 0$. Это последнее условие вида $\int_0^\infty V(r) dr$ означает, что отталкивание, которое имеет место при малых r , превышает притяжение, которое возникает в гелии при больших r . При $p \rightarrow \infty$ $\tilde{V}(p)$ стремится к нулю, и главный член имеет порядок $p^2/2$. Точка минимума p_0 подкоренного выражения, где производная по p обращается в нуль, называется ротонной частью спектра $\varepsilon(p)$.

В том же номере журнала, в котором вышла статья Боголюбова, Ландау привел основанные на эксперименте общие соображения о том, что зависимость $\varepsilon(p)$ имеет общий вид именно такого типа, т.е. вблизи $p = 0$ – линейна, имеется одна точка максимума, далее точка минимума и далее кривая стремится к бесконечности.

Эта кривая называется кривой Ландау (Нобелевская премия 1962 г.).

Сверхтекучесть гелия-4, который является бозе-газом, была обнаружена Капицей в 1930 г. (Нобелевская премия 1978 г.).

Однако если в бозонном случае основой сверхтекучего состояния является отталкивание на малых расстояниях, то известно, что основой сверхтекучего состояния должно быть притяжение на больших расстояниях (для возможности образования так называемых куперовских пар – Нобелевская премия 1972 г.).

Сверхтекучесть ферми-жидкости (гелия-3) на эксперименте была обнаружена в начале 1970-х гг. американскими учеными Дэвидом Ли, Дугласом Ошерофом и Робертом Ричардсоном (Нобелевская премия 1996 г.).

В следующем году после опубликования своего результата Ландау написал: “Боголюбову недавно удалось с помощью остроумного применения вторичного квантования определить в общем виде энергетический спектр бозе-эйнштейновского газа со слабым взаимодействием между частицами” [2; с. 43].

Именно Боголюбов использовал идею Дирака, которая заключалась в следующем: поскольку число частиц велико, то коммутатор между операторами рождения и уничтожения в бозе-статистике можно считать малым. Вместе с тем это же получалось и при применении так называемого асимптотического (u, v) преобразования Боголюбова.

Для ферми-статистики рассматривается антикоммутатор между операторами рождения и уничтожения, и значит, это соображение не дает возможности перейти к “с-числам”. Только для пар фермионов это возможно.

Разработанная автором теория ультравторичного квантования позволила получить для ферми-газа еще более простую формулу (этому и посвящена настоящая работа), которая основана на далеком притяжении. Именно

$$\lambda_p = -\hbar^2 p v + \left| \frac{\hbar^2 p^2}{2m} + \tilde{V}(p) - \tilde{V}(0) \right|. \quad (2)$$

Мы покажем, что и в этом случае кривая Ландау имеет место и что основную роль играет притяжение потенциала взаимодействия на больших расстояниях. Для этого мы предварительно исследуем поведение $\tilde{V}(p)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вторично квантованное уравнение Шрёдингера *тождественно* совпадает с N -частичным уравнением Шрёдингера с точностью до унитарного преобразования. Имеется в виду, что вторично квантованное уравнение есть некоторое удобное представление N -мерной системы уравнений Шрёдингера. Оно является “тождественным” с точностью до унитарного преобразования как p -представление, представление взаимодействия и другие. В нем нет приближений – в этом смысле это тождественное преобразование. Точно так же ультравторично квантованное уравнение, введенное автором, с точностью до тождественного унитарного преобразования совпадает с N -частичным уравнением Шрёдингера для симметрических и антисимметрических решений.

Между тем асимптотическое (u, v) преобразование Боголюбова, верное для бозонов, совпадает для фермионов с методом ультравторичного квантования автора лишь в случае потенциала взаимодействия Бардина. Это преобразование не точно, а приближенно, и оно дает неверную асимптотику для парного взаимодействия. Возможно, что лишь когда для метода ультравторичного квантования будет проведен эксперимент с ловушками для ферми-газа, аналогичный замечательной работе [3], физики-теоретики поверят в него.

2. Теорема об “общем положении”

В математике понятие “общего положения” точек поверхности, например, относительно проектирования на координатную плоскость, хорошо известно и, в частности, существенно использовалось в работах Арнольда–Варченко–Гусейна-Заде. В физике этот частный случай общего положения означает, в частности, что фокус, который получается с помощью линзы, преломляющей лучи света так, что они все сходятся в одной точке, не является ситуацией общего положения. Это означает, что малое шевеление линзы размывают эту точку фокуса в некоторое пятнышко, состоящее из сетки пересекающихся каустик.

В плоскости перпендикуляр, опущенный на ось абсцисс, не есть прямая в общем положении: малый поворот осей координат приводит к тому, что эта прямая не будет проектироваться на ось абсцисс в одну точку. Если имеется точка гладкой кривой, в которой первые две производные равны нулю, то кривая не будет находиться в общем положении относительно малого поворота осей. Можно повернуть оси координат так, что в большинстве случаев гладкая кривая не будет иметь таких точек. Тогда речь идет о кривой “в общем положении”.

А если говорить о точке, в которой производная равна нулю, то малый поворот это свойство точки уничтожает. Тогда говорят о точке гладкой кривой “в общем положении”. Производная в точке общего положения на гладкой кривой не равна нулю. В частности, на полупрямой производная гладкой кривой в начальной точке в общем положении не равна нулю. В противном случае малый поворот координатных осей уничтожает это свойство. Таким образом, малый поворот не меняет свойства производной быть отличной от нуля в начальной точке. Имеет место следующая элементарная теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть исходный парный потенциал взаимодействия $U(x-y)$, $x, y \in \mathbb{R}^3$, радиально симметричный, равный $V(r)$, где $r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}$, а $\lim_{r \rightarrow 0} V(r)r \neq 0$ таков, что его трехмерное преобразование Фурье $\tilde{V}(|p|)$, $|p| \geq 0$, в начальной точке $|p| = 0$ находится в общем положении. Тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \tilde{V}(p) \neq 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^4 V(r) \neq 0. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку потенциал $V(\xi)$ сферически симметричен, то отсюда следует, что и его трехмерный Фурье-образ $\tilde{V}(\xi)$ будет также сферически симметричным.

Переход к сферическим координатам приводит к соотношению:

$$V(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \tilde{V}(\xi) \sin(\xi r) \xi d\xi. \quad (4)$$

Из того, что $\tilde{V}(|\xi|)$ убывает на бесконечности, как $\text{const}/|\xi|^2$, следует, что при $r \rightarrow 0$

$$V(r) = \frac{\text{const}}{r} + O(1)$$

и обратно.

Условие общего положения подразумевает, что

$$\tilde{V}'(0) \neq 0.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\tilde{V}'(0) = -\frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} r^4 V(r). \quad (5)$$

Действительно, разбивая интеграл (4) на конечный интеграл от $-A$ до A , где A достаточно большое, сделав замену $\xi r = \eta$, интегрируя по частям и переходя к пределу при $r \rightarrow \infty$, $A \rightarrow \infty$, получим утверждение теоремы.

На самом деле потенциал взаимодействия в силу сложного строения молекулы не является точно сферически симметричным. В принципе мы должны учитывать влияние всех частиц, из которых состоит молекула. Но если уж мы рассматриваем молекулу как целое и приближение потенциала взаимодействия как сферически симметричную функцию, то по меньшей мере мы должны полагать, что такой потенциал находится “в общем положении”.

СЛЕДСТВИЕ. При $|p| \rightarrow 0$

$$\tilde{V}(p) - \tilde{V}(0) \sim -8\pi|p| \lim_{r \rightarrow \infty} r^4 V(r). \quad (6)$$

а так как $V(r)$ при $r \rightarrow \infty$ прилигающий, то

$$-8\pi \lim_{r \rightarrow \infty} r^4 V(r) = c > 0. \quad (7)$$

При $p \rightarrow \infty$ выражение под знаком модуля стремится к бесконечности как $\hbar^2 p^2/2m$, так как $\tilde{V}(p) \rightarrow 0$ как $1/|p|^2$.

Таким образом, мы видим что формула (2) дает кривую Ландау для ферми-жидкости.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим потенциал Леннарда-Джонса и прибавим к нему некоторый малый гладкий радиально симметричный потенциал. Вероятность того, что после этого останется убывание вида $1/r^6$, равна нулю относительно всего множества потенциалов. С вероятностью единица убывание станет $1/r^4$. Физический закон, который запретил бы это, неизвестен и маловероятен.

3. Ультравторичное квантование

В работах [4]–[7] было введено ультравторичное квантование для задач квантовой механики и статистической физики. Напомним обозначения и основные факты в случае квантования по парам частица-номер частицы и по парам из двух частиц. Квантование с учетом пар позволит далее учесть парные корреляции частиц при построении асимптотики. Пространством ультравторичного квантования является $\mathcal{F}$ – бозонное пространство Фока [8], $\hat{b}^+(x, s)$ – оператор рождения частиц с номером s , $\hat{b}^-(x, s)$ – оператор уничтожения частиц с номером s в пространстве $\mathcal{F}$ [8], $\hat{B}^+(x, x')$ – оператор рождения пары частиц, $\hat{B}^-(x, x')$ – оператор уничтожения пары частиц в этом пространстве. Эти операторы удовлетворяют коммутационным

соотношениям для фермионов b^- и b^+

$$\begin{aligned} [\hat{b}^-(x, s), \hat{b}^+(x', s')] &= \delta_{ss'} \delta(x - x'), & [\hat{b}^\pm(x, s), \hat{b}^\pm(x', s')] &= 0, \\ [\hat{B}^-(x_1, x_2) \hat{B}^+(x'_1, x'_2)] &= \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2), & [\hat{B}^\pm(x_1, x_2), \hat{B}^\pm(x'_1, x'_2)] &= 0, \\ [\hat{b}^\pm(x, s), \hat{B}^\pm(x'_1, x'_2)] &= [\hat{b}^\pm(x, s), \hat{B}^\mp(x'_1, x'_2)] = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для бозонов b^- и b^+ удовлетворяют аналогичным коммутационным соотношениям.

Далее, Φ_0 – вакуумный вектор в пространстве $\mathcal{F}$, обладающий следующими свойствами:

$$\hat{b}^-(x, s) \Phi_0 = 0, \quad \hat{B}^-(x_1, x_2) \Phi_0 = 0. \quad (9)$$

Переменная x лежит на трехмерном торе $L_1 \times L_2 \times L_3$, который будем обозначать **T**. Переменная s – дискретная, $s = 0, 1, \dots$; s называется *номером*, или *статистическим спином*. Любой вектор Φ пространства $\mathcal{F}$ единственным образом представляется в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{k! M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2M} \\ &\quad \times \Phi_{k,M}(x_1, s_1; \dots; x_k, s_k; y_1, y_2; \dots; y_{2M-1}, y_{2M}) \\ &\quad \times \hat{b}^+(x_1, s_1) \cdots \hat{b}^+(x_k, s_k) \hat{B}^+(y_1, y_2) \cdots \hat{B}^+(y_{2M-1}, y_{2M}) \Phi_0, \end{aligned} \quad (10)$$

где функция $\Phi_{k,M}(x_1, s_1; \dots; x_k, s_k; y_1, y_2; \dots; y_{2M-1}, y_{2M})$ симметрична относительно перестановок пар переменных (x_j, s_j) и (x_i, s_i) и симметрична относительно перестановок пар переменных (y_{2j-1}, y_{2j}) и (y_{2i-1}, y_{2i}) . В бозонном случае вводится подпространство $\mathcal{F}_{k,M}^{\text{Symm}}$, состоящее из векторов Φ , у которых $\Phi_{k',M'} = 0$ при $(k', M') \neq (k, M)$, а $\Phi_{k,M}$ является симметричной функцией переменных $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_{2M}$. В фермионном случае аналогично вводится подпространство $\mathcal{F}_{k,M}^{\text{Asymm}}$, состоящее из векторов Φ таких, что $\Phi_{k',M'} = 0$ при $(k', M') \neq (k, M)$ и $\Phi_{k,M}$ – антисимметричная функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_{2M}$. Ортогональный проектор пространства $\mathcal{F}$ на подпространство $\mathcal{F}_{k,M}^{\text{Symm}}$ имеет вид [4]–[7]

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{k,M}^{\text{Symm}} &= \frac{1}{k! M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2M} \\ &\quad \times \hat{b}^+(x_1, s_1) \cdots \hat{b}^+(x_k, s_k) \hat{B}^+(y_1, y_2) \cdots \hat{B}^+(y_{2M-1}, y_{2M}) \\ &\quad \times \text{Symm}_{x_1 \dots x_k y_1 \dots y_{2M}} (\hat{b}^-(x_1, s_1) \cdots \hat{b}^-(x_k, s_k) \\ &\quad \times \hat{B}^-(y_1, y_2) \cdots \hat{B}^-(y_{2M-1}, y_{2M})) \\ &\quad \times \exp \left(- \sum_{s=0}^{\infty} \int dx \hat{b}^+(x, s) \hat{b}^-(x, s) - \iint dy dy' \hat{B}^+(y, y') \hat{B}^-(y, y') \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\text{Symm}_{x_1 \dots x_k y_1 \dots y_{2M}}$ – оператор симметризации по переменным $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{2M}$, а операторы $\hat{b}^+(x, s)$, $\hat{b}^-(x, s)$, $\hat{B}^+(y, y')$, $\hat{B}^-(y, y')$ упорядочены Виковским способом [8]. Ортогональный проектор пространства $\mathcal{F}$ на подпространство $\mathcal{F}_{k,M}^{\text{Asymm}}$

имеет вид [4]

$$\begin{aligned}\widehat{\Pi}_{k,M}^{\text{Asymm}} = & \frac{1}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2M} \\ & \times \widehat{b}^+(x_1, s_1) \cdots \widehat{b}^+(x_k, s_k) \widehat{B}^+(y_1, y_2) \cdots \widehat{B}^+(y_{2M-1}, y_{2M}) \\ & \times \text{Asymm}_{x_1 \dots x_k y_1 \dots y_{2M}} (\widehat{b}^-(x_1, s_1) \cdots \widehat{b}^-(x_k, s_k) \\ & \times \widehat{B}^-(y_1, y_2) \cdots \widehat{B}^-(y_{2M-1}, y_{2M})) \\ & \times \exp \left(- \sum_{s=0}^{\infty} \int dx \widehat{b}^+(x, s) \widehat{b}^-(x, s) - \iint dy dy' \widehat{B}^+(y, y') \widehat{B}^-(y, y') \right),\end{aligned}$$

где $\text{Asymm}_{x_1 \dots x_k y_1 \dots y_{2M}}$ – оператор антисимметризации по переменным $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{2M}$. Здесь и везде далее, если не оговорено особо, операторы $\widehat{b}^+(x, s), \widehat{b}^-(x, s), \widehat{B}^+(y, y'), \widehat{B}^-(y, y')$ упорядочены Виковским способом.

Далее рассматривается система N тождественных частиц на торе $\mathbf{T}$. Будем считать, что гамильтониан N бозонов или фермионов имеет вид

$$\widehat{H}_N = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^N \Delta_j + \sum_{j=1}^N \sum_{l=j+1}^N V(x_j - x_l). \quad (12)$$

Согласно [4] этому оператору в бозонном случае отвечает ультратворично квантованный гамильтониан следующего вида:

$$\begin{aligned}\widehat{H}_B = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2M} \\ & \times \widehat{b}^+(x_1, s_1) \cdots \widehat{b}^+(x_k, s_k) \widehat{B}^+(y_1, y_2) \cdots \widehat{B}^+(y_{2M-1}, y_{2M}) \widehat{H}_{k+2M} \\ & \times \text{Symm}_{x_1 \dots x_k y_1 \dots y_{2M}} (\widehat{b}^-(x_1, s_1) \cdots \widehat{b}^-(x_k, s_k) \\ & \times \widehat{B}^-(y_1, y_2) \cdots \widehat{B}^-(y_{2M-1}, y_{2M})) \\ & \times \exp \left(- \sum_{s=0}^{\infty} \int dx \widehat{b}^+(x, s) \widehat{b}^-(x, s) - \iint dy dy' \widehat{B}^+(y, y') \widehat{B}^-(y, y') \right),\end{aligned} \quad (13)$$

а в фермионном случае соответствующий оператор $\widehat{H}_F$ выражается аналогичной формулой, в которой Symm заменяется на Asymm . По аналогии с (12) и (13), ультратворично квантованный оператор $\widehat{A}$ сопоставляется [4] любому N -частичному оператору

$$\widehat{A}_N \left(x_1^2, \dots, x_N^2; -i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_N} \right).$$

Например, единичному оператору сопоставляется в бозонном случае ультратворично квантованный единичный оператор вида

$$\widehat{E}_B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2M}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \widehat{b}^+(x_1, s_1) \cdots \widehat{b}^+(x_k, s_k) \widehat{B}^+(y_1, y_2) \cdots \widehat{B}^+(y_{2M-1}, y_{2M}) \\
 & \times \text{Symm}_{x_1 \dots x_k y_1 \dots y_{2M}} (\widehat{b}^-(x_1, s_1) \cdots \widehat{b}^-(x_k, s_k) \\
 & \quad \times \widehat{B}^-(y_1, y_2) \cdots \widehat{B}^-(y_{2M-1}, y_{2M})) \\
 & \times \exp \left(- \sum_{s=0}^{\infty} \int dx \widehat{b}^+(x, s) \widehat{b}^-(x, s) - \iint dy dy' \widehat{B}^+(y, y') \widehat{B}^-(y, y') \right),
 \end{aligned} \tag{14}$$

который есть сумма проекторов (11). Аналогично, ультравторично квантованный единичный оператор в фермионном случае есть

$$\widehat{\widehat{E}}_F = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \widehat{\Pi}_{k,M}^{\text{Asymm}},$$

а в формуле (14) Symm заменяется на Asymm.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения

$$\widehat{\widehat{H}}_{B,F} \Phi = \lambda \widehat{\widehat{E}}_B \Phi, \quad \widehat{\widehat{E}} \Phi \neq 0, \tag{15}$$

в бозе и ферми случаях. Справедливо утверждение, доказанное в [4]: на подпространствах $\mathcal{F}_{k,M}^{\text{Symm}}$ и $\mathcal{F}_{k,M}^{\text{Asymm}}$ пространства $\mathcal{F}$ операторы $\widehat{\widehat{H}}_B$ и $\widehat{\widehat{H}}_F$ соответственно совпадают с оператором $\widehat{H}_N$, если подействовать на них проектором на N -частичное пространство (оператором N частиц (21)). Поэтому собственные значения λ задачи (15) в бозонном и фермионном случаях совпадают с соответствующими собственными значениями операторов $\widehat{H}_N$ (12). В случае, когда коммутаторы между операторами $\widehat{b}^-(x, s)$ и $\widehat{b}^+(x, s)$, а также $\widehat{B}^-(x, y)$ и $\widehat{B}^+(x, y)$ малы как $1/N$, асимптотика решений задачи (15) согласно [4] определяется символом, отвечающим задаче (15). В бозонном случае псевдосимвол определяется в виде

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{H}_B[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)] \\
 & = \left\{ \sum_{k,M=0}^{\infty} \frac{1}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2M} \right. \\
 & \quad \times b^*(x_1, s_1) \cdots b^*(x_k, s_k) B^*(y_1, y_2) \cdots B^*(y_{2M-1}, y_{2M}) H_{k+2M} \\
 & \quad \times \text{Symm}_{x_1 \dots x_k y_1 \dots y_{2M}} (b(x_1, s_1) \cdots b(x_k, s_k) \\
 & \quad \times B(y_1, y_2) \cdots B(y_{2M-1}, y_{2M})) \left. \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{k',M'=0}^{\infty} \frac{1}{k'!M'!} \sum_{s'_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s'_{k'}=0}^{\infty} \int \cdots \int dx'_1 \dots dx'_{k'} dy'_1 \dots dy'_{2M'} \right. \\
 & \quad \times b^*(x'_1, s'_1) \cdots b^*(x'_{k'}, s'_{k'}) B^*(y'_1, y'_2) \cdots B^*(y'_{2M'-1}, y'_{2M'}) \\
 & \quad \times \text{Symm}_{x'_1 \dots x'_{k'} y'_1 \dots y'_{2M'}} (b(x'_1, s'_1) \cdots b(x'_{k'}, s'_{k'})) \\
 & \quad \times B(y'_1, y'_2) \cdots B(y'_{2M'-1}, y'_{2M'}) \left. \right\}^{-1}. \tag{16}
 \end{aligned}$$

В фермиевском случае символ выражается аналогично, только Symm в формуле (16) заменяется на Asymm . Следующее тождество для псевдосимвола (16) имеет место в Бозе случае:

$$\mathcal{H}_B[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)] = \frac{\text{Sp}(\hat{\rho}_B \hat{H})}{\text{Sp}(\hat{\rho}_B)}, \quad (17)$$

где $\hat{H}$, $\hat{\rho}_B$ – вторично квантованные операторы:

$$\hat{H} = \int dx \hat{\psi}^+(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{\psi}^-(x) + \frac{1}{2} \iint dx dy V(x, y) \hat{\psi}^+(y) \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^-(y) \hat{\psi}^-(x). \quad (18)$$

Здесь $\hat{\rho}_B$ зависит от функций $b(x, s)$, $B(y, y')$:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_B = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{k! M! (k+2M)!} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \iint dx dx' b(x, s) b^*(x', s) \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^-(x') \right)^k \\ & \times \left(\iint dy_1 dy_2 B(y_1, y_2) \hat{\psi}^+(y_1) \hat{\psi}^+(y_2) \right)^M \\ & \times \left(\iint dy'_1 dy'_2 B(y'_1, y'_2) \hat{\psi}^-(y'_1) \hat{\psi}^-(y'_2) \right)^M \exp \left(- \int dz \hat{\psi}^+(z) \hat{\psi}^-(z) \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\hat{\psi}^+(x)$, $\hat{\psi}^-(x)$ – бозевские операторы рождения и уничтожения, упорядоченные по Вику [7]. В ферми-случае имеет место аналогичное тождество

$$\mathcal{H}_F[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)] = \frac{\text{Sp}(\hat{\rho}_F \hat{H})}{\text{Sp}(\hat{\rho}_F)},$$

где $\hat{H}$, $\hat{\rho}_F$ – следующие вторично квантованные операторы:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int dx \hat{\psi}^+(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{\psi}^-(x) + \frac{1}{2} \iint dx dy V(x, y) \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^+(y) \hat{\psi}^-(y) \hat{\psi}^-(x) \\ \hat{\rho}_F = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{k! M! (k+2M)!} \left(\iint dy_1 dy_2 B(y_1, y_2) \hat{\psi}^+(y_1) \hat{\psi}^+(y_2) \right)^M \\ & \times \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 dx'_1 \dots dx_k dx'_k \\ & \times b(x_1, s_1) b^*(x'_1, s_1) \cdots b(x_k, s_k) b^*(x'_k, s_k) \\ & \times \hat{\psi}^+(x_1) \cdots \hat{\psi}^+(x_k) \hat{P}_0 \hat{\psi}^-(x'_k) \cdots \hat{\psi}^-(x'_1) \\ & \times \left(\iint dy'_1 dy'_2 B(y'_1, y'_2) \hat{\psi}^-(y'_2) \hat{\psi}^-(y'_1) \right)^M, \end{aligned} \quad (20)$$

где в данном случае $\hat{\psi}^+(x)$, $\hat{\psi}^-(x)$ – фермиевские операторы рождения и уничтожения, $\hat{P}_0$ – проектор на вакуумный вектор фермионного фокковского пространства. Вообще, для произвольного вторичного квантованного оператора $\tilde{L}$ псевдосимвол

отвечающего ему ультравторично квантованного оператора $\widehat{L}$ выражается [4] следующей формулой:

$$L_{B,F}[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)] = \frac{\text{Sp}(\widehat{\rho}_{B,F}\widehat{A})}{\text{Sp}(\widehat{\rho}_{B,F})}.$$

В пространстве $\mathcal{F}$ вводятся [4] ультравторично квантованные операторы числа частиц

$$\widehat{N}_B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} (k+2M) \widehat{\Pi}_{k,M}^{\text{Symm}}, \quad \widehat{N}_F = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} (k+2M) \widehat{\Pi}_{k,M}^{\text{Asymm}}. \quad (21)$$

Соответственно в бозонном случае псевдосимвол оператора $\widehat{N}_B$ имеет вид

$$\begin{aligned} N_B = & \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{k+2M}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_{k+2M} \right. \\ & \times b^*(x_1, s_1) \cdots b^*(x_k, s_k) B^*(x_{k+1}, x_{k+2}) \cdots B^*(x_{k+2M-1}, x_{k+2M}) \\ & \times \text{Symm}_{x_1 \dots x_{k+2M}} (b(x_1, s_1) \cdots b(x_k, s_k) \\ & \quad \times B(x_{k+1}, x_{k+2}) \cdots B(x_{k+2M-1}, x_{k+2M})) \Big\} \\ & \times \left\{ \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{M'=0}^{\infty} \frac{1}{k'!M'!} \sum_{s'_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s'_{k'}=0}^{\infty} \int \cdots \int dz_1 \dots dz_{k'+2M'} \right. \\ & \times b^*(z_1, s'_1) \cdots b^*(z_{k'}, s'_{k'}) B^*(z_{k'+1}, z_{k'+2}) \cdots B^*(z_{k'+2M'-1}, z_{k'+2M'}) \\ & \times \text{Symm}_{z_1 \dots z_{k'+2M'}} (b(z_1, s'_1) \cdots b(z_{k'}, s'_{k'}) \\ & \quad \times B^*(z_{k'+1}, z_{k'+2}) \cdots B(z_{k'+2M'-1}, z_{k'+2M'})) \Big\}^{-1}. \quad (22) \end{aligned}$$

В соответствующей формуле в фермионном случае Symm заменяется на Asymm .

4. Символ ультравторично квантованного оператора

Заметим прежде всего, что определение псевдосимвола, данное выше, не совсем отражает термодинамическую асимптотику, хотя это определение и согласуется с правилом Боголюбова–Дирака о том, операторы рождения и уничтожения в главном асимптотическом члене надо положить s -числами. Однако определенный таким образом символ мы называем псевдосимволом. Пусть оператор $\widehat{H}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{H} = & \sum_{l=1}^L \int \cdots \int dx_1 \dots dx_l \widehat{\psi}^+(x_1) \cdots \widehat{\psi}^+(x_l) \\ & \times H_l \left(x_1, \dots, x_l; -i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \widehat{\psi}^-(x_1) \cdots \widehat{\psi}^-(x_l). \quad (23) \end{aligned}$$

Тогда в случае ультравторичного квантования без операторов рождения и уничтожения пар частиц $\widehat{B}^{\pm}(x, y)$ для операторов $\widehat{H}$ и $\widehat{E}$, определенных выше, имеет место тождество

$$\widehat{\widehat{H}} = \widehat{\widehat{E}} \widehat{A}, \quad (24)$$

где $\bar{A}$ – некоторый оператор в пространстве $\mathcal{F}$, который имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{A} = & \sum_{l=1}^L \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_l=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_l \hat{b}^+(x_1, s_1) \cdots \hat{\psi}^+(x_l, s_l) \\ & \times H_l \left(x_1, \dots, x_l; -i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \hat{b}^-(x_l, s_l) \cdots \hat{b}^-(x_1). \end{aligned} \quad (25)$$

В случае, если ультравторичное квантование учитывает также операторы рождения и уничтожения пар частиц, тождество (24) справедливо, но оператор $\bar{A}$ имеет более сложный вид, чем (25). Однако для пар оператор $\bar{A}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{A} = & \sum_{s=0}^{\infty} \int dx \hat{b}^+(x, s) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{b}^-(x, s) \\ & + \iint dx dy \hat{B}^+(x, y) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y) \right) \hat{B}^-(x, y) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \iint dx dy V(x, y) \hat{b}^+(x, s_1) \hat{b}^+(y, s_2) \hat{b}^-(y, s_2) \hat{b}^-(x, s_1) \\ & + \sum_{s=0}^{\infty} \iiint dx dy dz (V(x, y) + V(x, z)) \hat{b}^+(x, s) \hat{B}^+(y, z) \hat{B}^-(y, z) \hat{b}^-(x, s) \\ & + \iint dx dy V(x, y) \hat{B}^+(x, y) \hat{B}^-(x, y) \\ & + \frac{1}{2} \iiint dx dy dz dw V(x, y) \hat{B}^+(x, y) \hat{B}^+(z, w) \\ & \times \left(\hat{B}^-(y, w) \hat{B}^-(x, z) + \hat{B}^-(w, y) \hat{B}^-(z, x) \right. \\ & \left. + \hat{B}^-(y, z) \hat{B}^-(w, x) + \hat{B}^-(z, y) \hat{B}^-(x, w) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Если в выражениях (25), (26) положить операторы $\hat{B}^{\pm}(x, y)$ c -числами, то получится символ, который отвечает асимптотике в термодинамическом пределе.

5. Случай бозонов. Формула Боголюбова

Рассмотрим систему N тождественных бозонов массы m , которые находятся на трехмерном прямоугольнике $\mathbf{T}$, длины сторон которого равны L_1 , L_2 и L_3 . Будем считать, что бозоны взаимодействуют между собой и потенциал взаимодействия имеет вид

$$V(N^{1/3}(x - y)), \quad (27)$$

где $V(\xi)$ – финитная четная функция, x, y – координаты бозонов на прямоугольнике $\mathbf{T}$. Граничные условия вдоль L_1 будем считать периодическими, а вдоль L_2 наложим условия равенства производных нулю. Отметим, что потенциал взаимо-

действия (27) зависит от N таким образом, что радиус потенциала взаимодействия уменьшается с увеличением числа частиц N , при этом в среднем число частиц, с которыми взаимодействует одна частица, остается постоянным.

При ультравторичном квантовании по парам рассматриваемой бозонной системе соответствует ультравторично квантованный оператор $\widehat{\bar{H}}$, явный вид которого приведен ранее. Как обсуждалось ранее для этого ультравторично квантованного оператора имеет место тождество

$$\widehat{\bar{H}} = \widehat{\bar{E}}\widehat{A}, \quad (28)$$

где $\widehat{\bar{E}}$ – ультравторично квантованный единичный оператор, а $\widehat{A}$ – оператор в пространстве ультравторичного квантования. Нетрудно убедиться, что тождеству вида (28) удовлетворяет оператор следующего вида:

$$\begin{aligned} \widehat{A} = & \iint dx dy \widehat{B}^+(x, y) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) + V(N^{1/3}(x - y)) \right) \widehat{B}^-(x, y) \\ & + 2 \iiint dx dy dx' dy' V(N^{1/3}(x - y)) \widehat{B}^+(x, y) \widehat{B}^+(x', y') \widehat{B}^-(x, x') \widehat{B}^-(y, y'), \end{aligned} \quad (29)$$

где $\widehat{B}^+(x, y)$ и $\widehat{B}^-(x, y)$ – соответственно бозонные операторы рождения и уничтожения пары частиц в фоксовском пространстве ультравторичного квантования. В силу тождества (28) для нахождения асимптотики спектра рассматриваемой бозонной системы в пределе при $N \rightarrow \infty$ нужно найти соответствующую асимптотику для оператора (29).

Так как функция (27), умноженная на N , в пределе при $N \rightarrow \infty$ в слабом смысле сходится к дельта-функции Дирака, то в операторе (29) при втором слагаемом в этом предельном случае стоит малый параметр $1/N$. Это означает, что для нахождения асимптотики собственных значений и собственных функций оператора $\widehat{A}$ можно применить квазиклассические методы, развитые в [9]. Асимптотика собственных значений и собственных функций определяется символом оператора (29), этот символ называется истинным символом ультравторично квантованной задачи. Истинным символом, соответствующим оператору (29) является следующий функционал, определенный для пары функций $\Phi^+(x, y)$ и $\Phi(x, y)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\Phi^+(\cdot), \Phi(\cdot)] = & \iint dx dy \Phi^+(x, y) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) \right) \Phi(x, y) \\ & + 2 \iiint dx dy dx' dy' (NV(N^{1/3}(x - y))) \Phi^+(x, y) \\ & \times \Phi^+(x', y') \Phi(x, x') \Phi(y, y'). \end{aligned} \quad (30)$$

Из сохранения числа частиц в системе для функций $\Phi^+(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ следует условие

$$\iint dx dy \Phi^+(x, y) \Phi(x, y) = \frac{1}{2}. \quad (31)$$

Согласно асимптотическим методам [9], каждому решению системы уравнений

$$\Omega \Phi(x, y) = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi^+(x, y)}, \quad \Omega \Phi^+(x, y) = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi(x, y)}, \quad (32)$$

удовлетворяющему так же условию (31), в пределе при $N \rightarrow \infty$ соответствует асимптотическая серия собственных функций и собственных значений оператора (29). Из явного вида истинного символа (30) следует, что система уравнений (32) записывается в виде

$$\begin{aligned}\Omega\Phi(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)\Phi(x, y) \\ &\quad + \iint dx' dy' (NV(N^{1/3}(x-y)) + NV(N^{1/3}(x'-y'))) \\ &\quad \times \Phi^+(x', y')\Phi(x, x')\Phi(y, y'), \\ \Omega\Phi^+(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)\Phi^+(x, y) \\ &\quad + 2 \iint dx' dy' (NV(N^{1/3}(x-x')) + NV(N^{1/3}(y-y'))) \\ &\quad \times \Phi(x', y')\Phi^+(x, x')\Phi^+(y, y').\end{aligned}\tag{33}$$

Пусть v_q – коэффициенты разложения в ряд Фурье на кубе (L_1, L_2, L_2) потенциала $NV(N^{1/3}x)$:

$$v_q = \frac{1}{L_1 L_2^2} \int_T e^{-iqx} NV(\sqrt[3]{N}(x)) dx, \quad v_{-q} = v_q.\tag{34}$$

Точным решением системы (33) будут следующие функции

$$\Phi_{k_1, k_2}^+ = \frac{1}{L_1 L_2^2} e^{-ik_1(x+y)} \cos(k_2(x-y)),\tag{35}$$

$$\Phi_{k_1, k_2} = \frac{1}{L_1 L_2^2} \sum_l \varphi_{k_2, l} e^{ik_1(x+y)} e^{il(x-y)},\tag{36}$$

где $k_1 = (n_1/L_1, 0, 0)$, $k_2 = (0, n_2/L_2, n_3/L_2)$, с собственным значением

$$\Omega = \frac{\hbar^2}{m}(k_1^2 + k_2^2) + v_0 + v_{2k_2},\tag{37}$$

где функция $\varphi_{k_2, l}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi_{k_2, l} &= -\frac{b_l}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{b_l^2 - 1}, \quad l^2 > k_2^2, \\ \varphi_{k_2, l} &= -\frac{b_l}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{b_l^2 - 1}, \quad l^2 < k_2^2, \\ \varphi_{k_2, k_2} &= \frac{1}{2}, \quad \varphi_{k_2, l} = \varphi_{k_2, -l}, \\ b_l &= \frac{\hbar^2/m(l^2 - k_2^2) - (v_0 + v_{2k_2})}{v_{l-k_2} + v_{l+k_2}}, \quad b_l = b_{-l}\end{aligned}\tag{38}$$

(если $v_l \rightarrow 0$, то $\varphi_{k_2, l} \rightarrow 0$).

Пара векторов k_1, k_2 играет роль параметров, нумерующих различные решения этой системы. Вектор $\hbar k_1/m$ равен скорости течения бозонной системы вдоль капилляра. Вектор k_2 – волновой вектор поперечной моды.

Отметим, что при $|l| \rightarrow \infty$, $b_l \rightarrow \infty$, поскольку

$$|v_l| = \frac{1}{L_1 L_2^2} \int_{NT} e^{-il\xi/N} V(\xi) d\xi \leq \frac{1}{L_1 L_2^2} \int_{NT} |V(\xi)| d\xi < \frac{1}{L_1 L_2^2} \int_{R^3} |V(\xi)| d\xi, \quad (39)$$

а следовательно,

$$\varphi_{k,l} \cong \frac{1}{b_l^2}, \quad (40)$$

и значит, ряд (36) сходится абсолютно.

Разобьем ряд (36) на две части при $l \leq N^{1/6}$ при $l > N^{1/6}$. Первая сумма при $N \rightarrow \infty$ сходится с точностью до $(N^{-1/6})$ к

$$\begin{aligned} b_l &\rightarrow \frac{\hbar^2(l^2 - k_2^2)}{2mV_0} - 1 \stackrel{\text{def}}{=} b_l^0, \\ \varphi_{k_2,l} &\rightarrow -\frac{b_l}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{b_l^2 - 1} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{k_2,l}^0. \end{aligned} \quad (41)$$

Это легко получается после замены в (34) вида $\sqrt[3]{N}x = \xi$.

Вторая часть суммы стремится к нулю в силу (40) как $O(N^{-1/6})$. Следовательно, в пределе при $N \rightarrow \infty$ система уравнений (33), дополненная условием (31), имеет при $k_1 = 0$ следующее семейство решений:

$$\begin{aligned} \Phi_k^+(x, y) &= \frac{1}{L_1 L_2^2} \cos(k(x - y)), \\ \Phi_k(x, y) &= \frac{1}{L_1 L_2^2} \sum_l \varphi_{k,l} \exp(il(x - y)), \end{aligned} \quad (42)$$

где k и l – трехмерные векторы вида

$$2\pi \left(0, \frac{n_2}{L_2}, \frac{n_3}{L_2} \right),$$

n_2, n_3 – целые числа, $\varphi_{k,l}$ в формуле (28) имеют вид

$$\varphi_{k_2,l}^0 = \frac{1}{2V_0} \left(\frac{\hbar^2}{2m} (k_2^2 - l^2) + V_0 \pm \sqrt{\left(\frac{\hbar^2}{2m} (k_2^2 - l^2) + V_0 \right)^2 - V_0^2} \right), \quad (43)$$

где выбирается знак плюс при $l^2 > k_2^2$, и знак минус при $l^2 < k_2^2$, наконец, V_0 здесь обозначает величину

$$V_0 = \frac{1}{L_1 L_2^2} \int dx V(x), \quad (44)$$

где интеграл берется по пространству $\mathbf{R}^3$. Вектор k в формулах (42) играет роль параметра, нумерующего различные решения системы уравнений (33), (31). Решения (42) представляют собой стоячие волны и им соответствуют серии, в которых нет течения.

Главный член асимптотики собственных значений серии, соответствующей решению (35), (36), равен значению символа (30) на этих функциях, умноженному на N :

$$E_{k_1,k_2} = N \left(\frac{\hbar^2(k_1^2 + k_2^2)}{2m} + \frac{V_0}{2} \right). \quad (45)$$

Асимптотика собственных значений и собственных функций, в частности, следующие после E_{k_1, k_2} члены, помимо системы уравнений (33), определяется также решениями системы уравнений в вариациях для системы уравнений Гамильтона. Система уравнений в вариациях для (33) имеет вид

$$\begin{aligned}
 (\Omega - \lambda)F(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)F(x, y) \\
 &\quad + 2N \iint dx' dy' (V(\sqrt[3]{N}(x - y)) + V(\sqrt[3]{N}(x' - y'))) \\
 &\quad \times (G(x', y')\Phi(x, x')\Phi(y, y') + \Phi^+(x', y')F(x, x')\Phi(y, y') \\
 &\quad + \Phi^+(x', y')\Phi(x, x')F(y, y')), \\
 (\Omega + \lambda)G(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)G(x, y) \\
 &\quad + 2N \iint dx' dy' (V(\sqrt[3]{N}(x - x')) + V(\sqrt[3]{N}(y - y'))) \\
 &\quad \times (F(x', y')\Phi^+(x, x')\Phi^+(y, y') + \Phi(x', y')G(x, x')\Phi^+(y, y') \\
 &\quad + \Phi(x', y')\Phi^+(x, x')G(y, y')).
 \end{aligned} \tag{46}$$

Для нахождения спектра квазичастиц из всех решений системы уравнений в вариациях необходимо выделить те, которые удовлетворяют правилу отбора для комплексного роста для несамосопряженных операторов с действительным спектром, которые определены в [10].

Рассмотрим случай $k_2 \neq 0$. Подставим решения (35), (36) в (46) и учтем симметрию. Тогда получим, что решения системы уравнений в вариациях имеют вид

$$\begin{aligned}
 G_l(x, y) &= u_{1,l}(\exp(i(-k_1 + k_2)x + i(-k_1 + l)y) + \exp(i(-k_1 + k_2)y + i(-k_1 + l)x)) \\
 &\quad + u_{2,l}(\exp(i(-k_1 - k_2)x + i(-k_1 + 2k_2 + l)y) \\
 &\quad + \exp(i(-k_1 - k_2)y + i(-k_1 + 2k_2 + l)x)), \\
 F_l(x, y) &= -v_{1,l}(\exp(i(k_1 + k_2)x + i(k_1 + l)y) + \exp(i(k_1 + k_2)y + i(k_1 + l)x)) \\
 &\quad - v_{2,l}(\exp(i(k_1 - k_2)x + i(k_1 + 2k_2 + l)y) \\
 &\quad + \exp(i(k_1 - k_2)y + i(k_1 + 2k_2 + l)x)) \\
 &\quad + \sum_{l' \neq l, l+2k_2} w_{l,l'}(\exp(i(k_1 + k_2 + l - l')x + i(k_1 + l')y) \\
 &\quad + \exp(i(k_1 + k_2 + l - l')y + i(k_1 + l')x)),
 \end{aligned} \tag{47}$$

где $l \neq -k_2$, а числовые коэффициенты $u_{1,l}$, $u_{2,l}$, $v_{1,l}$, $v_{2,l}$, $w_{l,l'}$, определяются из бесконечной системы уравнений. Эта система уравнений содержит замкнутую подсистему из четырех уравнений для коэффициентов $u_{1,l}$, $u_{2,l}$, $v_{1,l}$, $v_{2,l}$, которая может быть записана в виде

$$\tilde{\lambda}X = MX, \tag{48}$$

где

$$\tilde{\lambda} = \lambda + \frac{\hbar^2}{m}k_1(k_2 + l),$$

X – вектор-столбец вида

$$X = \begin{pmatrix} u_{1,l} \\ u_{2,l} \\ v_{1,l} \\ v_{2,l} \end{pmatrix}.$$

Уравнения (47), (48) приводят к матрице M

$$M = \begin{pmatrix} B_l + \frac{v_{l-k_2}}{2} & \frac{v_{2k_2} + v_{l+k_2}}{2} & -\frac{v_{l+k_2} + v_{l-k_2}}{2} & 0 \\ \frac{v_{2k_2} + v_{l+k_2}}{2} & B_{l+2k_2} + \frac{v_{l+3k_2}}{2} & 0 & -\frac{v_{l+k_2} + v_{l+3k_2}}{2} \\ 2(v_0 + v_{l-k_2})\varphi_{k_2,l} & (v_{2k_2} + v_{l+k_2}) \times (\varphi_{k_2,l} + \varphi_{k_2,l+2k_2}) & -B_l - \frac{v_{l-k_2}}{2} & -\frac{v_{2k_2} + v_{l+k_2}}{2} \\ (v_{2k_2} + v_{l+k_2}) \times (\varphi_{k_2,l} + \varphi_{k_2,l+2k_2}) & 2(v_0 + v_{l+3k_2})\varphi_{k_2,l+2k_2} & -\frac{v_{2k_2} + v_{l+k_2}}{2} & -B_{l+2k_2} - \frac{v_{l+3k_2}}{2} \end{pmatrix},$$

B_l имеют вид

$$B_l = \frac{\hbar^2}{2m}(l^2 - k_2^2) + (v_{l-k_2} + v_{l+k_2})\varphi_{k_2,l} - \frac{v_{2k_2}}{2}.$$

Очевидно, что

$$v_{l+k_2} + v_{l+3k_2} = v_{l-k_2} + v_{l+k_2} + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (49)$$

равномерно по l при $l \rightarrow \infty$ (достаточно сделать замену типа (39)). Тогда матрицу M приближенно можно представить в виде блочной матрицы

$$M = \begin{pmatrix} C & -V_l E \\ D & -C \end{pmatrix},$$

где E – единичная 2×2 матрица,

$$V_l = \frac{v_{l-k_2} + v_{l+k_2}}{2}.$$

Введем также

$$V_l^+ = \frac{v_{l+k_2} + v_{2k_2}}{2}, \quad V_l^- = \frac{v_{l-k_2} + v_0}{2}.$$

Собственные значения, соответствующие уравнению (48), имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_{k_1, k_2, l} = & -2ak_1(k_2 + l) \\ & \pm \left(\frac{1}{2}(a(l^2 - k_2^2) + V_l - V_l^+)^2 + \frac{1}{2}(a(l_1^2 - k_2^2) + V_l - V_l^+)^2 + V_l^{+2} - V_l^2 \right. \\ & \left. \pm \frac{1}{2}(a(l_1^2 + l^2 - 2k_2^2) + 2V_l - 2V_l^+) \sqrt{a^2(l_1^2 - l^2)^2 + 4V_l^{+2}} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$a = \frac{\hbar^2}{2m}, \quad l_1 = l + 2k_2.$$

В допределённом случае при $k_2 = 0$

$$\lambda_{k_1, k_2, l} = -2ak_1l \pm \left((al^2 + V_l - V_l^+)^2 + V_l^{+2} - V_l^2 \pm 2(al^2 + V_l - V_l^+)|V_l^+| \right)^{1/2},$$

$$V_l = v_l, \quad V_l^+ = V_l^- = \frac{v_l + v_0}{2}.$$

Формально, положив $k_2 = 0$, мы приходим к известной формуле Боголюбова

$$\lambda_{1, l} = -\frac{\hbar^2}{m}k_1l + \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 l^2}{2m} + v_l\right)^2 - v_l^2}.$$

Здесь v_l – Фурье-образ потенциала.

(Мы полагаем, что L_2 много больше некоторой стандартной длины, например, радиуса электрона r_0 , и хотя $L_1 \gg L_2$, мы можем брать достаточно большое целое число n_1 . Иначе говоря, $L_2/r_0 \rightarrow \infty$, $L_1/r_0 \rightarrow \infty$, но вектор $k_1 = (n_1/L_1, 0, 0)$ конечен, так как $n_1 \rightarrow \infty$.)

На языке нестандартного анализа это означает: L_2 – бесконечно большее (нестандартное число), L_1 и n_1 нестандартные числа более высокого порядка, а $k_1 = (n_1/L_1, 0, 0)$ – стандартное конечное число.

Тогда k_2 равно бесконечно малому нестандартному нулю: $k_2 \cong 0$, а k_1 – стандартное число.)

6. Случай ферми-жидкости

Рассмотрим систему уравнений Гамильтона для фермионов

$$\begin{aligned} \Omega\Phi(x, y) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) \right) \Phi(x, y) \\ &\quad + 2N \iint dx' dy' (V(x - y) + V(x' - y')) \Phi^+(x', y') \Phi(x, x') \Phi(y', y), \\ \Omega\Phi^+(x, y) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) \right) \Phi^+(x, y) \\ &\quad + 2N \iint dx' dy' (V(x - x') + V(y - y')) \Phi(x', y') \Phi^+(x, x') \Phi^+(y', y). \end{aligned} \quad (51)$$

Функции $\Phi^+(x, y)$, $\Phi(x, y)$ являются антисимметричными и удовлетворяют условию нормировки

$$\iint dx dy \Phi^+(x, y) \Phi(x, y) = \frac{1}{2}. \quad (52)$$

Представим потенциал взаимодействия в виде ряда Фурье:

$$NV(x) = \sum_p v_p e^{ipx}, \quad v_p = \frac{1}{L_1 L_2^2} \int dx NV(x) e^{-ipx}, \quad v_p = v_{-p}.$$

Решение системы уравнений (51), (52) будем искать в виде

$$\begin{aligned}\Phi_{k_1, k_2}^+(x, y) &= \frac{1}{L_1 L_2^2} e^{-ik_1(x+y)} \sin(k_2(x-y)), \\ \Phi_{k_1, k_2}(x, y) &= \frac{1}{L_1 L_2^2} \sum_l \varphi_{k_2, l} e^{il(x-y) + ik_1(x+y)},\end{aligned}\tag{53}$$

где k_1, k_2, l – трехмерные векторы вида

$$2\pi \left(\frac{n_1}{L_1}, \frac{n_2}{L_2}, \frac{n_3}{L_2} \right),$$

n_1, n_2, n_3 – целые числа. Числа $\varphi_{k_2, l}$ должны удовлетворять условию

$$\varphi_{k_2, l} = -\varphi_{k_2, -l}.$$

После подстановки получаем, что собственное значение равно

$$\Omega = \frac{\hbar^2}{m} (k_1^2 + k_2^2) + v_{2k_2} - v_0,$$

а $\varphi_{k_2, l}$ имеют вид

$$\varphi_{k_2, l} = -\frac{ib_{k_2, l}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - b_{k_2, l}^2}, \quad b_{k_2, l} \equiv \frac{(\hbar^2/m)(l^2 - k_2^2) + (v_0 - v_{2k_2})}{v_{l-k_2} - v_{l+k_2}}.$$

Отметим, что

$$b_{k_2, l} = -b_{k_2, -l}.$$

Положим

$$\varphi_{k_2, l} = -\frac{ib_{k_2, l}}{2} + \frac{1}{2} \frac{v_{l-k_2} - v_{l+k_2}}{|v_{l-k_2} - v_{l+k_2}|} \sqrt{1 - b_{k_2, l}^2}.$$

Тогда $\varphi_{k_2, l}$ будет равно $-\varphi_{k_2, -l}$.

Рассмотрим систему уравнений в вариациях для фермионов

$$\begin{aligned}(\Omega - \lambda)F(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y)F(x, y) \\ &\quad + 2N \iint dx' dy' (V(\sqrt[3]{N}(x-y)) + V(\sqrt[3]{N}(x'-y'))) \\ &\quad \times (G(x', y')\Phi(x, x')\Phi(y', y) + \Phi^+(x', y')F(x, x')\Phi(y', y) \\ &\quad + \Phi^+(x', y')\Phi(x, x')F(y', y)), \\ (\Omega + \lambda)G(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y)G(x, y) \\ &\quad + 2N \iint dx' dy' (V(\sqrt[3]{N}(x-x')) + V(\sqrt[3]{N}(y-y'))) \\ &\quad \times (F(x', y')\Phi^+(x, x')\Phi^+(y', y) + \Phi(x', y')G(x, x')\Phi^+(y', y) \\ &\quad + \Phi(x', y')\Phi^+(x, x')G(y', y)).\end{aligned}\tag{54}$$

Решения системы уравнений в вариациях имеют вид

$$\begin{aligned}
 G_l(x, y) &= u_{1,l}(e^{i(-k_1+k_2)x+i(-k_1+l)y} - e^{i(-k_1+k_2)y+i(-k_1+l)x}) \\
 &\quad + u_{2,l}(e^{i(-k_1-k_2)x+i(-k_1+2k_2+l)y} - e^{i(-k_1-k_2)y+i(-k_1+2k_2+l)x}), \\
 F_l(x, y) &= v_{1,l}(e^{i(k_1+k_2)x+i(k_1+l)y} - e^{i(k_1+k_2)y+i(k_1+l)x}) \\
 &\quad + v_{2,l}(e^{i(k_1-k_2)x+i(k_1+2k_2+l)y} - e^{i(k_1-k_2)y+i(k_1+2k_2+l)x}) \\
 &\quad + \sum_{l' \neq l, l+2k_2} w_{l,l'}(e^{i(k_1+k_2+l-l')x+i(k_1+l')y} - e^{i(k_1+k_2+l-l')y+i(k_1+l')x}),
 \end{aligned} \tag{55}$$

где $l \neq -k_2$, а числовые коэффициенты $u_{1,l}$, $u_{2,l}$, $v_{1,l}$, $v_{2,l}$, $w_{l,l'}$ определяются из бесконечной системы уравнений. Эта система уравнений содержит замкнутую подсистему из четырех уравнений для коэффициентов $u_{1,l}$, $u_{2,l}$, $v_{1,l}$, $v_{2,l}$, которая может быть записана в стандартном виде (48).

M – матрица

$$M = \begin{pmatrix} B_l + \frac{v_{l-k_2}}{2} & \frac{v_{l+k_2} - v_{2k_2}}{2} & \frac{v_{l-k_2} - v_{l+k_2}}{2} & 0 \\ \frac{v_{l+k_2} - v_{2k_2}}{2} & B_{l+2k_2} + \frac{v_{l+3k_2}}{2} & 0 & \frac{v_{l+3k_2} - v_{l+k_2}}{2} \\ 2i(v_{l-k_2} - v_0)\varphi_{k_2,l} & i(v_{2k_2} - v_{l+k_2}) \times (\varphi_{k_2,l+2k_2} - \varphi_{k_2,l}) & -B_l - \frac{v_{l-k_2}}{2} & -\frac{v_{l+k_2} - v_{2k_2}}{2} \\ i(v_{2k_2} - v_{l+k_2}) \times (\varphi_{k_2,l+2k_2} - \varphi_{k_2,l}) & 2i(v_0 - v_{l+3k_2})\varphi_{k_2,l+2k_2} & -\frac{v_{l+k_2} - v_{2k_2}}{2} & -B_{l+2k_2} - \frac{v_{l+3k_2}}{2} \end{pmatrix},$$

B_l имеют вид

$$B_l = \frac{\hbar^2}{2m}(l^2 - k_2^2) + i(v_{l+k_2} - v_{l-k_2})\varphi_{k_2,l} - \frac{v_{2k_2}}{2}.$$

При $k_2 = 0$ собственные значения имеют вид

$$\lambda_{1,l} = -\frac{\hbar^2}{m}lk_1 + \frac{\hbar^2 l^2}{2m}, \quad \lambda_{2,l} = -\frac{\hbar^2}{m}lk_1 + \left| \frac{\hbar^2 l^2}{2m} + v_l - v_0 \right|.$$

Это значит, что мы выбираем вектор $k_2 = (0, 1/L_2, 0)$, $k_1 = (n/L_1, 0, 0)$. Если $n \gg 1$, а следовательно, $k_1 \gg k_2$, это значит, что вектор скорости жидкости в основном направлен вдоль трубки. Пусть, как и ранее, $L_1 = \infty$, $L_2 = \infty$, $n = \infty$ – нестандартные числа, $L_1 \gg L_2$, k_1 – стандартное число. Тогда $k_2 \cong 0$, $\varphi_{k_2,l}$ принимает при $k_2 \cong 0$ нестандартные значения. Однако если $0 \leq l \leq \sqrt{k_2}M$, где $M \leq \infty$, т.е. $0 \leq l \leq \infty$, то $\varphi_{k_2,l}$ можно считать стандартным числом. При $k_2 \cong 0$, учитывая правило отбора, мы получаем аналогично случаю бозонов и формуле (1) формулу

$$\lambda_{2,l} = -\frac{\hbar^2}{m}lk_1 + \left| \frac{\hbar^2 l^2}{2m} + v_l - v_0 \right|.$$

Поведение выражения под знаком модуля, как упомянуто в п. 2, аналогично изменению кривой Ландау для бозонов. Критерий для k_1 имеет вид:

$$|k_1| \leq \frac{m}{\hbar^2} \min_l \left| \frac{v_l - v_0}{|l|} + \frac{\hbar^2 l}{2m} \right|$$

аналогично критерию Ландау (скорость, разрушающая пары). Параметр k_2 мы полагаем бесконечно малой нестандартной величиной. Однако это не точный нуль и наличие k_2 , не точно равного нулю, дает щель в спектре. Для того, чтобы ее вычислить в первом приближении, следует определить спектр матрицы M с точностью до $O(k_2^2)$. При учете правил отбора можно будет определить наличие щели в спектре.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ограничение снизу на ширину нанотрубки определяется расстоянием дальнего действия потенциала взаимодействия.

Выражаю благодарность Д. С. Голикову за пересчет и проверку всех формул.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Боголюбов, “К теории сверхтекучести”, *Избранные труды в трех томах. Том второй*, Наукова Думка, Киев, 1970, 210–224; “On the theory of superfluidity”, *Acad. Sci. USSR. J. Phys.*, **11** (1947), 23–32.
- [2] Л. Д. Ландау, “К теории сверхтекучести”, *Собрание трудов*, т. 2, Наука, М., 1969, 42–46.
- [3] J. M. Vogels, K. Xu, C. Raman, J. R. Abo-Shaeer, W. Ketterle, “Experimental Observation of the Bogoliubov Transformation for a Bose–Einstein Condensed Gas”, preprint № 060402, *Phys. Rev. Lett.*, **88**:6 (2002).
- [4] В. П. Маслов, *Квантование термодинамики и ультравторичное квантование*, Ин-т компьютерных исследований, М., 2001.
- [5] В. П. Маслов, “Квантование Больцмановской энтропии, пары и корреляционная функция”, *ТМФ*, **131**:2 (2002), 261–277.
- [6] В. П. Маслов, “О способе осреднения для большого числа кластеров. Фазовые переходы”, *ТМФ*, **125**:2 (2000), 297–314.
- [7] В. П. Маслов, “Ультравторичное квантование и “духи” в квантованной энтропии”, *ТМФ*, **129**:3 (2001), 464–490.
- [8] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, М., 1987.
- [9] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов, *Метод комплексного роста в задаче многих частиц и в квантовой теории поля*, Эдиториал УРСС, М., 2000.
- [10] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.

В. П. Маслов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило

04.03.2007