Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Мещеряков, Многообразия Бете, ассоциированные с классическими системами корней, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 5, 709–717

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4084>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:01:52

Многообразия Бете, ассоциированные с классическими системами корней

В. В. Мещеряков

Модель Калоджеро–Сазерленда [1] описывает состояние конечного числа нерелятивистских частиц на окружности (или гиперболе), взаимодействующих по закону обратных квадратов. В работе для каждой классической системы корней (типа A_{n-1}, B_n, C_n, D_n) описаны многообразия Бете, связанные с моделью Калоджеро–Сазерленда. В каждом случае вычислена размерность многообразия и указаны определяющие его уравнения.

Библиография: 4 названия.

Пусть R – приведенная и неприводимая система корней в n -мерном вещественном векторном пространстве V , R_0 – множество простых корней, а R_+ – положительная система корней. Группой Вейля $W(R)$ системы R называется группа, порожденная отражениями относительно корней этой системы.

Будем считать пространство V евклидовым со стандартным скалярным произведением $(\cdot | \cdot)$. Тогда отражение s_α относительно вектора α отображает $x \in V$ в вектор

$$s_\alpha x = x - 2 \frac{(x | \alpha)}{(\alpha | \alpha)} \alpha.$$

Для каждой системы корней можно построить единственную билинейную форму $F_R(x, y)$ на V , которая инвариантна относительно действия $x \rightarrow wx, y \rightarrow wy$ группы $W(R)$ и удовлетворяет следующему условию:

$$F_R(x, y) = \sum_{\alpha \in R} F_R(x, \alpha) F_R(\alpha, y).$$

Пусть $|R| = N$ – число корней в системе R , $\mathbb{C}^N$ – комплексное пространство, ассоциированное с R . Через $\{u_\alpha, \alpha \in R\}$ обозначим координаты в $\mathbb{C}^N$, упорядоченные относительно порядка, выбранного в R .

Обозначим через $k_\alpha: \alpha \rightarrow k_\alpha$ функцию на R с неотрицательными целыми значениями, которые удовлетворяют условию $k_{w\alpha} = k_\alpha - W(R)$ -инвариантности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [1]. Алгебраическое подмногообразие пространства $\mathbb{C}^N$, определенное уравнениями

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta \\ s_\alpha s_\beta = w}} k_\alpha k_\beta \frac{F_R(\alpha, \beta)}{(u_\alpha - u_{-\alpha})(u_\beta - u_{-\beta})} = 0,$$

где $w \in W(R)$, называется *многообразием Бете* для системы R . Многообразие Бете системы R обозначается символом $M_B(R)$.

Опишем явно это многообразие для классических систем корней.

1. Случай А. Пусть дана система корней типа A_{n-1} , $n \geq 2$. Векторное пространство V – это гиперплоскость пространства $\mathbb{R}^n$, состоящая из векторов, сумма координат которых равна нулю. Корнями будут являться векторы вида

$$\alpha_{ij} = e_i - e_j, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

где (e_i) – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ [2], [3]. В качестве базиса можно выбрать корни $\alpha_{k, k+1}$, где $1 \leq k \leq n$. Тогда положительными корнями будут векторы α_{ij} с $i < j$. Простой подсчет показывает, что $|A_{n-1}| = n(n-1)$ [3].

Билинейная форма $F_{A_{n-1}}$ [4] задается равенством

$$F_{A_{n-1}}(x, y) = \frac{(x | y)}{2n}.$$

Для краткости, отражение относительно α_{ij} обозначим через s_{ij} . Таким образом, отражение однозначно определяется неупорядоченной парой $\{i, j\}$ с $i \neq j$. Заметим, что можно считать $i < j$, так как $s_{ij} = s_{ji}$. Легко видеть, что отражение s_{ij} действует перестановкой координат x_i и x_j , т.е.

$$s_{ij}(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = (\dots, x_j, \dots, x_i, \dots).$$

Далее, пусть даны отражения s_{ij} и s_{kl} . Когда все индексы попарно различны, $F_{A_{n-1}}(\alpha_{ij}, \alpha_{kl}) = 0$. Поэтому этот случай можно исключить из рассмотрения. Остается исследовать ситуацию, когда из четырех индексов i, j, k, l только три различные.

Рассмотрим, например, произведение отражений s_{ij} и s_{ik} . Можно считать, что $j < k$, поскольку уравнение, выписанное по элементу группы Вейля $w = s_\alpha s_\beta$, совпадает с уравнением, которое отвечает элементу $w' = s_\beta s_\alpha$. Из известного соотношения

$$s_\alpha s_\beta = s_{s_\alpha \beta} s_\alpha$$

вытекают следующие равенства:

$$s_{ij} s_{ik} = s_{jk} s_{ij} = s_{ik} s_{jk}.$$

Произведение $s_{ij} s_{ik}$ отображает вектор $(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots)$ в вектор $(\dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_i, \dots)$. По этой причине других произведений (кроме указанных в последнем равенстве), обладающих данным свойством, быть не может.

Координату в пространстве $\mathbb{C}^{n(n-1)}$, отвечающую корню α_{ij} , обозначим через u_{ij} . Таким образом, уравнения, определяющие многообразие $M_B(A_{n-1})$, имеют вид

$$k_{\alpha_{ij}} k_{\alpha_{ik}} \frac{F_{A_{n-1}}(\alpha_{ij}, \alpha_{ik})}{(u_{ij} - u_{ji})(u_{ik} - u_{ki})} + k_{\alpha_{jk}} k_{\alpha_{ij}} \frac{F_{A_{n-1}}(\alpha_{jk}, \alpha_{ij})}{(u_{jk} - u_{kj})(u_{ij} - u_{ji})} + k_{\alpha_{ik}} k_{\alpha_{jk}} \frac{F_{A_{n-1}}(\alpha_{ik}, \alpha_{jk})}{(u_{ik} - u_{ki})(u_{jk} - u_{kj})} = 0, \quad 1 \leq i < j < k \leq n.$$

Поскольку в системе типа A_{n-1} все корни имеют одинаковую длину, значение функции k_α на всех корнях постоянно. В результате

$$\frac{u_{ij} - u_{ik} + u_{jk}}{(u_{ij} - u_{ji})(u_{ik} - u_{ki})(u_{jk} - u_{kj})} = \frac{u_{ji} - u_{ki} + u_{kj}}{(u_{ij} - u_{ji})(u_{ik} - u_{ki})(u_{jk} - u_{kj})},$$

т.е. на множестве

$$\tilde{X}_A = \mathbb{C}^{n(n-1)} \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{u_{ij} - u_{ji} = 0\}$$

получаем эквивалентную систему линейных уравнений:

$$u_{ij} - u_{ik} + u_{jk} = u_{ji} - u_{ki} + u_{kj}, \quad 1 \leq i < j < k \leq n. \quad (1)$$

ЛЕММА. Подсистема системы (1), состоящая из уравнений вида

$$u_{1j} - u_{1k} + u_{jk} = u_{j1} - u_{k1} + u_{kj}, \quad 1 < j < k \leq n,$$

линейно независима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В системе корней A_{n-1} введем отношение порядка следующим образом. Пусть $i < j$ и $k < l$; тогда скажем, что $\alpha_{ij} \prec \alpha_{kl}$ и $\alpha_{ji} \prec \alpha_{lk}$, если $i < k$ или $i = k$, но $j < l$. Если же $i < j$ и $k > l$, то $\alpha_{ij} \prec \alpha_{kl}$. Координаты пространства $\mathbb{C}^{n(n-1)}$ упорядочим относительно порядка $\prec$. Тогда матрица системы (1) имеет единичную подматрицу, порядок которой равен числу уравнений указанной подсистемы, что и доказывает независимость ее уравнений.

Далее, все уравнения системы (1), не входящие в указанную подсистему, являются линейными комбинациями уравнений подсистемы. В самом деле, если $1 \leq i < j < k \leq n$, то, сложив уравнения

$$\begin{aligned} u_{1j} - u_{1k} + u_{jk} &= u_{j1} - u_{k1} + u_{kj}, \\ u_{1i} - u_{1j} + u_{ji} &= u_{i1} - u_{j1} + u_{ji}, \\ u_{1k} - u_{1i} + u_{ki} &= u_{k1} - u_{i1} + u_{ik}, \end{aligned}$$

получим уравнение

$$u_{ij} - u_{ik} + u_{jk} = u_{ji} - u_{ki} + u_{kj}.$$

Так как число таких уравнений равно $(n-1)(n-2)/2$, а переменных $n(n-1)$, то размерность многообразия $M_B(A_{n-1})$ равна $(n-1)(n+2)/2$.

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Многообразие Бете $M_B(A_{n-1})$ для системы A_{n-1} представляет плоскость*

$$u_{1j} - u_{1k} + u_{jk} = u_{j1} - u_{k1} + u_{kj}, \quad 1 < j < k \leq n,$$

в пространстве $\mathbb{C}^{n(n-1)}$ с исключенными гиперплоскостями $u_{ij} - u_{ji} = 0$, где $1 \leq i < j \leq n$. Его размерность вычисляется по формуле

$$\dim M_B(A_{n-1}) = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

ПРИМЕР. Рассмотрим описанную конструкцию для системы корней типа A_3 . Всего имеется 12 корней, 6 из которых положительны. Поэтому для написания системы достаточно рассмотреть следующие элементы группы Вейля:

$$w_{123} = s_{12}s_{13} = s_{23}s_{12} = s_{13}s_{23},$$

$$w_{124} = s_{12}s_{14} = s_{24}s_{12} = s_{14}s_{24},$$

$$w_{134} = s_{13}s_{14} = s_{34}s_{13} = s_{14}s_{34},$$

$$w_{234} = s_{23}s_{24} = s_{34}s_{23} = s_{24}s_{34}.$$

Система (1) имеет следующий вид:

$$u_{12} - u_{13} + u_{23} - u_{21} + u_{31} - u_{32} = 0,$$

$$u_{12} - u_{14} + u_{24} - u_{21} + u_{41} - u_{42} = 0,$$

$$u_{13} - u_{14} + u_{34} - u_{31} + u_{41} - u_{43} = 0,$$

$$u_{23} - u_{24} + u_{34} - u_{32} + u_{42} - u_{43} = 0,$$

Последнее уравнение этой системы, как легко видеть, является линейной комбинацией первых трех. Относительно порядка, введенного при доказательстве леммы, система из первых трех уравнений имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому система, составленная из них, линейно независима. Следовательно, размерность многообразия равна 9, что согласуется с доказанной теоремой.

2. Случай D. Рассмотрим систему корней типа D_n , $n \geq 3$. Относительно базиса $\alpha_{k-1,k} = e_{k-1} - e_k$, $1 \leq k \leq n$, $\beta_{n-1,n} = e_{n-1} + e_n$ положительными корнями являются векторы $\alpha_{ij} = e_i - e_j$, $\beta_{ij} = e_i + e_j$, где $1 \leq i < j \leq n$. Имеют место следующие формулы [4]:

$$|D_n| = 2n(n-1), \quad F_{D_n}(x, y) = \frac{(x | y)}{4(n-1)}.$$

Отражение относительно вектора α_{ij} обозначим, как и выше, через s_{ij} , а относительно вектора β_{ij} — через σ_{ij} . Эти отражения действуют на $V = \mathbb{R}^n$ по формулам

$$s_{ij}(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = (\dots, x_j, \dots, x_i, \dots),$$

$$\sigma_{ij}(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = (\dots, -x_j, \dots, -x_i, \dots).$$

Как и в предыдущем случае, произведения $s_{ij}s_{ik}$, $s_{jk}s_{ij}$, $s_{ik}s_{jk}$ и только они, отображают вектор $(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots)$ в вектор $(\dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_i, \dots)$. Остаются произведения вида $s_{ij}\sigma_{kl}$. В том случае, когда индексы i, j, k, l попарно различны или $i = k$, $j = l$, очевидно, что $F_{D_n}(\alpha_{ij}, \beta_{kl}) = 0$. Поэтому достаточно рассмотреть элементы вида $s_{ij}\sigma_{ik}$ и $s_{ij}\sigma_{ki}$. Ясно, что

$$s_{ij}\sigma_{ik} = \sigma_{jk}s_{ij} = \sigma_{ik}\sigma_{jk},$$

$$s_{ij}\sigma_{ik}(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots) = (\dots, x_j, \dots, -x_k, \dots, -x_i, \dots)$$

и других произведений, осуществляющих такое отображение, нет. Сказанное относится и к элементу $s_{ij}\sigma_{ki}$.

Координаты, отвечающие корням α_{ij} , $-\alpha_{ij}$, β_{ij} , $-\beta_{ij}$, обозначим через u_{ij} , u_{ji} , v_{ij} , v_{ji} соответственно.

Многообразие Бете $M_B(D_n)$ вложено во множество

$$\tilde{X}_D = \mathbb{C}^{2n(n-1)} \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{u_{ij} - u_{ji} = 0, v_{ij} - v_{ji} = 0\}.$$

После соответствующих преобразований уравнение, отвечающее элементу $s_{ij}s_{ik}$, примет вид

$$u_{ij} - u_{ik} + u_{jk} = u_{ji} - u_{ki} + u_{kj},$$

а элементу $s_{ij}\sigma_{ik}$ — следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{ij} - v_{ik} + v_{jk} &= u_{ji} - v_{ki} + v_{kj}, & \text{если } j < k, \\ u_{ij} - v_{ik} + v_{kj} &= u_{ji} - v_{ki} + v_{jk}, & \text{если } k < j. \end{aligned}$$

Для произведения $s_{ij}\sigma_{ki}$ уравнения имеют аналогичную форму:

$$\begin{aligned} u_{ij} - v_{ki} + v_{jk} &= u_{ji} - v_{ik} + v_{kj}, & \text{если } j < k, \\ u_{ij} - v_{ki} + v_{kj} &= u_{ji} - v_{ik} + v_{jk}, & \text{если } k < j. \end{aligned}$$

Индексы i, j, k принимают целые значения от 1 до n .

Напомним, что рассматриваются только положительные корни, поэтому первый индекс отражения всегда выбирается меньше второго. Таким образом, система уравнений

$$\begin{aligned} u_{ij} - u_{ik} + u_{jk} &= u_{ji} - u_{ki} + u_{kj}, \\ u_{ij} - v_{ik} + v_{jk} &= u_{ji} - v_{ki} + v_{kj}, & i < j < k, \\ u_{ij} - v_{ik} + v_{kj} &= u_{ji} - v_{ki} + v_{jk}, & i < k < j, \\ u_{ij} - v_{ki} + v_{kj} &= u_{ji} - v_{ik} + v_{jk}, & k < i < j, \end{aligned} \tag{2}$$

полностью определяет многообразие $M_B(D_n)$. Но в ней имеются линейно зависящие уравнения.

ЛЕММА. Система линейных уравнений

$$\begin{aligned}
 u_{ij} - v_{i,j+1} + v_{j,j+1} &= u_{ji} - v_{j+1,i} + v_{j+1,j}, & 1 \leq i < j < n, \\
 u_{in} - v_{i,n-1} + v_{n-1,n} &= u_{ni} - v_{n-1,i} + v_{n,n-1}, & 1 \leq i < n-1, \\
 u_{n-1,n} - v_{n-2,n-1} + v_{n-2,n} &= u_{n,n-1} - v_{n-2,n-1} + v_{n,n-2}, \\
 v_{i,i+1} - v_{i,i+2} - v_{i+1,i+3} + v_{i+2,i+3} &= v_{i+1,i} - v_{i+2,i} - v_{i+3,i+1} + v_{i+3,i+2}, & 1 \leq i < n-2, \\
 v_{ij} - v_{i,j+1} - v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1} &= v_{ji} - v_{j+1,i} - v_{j,i+1} + v_{j+1,i+1}, & 1 \leq i < j-1, j < n,
 \end{aligned} \tag{3}$$

эквивалентна системе (2) и линейно независима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейная независимость уравнений системы устанавливается по ее матрице, которая при подходящем выборе порядка во множестве координат имеет ступенчатый вид.

Докажем теперь эквивалентность систем (2) и (3). Во-первых, вычитая

$$u_{i,i+3} - v_{i,i+1} + v_{i+1,i+3} = u_{i+3,i} - v_{i+1,i} + v_{i+3,i+1}$$

из

$$u_{i,i+3} - v_{i,i+2} + v_{i+2,i+3} = u_{i+3,i} - v_{i+2,i} + v_{i+3,i+2},$$

получим уравнение

$$v_{i,i+1} - v_{i,i+2} - v_{i+1,i+3} + v_{i+2,i+3} = v_{i+1,i} - v_{i+2,i} - v_{i+3,i+1} + v_{i+3,i+2}.$$

Точно также разность уравнений

$$u_{i,i+1} - v_{ij} + v_{i+1,j} = u_{i+1,i} - v_{ji} + v_{j,i+1}$$

и

$$u_{i,i+1} - v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1} = u_{i+1,i} - v_{j+1,i} + v_{j+1,i+1}$$

дает уравнение

$$v_{ij} - v_{i,j+1} - v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1} = v_{ji} - v_{j+1,i} - v_{j,i+1} + v_{j+1,i+1}.$$

Таким образом, каждое уравнение системы (3) является линейной комбинацией уравнений системы (2).

Далее, уравнение

$$u_{ij} - u_{ik} + u_{jk} = u_{ji} - u_{ki} + u_{kj}$$

является разностью суммы уравнений

$$\begin{aligned}
 u_{ij} - v_{ik} + v_{jk} &= u_{ji} - v_{ki} + v_{kj}, \\
 u_{jk} - v_{ij} + v_{ik} &= u_{kj} - v_{ji} + v_{ki}
 \end{aligned}$$

и уравнения

$$u_{ik} - v_{ij} + v_{jk} = u_{ki} - v_{ji} + v_{kj}.$$

Каждое из последних уравнений можно получить из уравнений системы (3). Например, уравнение

$$u_{ij} - v_{i,j+2} + v_{j,j+2} = u_{ji} - v_{j+2,i} + v_{j+2,j}$$

получается сложением уравнений

$$u_{ij} - v_{i,j+1} + v_{j,j+1} = u_{ji} - v_{j+1,i} + v_{j+1,j},$$

$$v_{i,j+1} - v_{i,j+2} - v_{i+1,j+1} + v_{i+1,j+2} = v_{j+1,i} - v_{j+2,i} - v_{j+1,i+1} + v_{j+2,i+1},$$

$$v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j+2} - v_{i+2,j+1} + v_{i+2,j+2} = v_{j+1,i+1} - v_{j+2,i+1} - v_{j+1,i+2} + v_{j+2,i+2},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$v_{j-1,j+1} - v_{j-1,j+2} - v_{j,j+1} + v_{j,j+2} = v_{j+1,j-1} - v_{j+2,j-1} - v_{j+1,j} + v_{j+2,j}.$$

Аналогичные рассуждения проходят и для остальных уравнений системы, что завершает доказательство леммы.

Доказанная лемма позволяет вычислить размерность многообразия Бете для системы корней типа D_n . Так как количество уравнений системы (3) равно $n(n-2)$, то

$$\dim M_B(D_n) = n^2.$$

В результате доказана

ТЕОРЕМА 2. *Многообразие Бете $M_B(D_n)$ для системы корней типа D_n представляет плоскость, которая определяется системой уравнений (3) на множестве*

$$\tilde{X}_D = \mathbb{C}^{2n(n-1)} \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{u_{ij} - u_{ji} = 0, v_{ij} - v_{ji} = 0\}.$$

Размерность многообразия равна

$$\dim M_B(D_n) = n^2.$$

3. Случай В. В системе типа B_n , $n \geq 2$, положительными корнями относительно базиса $\alpha_{k-1,k} = e_{k-1} - e_k$, $1 \leq k \leq n$, $\gamma_n = e_n$ являются следующие векторы пространства $V = \mathbb{R}^n$: $\alpha_{ij} = e_i - e_j$, $\beta_{ij} = e_i + e_j$, $\gamma_k = e_k$, где $1 \leq i < j \leq n$ и $1 \leq k \leq n$. Всего корней $2n^2$, а билинейная симметрическая форма связана со стандартным скалярным произведением формулой [4]

$$F_{B_n}(x, y) = \frac{(x | y)}{4n - 2}.$$

Отражения относительно корней α_{ij} , β_{ij} и γ_i обозначим символами s_{ij} , σ_{ij} и τ_i соответственно.

Структура системы корней типа B_n показывает, что все результаты, полученные в предыдущем пункте, останутся верными и здесь. Поэтому система, описывающая многообразие $M_B(B_n)$, будет состоять из уравнений, определяющих $M_B(D_n)$, и уравнений, отвечающих произведениям вида $s_{ij}\tau_i$ и $\sigma_{ij}\tau_i$.

Отражение относительно корня τ_i действует на V сменой знака i -й координаты вектора. Из этого вытекает невозможность продолжения следующей цепочки равенств:

$$s_{ij}\tau_i = \tau_j s_{ij} = \sigma_{ij}\tau_j = \tau_i \sigma_{ij},$$

когда $1 \leq i < j \leq n$.

Основное отличие от уже рассмотренных случаев состоит в том, что уравнения, составленные по таким элементам группы Вейля, не будут линейными. Используя обозначения координат из D -случая, и вводя дополнительные координаты w_i и w_{-i} , которые соответствуют корням τ_i и $-\tau_i$, можно показать, что эти уравнения на множестве

$$\tilde{X}_{B_n} = \mathbb{C}^{2n^2} \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{u_{ij} - u_{ji} = 0, v_{ij} - v_{ji} = 0, w_i - w_{-i} = 0\}$$

запишутся в виде

$$(u_{ij} - u_{ji})(w_i - w_{-i} + w_j - w_{-j}) = (v_{ij} - v_{ji})(w_i - w_{-i} - w_j + w_{-j}). \quad (4)$$

Можно считать, что эта система состоит из линейных уравнений относительно w_i и w_{-i} , коэффициенты которой являются параметрами. В результате, ранг этой системы является функцией переменных u_{ij} и v_{ij} .

ЛЕММА. Если неизвестные u_{ij} и v_{ij} являются решениями системы (2), то ранг системы (4) постоянен и равен $n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие обозначения:

$$a_{ij} = u_{ij} - u_{ji} - v_{ij} + v_{ji}, \quad b_{ij} = u_{ij} - u_{ji} + v_{ij} - v_{ji}, \quad c_i = w_i - w_{-i}.$$

В силу того, что переменные u_{ij} и v_{ij} являются решениями системы (2), справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} b_{12} &= b_{13} = b_{14} = \dots = b_{1n}, \\ a_{12} &= -b_{23} = -b_{24} = \dots = -b_{2n}, \\ a_{13} &= a_{23} = -b_{34} = \dots = -b_{3n}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{1n} &= a_{2n} = a_{3n} = \dots = a_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Ранг системы (4) совпадает с рангом системы

$$a_{ij}c_i + b_{ij}c_j = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Утверждение леммы вытекает из указанных соотношений и того, что a_{ij} и b_{ij} не могут быть равными нулю.

Из леммы следует, что размерность многообразия $M_B(B_n)$ равна

$$\dim M_B(B_n) = n^2 + n + 1.$$

ПРИМЕР. Для системы корней B_3 матрица системы уравнений (4) в обозначениях последней леммы имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{12} & b_{12} & 0 \\ a_{13} & 0 & b_{12} \\ 0 & a_{13} & -a_{12} \end{pmatrix}.$$

Ее ранг равен 2.

В результате справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. Многообразие Бете $M_B(B_n)$, ассоциированное с системой корней типа B_n , является поверхностью на множестве

$$\tilde{X}_{B_n} = \mathbb{C}^{2n^2} \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{u_{ij} - u_{ji} = 0, v_{ij} - v_{ji} = 0, w_i - w_{-i} = 0\}$$

и определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} u_{ij} - v_{i,j+1} + v_{j,j+1} &= u_{ji} - v_{j+1,i} + v_{j+1,j}, & 1 \leq i < j < n, \\ u_{in} - v_{i,n-1} + v_{n-1,n} &= u_{ni} - v_{n-1,i} + v_{n,n-1}, & 1 \leq i < n-1, \\ u_{n-1,n} - v_{n-2,n-1} + v_{n-2,n} &= u_{n,n-1} - v_{n-2,n-1} + v_{n,n-2}, \\ v_{i,i+1} - v_{i,i+2} - v_{i+1,i+3} + v_{i+2,i+3} &= v_{i+1,i} - v_{i+2,i} - v_{i+3,i+1} + v_{i+3,i+2}, & 1 \leq i < n-2, \\ v_{ij} - v_{i,j+1} - v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1} &= v_{ji} - v_{j+1,i} - v_{j,i+1} + v_{j+1,i+1}, & 1 \leq i < j-1, j < n, \\ (u_{ij} - u_{ji})(w_i - w_{-i} + w_j - w_{-j}) &= (v_{ij} - v_{ji})(w_i - w_{-i} - w_j + w_{-j}), & 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

Размерность многообразия $M_B(B_n)$ равна

$$\dim M_B(B_n) = n^2 + n + 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Случай системы корней типа C_n не требует отдельного рассмотрения. Так как она изоморфна системе корней типа B_n [2], [3], многообразие $M_B(C_n)$ будет описываться той же системой уравнений, что и $M_B(B_n)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. A. Golubeva V. P. Leksin, “Heisenberg–Weyl operator algebras associated to the models of Calogero–Sutherland type and isomorphism of rational and trigonometric models”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **98:3** (2000), 291–318.
- [2] Дж. Хамфрис, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М., 2003.
- [3] Ж.-П. Серр, *Алгебры Ли и группы Ли*, Мир, М., 1969.
- [4] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней.*, Мир, М., 1972.

В. В. Мещеряков

Коломенский государственный педагогический институт

E-mail: metcherykov@mail.ru

Поступило

23.03.2007