Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Степанец, Экстремальные задачи для числовых рядов, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 5, 736–755

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4086>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:16:09

Экстремальные задачи для числовых рядов

А. И. Степанец

В работе рассматриваются экстремальные задачи для числовых положительных рядов. Члены этих рядов представляют собой попарные произведения элементов последовательностей, одна из которых фиксирована, а другая варьируется на заданном множестве последовательностей. Получены точные решения ряда таких задач. В качестве возможных приложений полученных результатов в работе найдены решения некоторых экстремальных задач, связанных с наилучшими n -членными приближениями периодических функций.

Библиография: 17 названий.

В работах автора и его последователей (см. [1]–[14]) рассматривается одна из возможных моделей построения теории приближений в произвольных (не обязательно наперед нормированных) линейных пространствах $\mathfrak{X}$. При этом в случае, когда $\mathfrak{X}$ сепарабельно, экстремальные задачи теории приближений в классической их постановке приводят к необходимости решения определенных экстремальных задач для числовых положительных рядов. Члены этих рядов представляют собой попарные произведения элементов последовательностей, одна из которых фиксирована, а другая варьируется на заданном множестве последовательностей. Такие задачи для числовых рядов зачастую решаются в явном и законченном виде. Вследствие этого удается получать и точные решения соответствующих экстремальных задач в исходных линейных пространствах.

В настоящей работе дано решение нового класса задач для числовых рядов, включающего в себя и ранее рассматриваемые экстремальные задачи. Новизна состоит в том, что изучаемые здесь функционалы имеют более сложную природу, что в конечном счете позволяет применять полученные результаты в более общих ситуациях. В качестве возможных приложений этих результатов в работе найдены решения ряда экстремальных задач, связанных с наилучшими n -членными приближениями периодических функций.

Пусть $\Delta = \{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ – фиксированное разбиение множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел на непересекающиеся подмножества Δ_i , $i \in \mathbb{N}$, содержащие n_i натуральных чисел, обладающее тем свойством, что любое натуральное число содержится в каждом объединении

$$\mathcal{D}_l = \bigcup_{i=1}^l \Delta_i, \quad l = 1, 2, \dots,$$

при всех достаточно больших l . В дальнейшем такие разбиения называются *допустимыми*.

Пусть, далее, $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность положительных чисел, $\alpha_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0 \quad (1)$$

(в таком случае будем записывать $\alpha \in A$) и $\mathcal{M}$ – множество всех последовательностей $m = \{m_k\}_{k=1}^\infty$, $m_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, для которых

$$|m| = \sum_{k=1}^\infty m_k \leq 1. \quad (2)$$

При данных $\alpha \in A$, $m \in \mathcal{M}$ и $r > 0$ положим

$$F_n(\alpha, m, r)_\Delta = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k m_k^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{i \in \gamma_n} \sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k m_k^r, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

где Γ_n – множество всех наборов γ_n из n различных натуральных чисел, и при условиях, обеспечивающих сходимость ряда в (3), рассмотрим величину

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r)_\Delta = \sup_{m \in \mathcal{M}} F_n(\alpha, m, r)_\Delta. \quad (4)$$

Ближайшей целью настоящей работы является нахождение точного значения величины (4). Сразу отметим, что существование этой величины и способы ее нахождения существенно зависят от значения параметра r : при $r \in (0, 1)$ и $r \geq 1$ они различны. Поэтому сначала остановимся на более простом случае $r \geq 1$ и докажем, что в принятых здесь обозначениях справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha \in A$ и $r \geq 1$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r)_\Delta = (l^* - n) \left(\sum_{\nu=1}^{l^*} \alpha_{k_{i_\nu}}^{-1/r} \right)^{-r},$$

в котором $\alpha_{k_{i_\nu}}$, $\nu = 1, 2, \dots$, – значения α_{k_i} ,

$$\alpha_{k_i} = \max_{k \in \Delta_i} \alpha_k, \quad (5)$$

перенумерованные в невозрастающем порядке, l^* – натуральное число, выбранное из условия

$$\sup_{l > n} (l - n) \left(\sum_{\nu=1}^l \alpha_{k_{i_\nu}}^{-1/r} \right)^{-r} = (l^* - n) \left(\sum_{\nu=1}^{l^*} \alpha_{k_{i_\nu}}^{-1/r} \right)^{-r}. \quad (6)$$

Такое число l^* всегда существует.

Точная верхняя грань в (4) реализуется последовательностью $m' = \{m'_k\}_{k=1}^\infty$ из $\mathcal{M}$, у которой

$$m'_k = \begin{cases} \alpha_{k_{i_\nu}}^{-1/r} \left(\sum_{j=1}^{l^*} \alpha_{k_{i_j}}^{-1/r} \right)^{-1}, & k = k_{i_\nu}, \nu = 1, 2, \dots, l^*, \\ 0 & \text{при остальных значениях } k. \end{cases} \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что условия (1) и (2) в рассматриваемом случае гарантируют сходимость ряда в (3) и, тем самым, обеспечивают корректность постановки задачи. Переходя непосредственно к доказательству теоремы, заметим, что в силу (1) и (2)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k m_k^r = 0, \quad (8)$$

поэтому, найдется, по крайней мере, один набор $\gamma_n^* \in \Gamma_n$, для которого

$$\sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{i \in \gamma_n} \sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k m_k^r = \sum_{i \in \gamma_n^*} \sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k m_k^r \stackrel{\text{df}}{=} s. \quad (9)$$

Пусть при $i \in \gamma_n^*$

$$\sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k m_k^r = s_i \quad (10)$$

и

$$\bar{s} = \min_{i \in \gamma_n^*} s_i. \quad (11)$$

Через $\bar{m} = \{\bar{m}_k\}_{k=1}^\infty$ обозначим последовательность, которая строится следующим образом.

Если для $i \in \gamma_n^*$ $s_i > \bar{s}$, то положим $\bar{m}_k = m'_k$, $k \in \Delta_i$, где числа $m'_k, m'_k \geq 0$, выбраны так, что

$$\sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k m_k'^r = \bar{s} \quad \text{и} \quad \sum_{k \in \Delta_i} m'_k \leq \sum_{k \in \Delta_i} m_k, \quad i \in \gamma_n^*.$$

При остальных значениях k положим $\bar{m}_k = m_k$. В таком случае будем иметь

$$\sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k \bar{m}_k^r = \bar{s}, \quad i \in \gamma_n^*, \quad (12)$$

$$\sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k \bar{m}_k^r \leq \bar{s}, \quad i \notin \gamma_n^*, \quad (13)$$

и

$$|\bar{m}| = \sum_{k \in \Delta_i}^\infty \bar{m}_k \leq 1. \quad (14)$$

Поэтому

$$F_n(\alpha, m, r)_\Delta = F_n(\alpha, \bar{m}, r)_\Delta \quad \text{и} \quad \bar{m} \in \mathcal{M}. \quad (15)$$

Далее положим

$$\sigma = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \bar{m}_k^r = \sum_{i=1}^\infty A_i(\alpha, \bar{m})_\Delta, \quad A_i(\alpha, \bar{m})_\Delta = \sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k \bar{m}_k^r, \quad (16)$$

и

$$M_i = \sum_{k \in \Delta_i} \bar{m}_k. \quad (17)$$

Ясно, что в таком случае

$$\sum_{i=1}^{\infty} M_i = |\overline{m}|. \quad (18)$$

Теперь выберем числа k_i из условия (5) и построим последовательность $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом. Если при данном $i \in \mathbb{N}$ $\alpha_{k_i} M_i^r \leq \overline{s}$, то полагаем $\mu_i = M_i$; если же $\alpha_{k_i} M_i^r > \overline{s}$, то положим $\mu_i = \overline{M}_i$, где значение $\overline{M}_i$ выбрано так, что $\alpha_{k_i} \overline{M}_i^r = \overline{s}$.

Этим последовательность μ определена во всех точках k_i , $i \in \mathbb{N}$. В оставшихся точках k положим $\mu_k \equiv 0$.

Последовательность μ обладает тем свойством, что

$$A_i(\alpha, \mu)_{\Delta} = \alpha_{k_i} \overline{M}_i^r \leq \overline{s}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

и

$$|\mu| = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \leq |\overline{m}|.$$

Заметим теперь, что если $r \geq 1$, то для любых чисел a_1 , a_2 , x_1 и x_2 , удовлетворяющих условиям $a_1 \geq a_2 > 0$, $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$, выполняется неравенство

$$a_1 x_1^r + a_2 x_2^r \leq a_1 (x_1 + x_2)^r.$$

Поэтому при всех $i \in \mathbb{N}$

$$A_i(\alpha, \overline{m})_{\Delta} = \sum_{k \in \Delta_{n_i}} \alpha_k \overline{m}_k^r \leq \alpha_{k_i} \overline{M}_i^r = \alpha_{k_i} \mu_{k_i}^r \quad (20)$$

Действительно, если i такое, что $\alpha_{k_i} M_i^r \leq \overline{s}$, то

$$A_i(\alpha, \overline{m})_{\Delta} \leq \alpha_{k_i} \sum_{k \in \Delta_{n_i}} \overline{m}_k^r = \alpha_{k_i} M_i^r = \alpha_{k_i} \overline{M}_i^r;$$

если же $\alpha_{k_i} M_i^r > \overline{s}$, то с учетом (12) и (13) имеем

$$A_i(\alpha, \overline{m})_{\Delta} \leq \overline{s} = \alpha_{k_i} \overline{M}_i^r.$$

Согласно (16) и (20)

$$\sigma \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu_k^r$$

и в то же время выполняется соотношение (19). Поэтому

$$F_n(\alpha, \overline{m}, r)_{\Delta} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu_k^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{i \in \Gamma_n} \sum_{k \in \Delta_{n_i}} \alpha_k \mu_k^r = F_n(\alpha, \mu, r)_{\Delta}$$

или, с учетом (15),

$$F_n(\alpha, \overline{m}, r)_{\Delta} \leq F_n(\alpha, \mu, r)_{\Delta}. \quad (21)$$

Таким образом показано, что для любой последовательности $m \in \mathcal{M}$ можно указать последовательность $\mu \in \mathcal{M}$ вида

$$\mu_k = \begin{cases} \nu_k, & k = k_i, \\ 0, & \text{при остальных значениях } k, \end{cases} \quad (22)$$

где ν_k – некоторые неотрицательные числа, для которой выполняется соотношение (21).

Поэтому, если обозначим через $\mathcal{M}'$ подмножество из $\mathcal{M}$ последовательностей вида (22), то вследствие (21) будем иметь

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r)_\Delta \leq \sup_{m \in \mathcal{M}'} F_n(\alpha, m, r)_\Delta. \quad (23)$$

Если $m \in \mathcal{M}'$, то

$$F_n(\alpha, m, r)_\Delta = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{k_i} \mu_{k_i}^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{i \in \gamma_n} \alpha_{k_i} \mu_{k_i}^r = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{k_{i_\nu}} \mu_{k_{i_\nu}}^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{\nu \in \gamma_n} \alpha_{k_{i_\nu}} \mu_{k_{i_\nu}}^r.$$

Поэтому согласно (23)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(\alpha, r)_\Delta &\leq \sup_{m \in \mathcal{M}'} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{k_{i_\nu}} \mu_{k_{i_\nu}}^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{\nu \in \gamma_n} \alpha_{k_{i_\nu}} \mu_{k_{i_\nu}}^r \right) \stackrel{\text{df}}{=} e_{n,r}(a), \\ a &= \{a_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}, \quad a_\nu = \alpha_{k_{i_\nu}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для нахождения значений правой части (24) воспользуемся следующим утверждением, доказанным в [3].

ЛЕММА 1. Пусть $a = \{a_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ – невозрастающая последовательность положительных чисел, для которой

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = 0,$$

и r – любое число, $r \geq 1$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$

$$e_{n,r}(a) = \sup_{x \in \mathcal{M}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x_\nu^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k x_k^r \right) = (l^* - n) \left(\sum_{\nu=1}^{l^*} a_\nu^{-1/r} \right)^{-r}. \quad (25)$$

Число l^* определяется равенством

$$\sup_{l > n} (l - n) \left(\sum_{\nu=1}^l a_\nu^{-1/r} \right)^{-r} = (l^* - n) \left(\sum_{\nu=1}^{l^*} a_\nu^{-1/r} \right)^{-r}.$$

Такое число l^* всегда существует.

Верхняя грань в (25) реализуется последовательностью $x' = \{x'_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, у которой

$$x'_\nu = \begin{cases} a_\nu^{-1/r} \left(\sum_{i=1}^{l^*} a_i^{-1/r} \right)^{-1}, & \nu = 1, 2, \dots, l^*, \\ 0, & \nu > l^*. \end{cases}$$

Числа $a_\nu = \alpha_{k_{i_\nu}}$, $\nu \in \mathbb{N}$, удовлетворяют требованиям леммы, поэтому, применяя лемму, приходим к выводу, что

$$e_{n,r}(\alpha) = (l^* - n) \left(\sum_{k=1}^{l^*} \alpha_{k_{i_\nu}}^{-1/r} \right)^{-r}, \quad (26)$$

где число l^* определяется равенством (6) и верхняя грань в (24) достигается для последовательности (7).

Таким образом, согласно (24) и (26)

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r)_\Delta \leq (l^* - n) \left(\sum_{k=1}^{l^*} \alpha_{k_{i_\nu}}^{-1/r} \right)^{-r},$$

и для завершения доказательства этой теоремы остается показать, что

$$F_n(\alpha, m', r)_\Delta = (l^* - n) \left(\sum_{k=1}^{l^*} \alpha_{k_{i_\nu}}^{-1/r} \right)^{-r}, \quad (27)$$

и что $m' \in \mathcal{M}$. Последнее соотношение очевидно, а равенство (27) следует из (3) с учетом того, что при $\nu = 1, l^*$

$$\alpha_{k_{i_\nu}} m'^r_{k_{i_\nu}} = \left(\sum_{j=1}^{l^*} \alpha_{k_{i_j}}^{-1/r} \right)^{-1}.$$

Теорема доказана.

Случай $r \in (0, 1)$. В этом случае условия (1) и (2) недостаточны для сходимости ряда в (3). На этот раз будем предполагать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{1/(1-r)} < \infty. \quad (28)$$

Это условие вместе с (2) гарантирует сходимость ряда в (3) и является, в то же время, и необходимым для сходимости таких рядов на множестве $\mathcal{M}$. Подмножество последовательностей $\alpha \in A$, для которых выполняется (28), обозначим через A_r .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $r \in (0, 1)$ и $\alpha \in A_r$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r)_\Delta = \bar{\sigma}_1^{-r}(s) [(s - n)^{1/(1-r)} + \bar{\sigma}_1^{r/(1-r)}(s) \bar{\sigma}_2(s)]^{1-r},$$

где

$$\bar{\sigma}_1(s) = \sum_{\nu=1}^s a_{i_\nu}^{-1/r}, \quad \bar{\sigma}_2(s) = \sum_{\nu=s+1}^{\infty} a_{i_\nu}^{1/(1-r)}, \quad (29)$$

числа a_{i_ν} , $\nu = 1, 2, \dots$, — значения a_i ,

$$a_i = \left(\sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k^{1/(1-r)} \right)^{1-r}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

перенумерованные в невозрастающем порядке; число s выбрано из условия

$$a_{i_s}^{-1/r} \leq \frac{\bar{\sigma}_1(s)}{s - n} < a_{i_{s+1}}^{-1/r}, \quad s > n; \quad (30)$$

такое число s всегда существует и единственно.

Точная верхняя грань в (4) реализуется последовательностью $m' = \{m'_k\}_{k=1}^\infty$ из $\mathcal{M}$, для которой

$$m'_k = \mu_{i_\nu}^* \alpha_k^{1/(1-r)} a_{i_\nu}^{-1/(1-r)}, \quad k \in \Delta_{i_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (31)$$

где

$$\mu_{i_\nu}^* = \begin{cases} \left(\frac{\bar{t}_s}{a_{i_\nu}} \right)^{1/r}, & \nu = 1, 2, \dots, s, \\ \frac{1 - \bar{t}_s^{1/r} \bar{\sigma}_1(s)}{\bar{\sigma}_2(s)} a_{i_\nu}^{1/(1-r)}, & \nu > s, \end{cases}$$

$$\bar{t}_s = \left(\bar{\sigma}_1(s) + \left(\frac{\bar{\sigma}_1(s)}{s - n} \right)^{1/(1-r)} \bar{\sigma}_2(s) \right)^{-r}.$$

Доказательство этой теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1. В частности, все рассуждения вплоть до получения равенства (18) могут остаться в силе. Действительно, согласно неравенству Гёльдера

$$\sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k m_k^r \leq \left(\sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k^{1/(1-r)} \right)^{1-r}.$$

Поэтому в силу (28) и в этом случае справедливо равенство (8) и, значит, так же найдется набор $\gamma_n^* \in \Gamma_n$, для которого справедливо (9). Определим, далее, числа s_i , $i \in \gamma^*$, и $\bar{s}$ согласно формулам (10) и (11) и, как и при доказательстве теоремы 1, построим последовательность $\bar{m} = \{\bar{m}_k\}_{k=1}^\infty$, для которой будут выполняться равенства (12)–(15). Будем также пользоваться обозначениями (16) и (17) и иметь в виду равенство (18).

Далее получим необходимые оценки величин $A_i(\alpha, \bar{m})_\Delta$. Для этого воспользуемся следующим утверждением.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$, $\mu_k \geq 0$ и

$$c_i = \sum_{k \in \Delta_i} \mu_k, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$A_i(\alpha, \mu)_\Delta = \sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k \mu_k^r \leq A_i(\alpha, \bar{\mu})_\Delta = \sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k \bar{\mu}_k^r,$$

где

$$\bar{\mu}_k = \bar{\mu}_k^{(i)} = c_i \alpha_k^{1/(1-r)} \left(\sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k^{1/(1-r)} \right), \quad k \in \Delta_i, \quad (32)$$

так что

$$A_i(\alpha, \bar{\mu})_\Delta = a_i c_i^r, \quad a_i = \left(\sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k^{1/(1-r)} \right)^{1-r}.$$

Доказательство этого утверждения следует из неравенства Гёльдера, поскольку

$$\sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k \mu_k^r \leq a_i c_i^r,$$

$$A_i(\alpha, \bar{\mu})_\Delta = a_i c_i^r.$$

Утверждение 1 означает, что наилучшее в смысле величины $A_i(\alpha, \mu)_\Delta$ распределение данной массы c_i на промежутке Δ_i определяется формулой (32). Руководствуясь этим фактом, получим необходимые оценки величин $A_i(\alpha, \overline{m})_\Delta$, задающихся равенством (20).

Если для данного i будет $a_i M_i^r \leq \bar{s}$, то положим $\overline{M}_i = M_i$; если же окажется, что $a_i M_i^r > \bar{s}$, то через $\overline{M}_i$ обозначим число, для которого $a_i \overline{M}_i^r = \bar{s}$. В таком случае всегда $\overline{M}_i \leq M_i$ и, значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{M}_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} M_i = |\overline{m}| \leq 1$$

и в то же время

$$A_i(\alpha, \overline{m})_\Delta \leq a_i \overline{M}_i^r, \quad (33)$$

поэтому и

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{m}_k^r \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i \overline{M}_i^r. \quad (34)$$

Рассмотрим выражение

$$\sum(a, \overline{M}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \overline{M}_i^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{i \in \gamma_n} a_i \overline{M}_i^r. \quad (35)$$

Из (15), (34) и (33) заключаем, что

$$F_n(\alpha, m, r)_\Delta \leq \sum(a, \overline{M})$$

и, следовательно,

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r)_\Delta = \sup_{m \in \mathcal{M}} F_n(\alpha, m, r)_\Delta \leq \sup_{|\overline{M}| \leq 1} \sum(a, \overline{M}), \quad |\overline{M}| = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{M}_i, \quad \overline{M}_i \geq 0.$$

В силу (35)

$$\begin{aligned} \sup_{|\overline{M}| \leq 1} \sum(a, \overline{M}) &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu_i^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{i \in \gamma_n} a_i \mu_i^r \right) \\ &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{i_\nu} \mu_{i_\nu}^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{\nu \in \gamma_n} a_{i_\nu} \mu_{i_\nu}^r \right) \stackrel{\text{df}}{=} e'_{n,r}(a), \end{aligned} \quad (36)$$

поэтому

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r) \leq e'_{n,r}(a). \quad (37)$$

Для нахождения значения $e'_{n,r}(a)$ воспользуемся следующим утверждением, доказанным в [5; § 11.7] (см. также [15]).

ЛЕММА 2. Пусть при данном $r \in (0, 1)$ $\overline{A}_r$ обозначает подмножество невозрастающих последовательностей из $\alpha \in A_r$ и $m \in \mathcal{M}$. Пусть, далее,

$$F_{n,r}(\alpha, m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^r, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$e_{n,r}(\alpha) = \sup_{m \in \mathcal{M}} F_{n,r}(\alpha) = \sigma_1^{-r}(s) [(s-n)^{1/(1-r)} + \sigma_1^{r/(1-r)}(s) \sigma_2(s)]^{1-r}, \quad (38)$$

где

$$\sigma_1(s) = \sum_{k=1}^s \alpha_k^{-1/r}, \quad \sigma_2(s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} \alpha_k^{1/(1-r)}, \quad (39)$$

число s выбрано из условия

$$\alpha_s^{-1/r} \leq \frac{\sigma_1(s)}{s-n} < \alpha_{s+1}^{-1/r}, \quad s > n. \quad (40)$$

Такое число s всегда существует и единственно. Верхняя грань в соотношении (38) реализуется последовательностью $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $\mathcal{M}$, у которой

$$m_k = \begin{cases} \left(\frac{t_s}{\alpha_k} \right)^{1/r}, & k = 1, 2, \dots, s, \\ \frac{1 - t_s^{1/r} \sigma_1(s)}{\sigma_2(s)} \alpha_k^{1/(1-r)}, & k > s, \end{cases} \quad (41)$$

$$t_s = \left(\sigma_1(s) + \left(\frac{\sigma_1(s)}{s-n} \right)^{1/(1-r)} \sigma_2(s) \right)^{-r}.$$

Числа a_{i_ν} , $\nu \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условиям леммы 2. Поэтому приходим к заключению, что

$$e'_{n,r}(a) = \bar{\sigma}_1^{-r}(s) [(s-n)^{1/(1-r)} + \bar{\sigma}_1^{r/(1-r)}(s) \bar{\sigma}_2(s)]^{1-r}, \quad (42)$$

где величины $\bar{\sigma}_1(s)$ и $\bar{\sigma}_2(s)$ определяются равенствами (29), а число s выбрано из условия (30). При этом верхняя грань в соотношении (36) реализуется последовательностью $\{\mu_{i_\nu}^*\}_{\nu=1}^{\infty}$, в которой

$$\mu_{i_\nu}^* = \begin{cases} \left(\frac{\bar{t}_s}{a_{i_\nu}} \right)^{1/r}, & \nu = 1, 2, \dots, s, \\ \frac{1 - \bar{t}_s^{1/r} \bar{\sigma}_1(s)}{\bar{\sigma}_2(s)} a_{i_\nu}^{1/(1-r)}, & \nu > s, \end{cases} \quad (43)$$

$$\bar{t}_s = \left(\bar{\sigma}_1(s) + \left(\frac{\bar{\sigma}_1(s)}{s-n} \right)^{1/(1-r)} \bar{\sigma}_2(s) \right)^{-r}.$$

Объединяя соотношения (37) и (42), получаем

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r) \leq \bar{\sigma}_1^{-r}(s) [(s-n)^{1/(1-r)} + \bar{\sigma}_1^{r/(1-r)}(s) \bar{\sigma}_2(s)]^{-r}, \quad (44)$$

и теперь для завершения доказательства теоремы остается показать, что значение $F_n(\alpha, m', r)_\Delta$ совпадает с правой частью (46), и что $m' \in \mathcal{M}$.

Имеем

$$\begin{aligned} F_n(\alpha, m', r)_\Delta &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i(\alpha, m')_\Delta - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{i \in \Gamma_n} A_i(\alpha, m')_\Delta \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{i_\nu}(\alpha, m')_\Delta - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{\nu \in \Gamma_n} A_{i_\nu}(\alpha, m')_\Delta. \end{aligned} \quad (45)$$

На промежутках Δ_{i_ν} значения m'_k определяются формулой (31). Следовательно,

$$A_{i_\nu}(\alpha, m')_\Delta = \sum_{k \in \Delta_{i_\nu}} \alpha_k m'_k = \mu_{i_\nu}^{*r} a_{i_\nu}^{-r/(1-r)} \sum_{k \in \Delta_{i_\nu}} \alpha_k^{1/(1-r)} = a_{i_\nu} \mu_{i_\nu}^{*r},$$

Поэтому согласно (45)

$$F_n(\alpha, m', r)_\Delta = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{i_\nu} \mu_{i_\nu}^{*r} - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{\nu \in \gamma_n} a_{i_\nu} \mu_{i_\nu}^{*r}.$$

Видим, что $F_n(\alpha, m', r)_\Delta$ совпадает со значением величины, стоящей под знаком точной верхней грани правой части (36) при экстремальном значении μ_{i_ν} , равном $\mu_{i_\nu}^*$, задаваемом формулой (43) и поэтому равно правой части (44). Тот факт, что $|m'| = 1$ проверяется непосредственным подсчетом. Теорема доказана.

Отметим несколько частных случаев теорем 1 и 2. При этом будем дополнительно предполагать, что последовательности α , входящие в определение функционалов $F_n(\alpha, m, r)_\Delta$ из [3], являются невозрастающими ($\alpha \in \bar{A}$, или $\alpha \in \bar{A}_r$).

1. Пусть, сначала $n_i = 1$, $i \in \mathbb{N}$, и $\Delta_i = \{i\}$, $i = 1, 2, \dots$. В этом случае функционал $F_n(\alpha, m, r)_\Delta$ имеет вид

$$F_n(\alpha, m, r)_\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^r$$

и тогда утверждение теоремы 1 в точности совпадают с леммой 1, а утверждение теоремы 2 – с леммой 2.

2. Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$, $n_i = n$, $i \in \mathbb{N}$, и $\Delta_i = \{(i-1)n+1, (i-1)n+2, \dots, in\}$, т.е. Δ_i – равные отрезки натуральных чисел, а Γ_i – семейство одноэлементных множеств $\gamma_j = \{j\}$, $j \in \mathbb{N}$.

В этом случае разбиение Δ обозначим через $\Delta^{(n)}$. И тогда функционал (3) имеет вид

$$F_1(\alpha, m, r)_{\Delta^{(n)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r - \sup_{\Delta_i} \sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k m_k^r,$$

$$\alpha_{k_i} = \max_{k \in \Delta_i} \alpha_k = \alpha_{(i-1)n+1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Следовательно, из теоремы 1 в этом случае получается

ТЕОРЕМА 1'. Пусть $\alpha \in \bar{A}$ и $r \geq 1$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_1(\alpha, r)_{\Delta^{(n)}} = (l^* - 1) \left(\sum_{i=1}^{l^*} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r} \right)^{-r},$$

l^* – натуральное число, для которого

$$\sup_{l>1} (l-1) \left(\sum_{i=1}^l \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r} \right)^{-r} = (l^* - 1) \left(\sum_{i=1}^{l^*} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r} \right)^{-r}.$$

Такое число l^* существует и единственно. Экстремальная последовательность задается формулой (7) при $\alpha_{k_i} = \alpha_{(i-1)n+1}$, $i = 1, 2, \dots$.

Это утверждение было доказано ранее в [6].

Чтобы получить из теоремы 2 аналог теоремы 1', заметим, что в рассматриваемом случае числа

$$a_i = \left(\sum_{k=(i-1)n+1}^{in} \alpha_k^{1/(1-r)} \right)^{1-r}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (46)$$

не возрастают и, поэтому, $a_{i_\nu} = a_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$. Значит, при любом $s \in \mathbb{N}$

$$\bar{\sigma}_1(s) = \sum_{\nu=1}^s a_{i_\nu}^{-1/r} = \sum_{\nu=1}^s a_\nu^{-1/r} = \sum_{\nu=1}^s \left(\sum_{k=(\nu-1)n+1}^{\nu n} a_k^{1/(1-r)} \right)^{-(1-r)/r} \quad (46')$$

и

$$\bar{\sigma}_2(s) = \sum_{\nu=s+1}^{\infty} a_{i_\nu}^{1/(1-r)} = \sum_{\nu=s+1}^{\infty} \sum_{k=(\nu-1)n+1}^{\nu n} a_k^{1/(1-r)} = \sum_{k=sn+1}^{\infty} a_k^{1/(1-r)}. \quad (46'')$$

В качестве следствия из теоремы 2 вытекает

ТЕОРЕМА 2'. Пусть $r \in (0, 1)$ и $\alpha \in \bar{A}_r$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\mathcal{E}_1(\alpha, r)_{\Delta(n)} = \bar{\sigma}_1^{-r}(s) [(s-n)^{1/(1-r)} + \bar{\sigma}_1^{r/(1-r)}(s) \bar{\sigma}_2(s)]^{1-r},$$

в котором величины $\bar{\sigma}_1(s)$ и $\bar{\sigma}_2(s)$ определяются равенствами (46'), (46''); число s выбрано из условия

$$a_s^{-1/r} \leq \frac{\bar{\sigma}_1(s)}{s-1} < a_{s+1}^{-1/r}, \quad s > 1;$$

такое число s всегда существует и единственно. Экстремальная последовательность $m' = \{m'_k\}_{k=1}^{\infty}$ задается формулой

$$m'_k = \mu_i^* \alpha_k^{1/(1-r)} a_i^{-1/(1-r)}, \quad (i-1)n+1 \leq k \leq in, \quad i = 1, 2, \dots,$$

в которой

$$\mu_i^* = \begin{cases} \left(\frac{\bar{t}_s}{a_i} \right)^{1/r}, & i = 1, 2, \dots, s, \\ \frac{1 - \bar{t}_s^{1/r} \bar{\sigma}_1(s)}{\bar{\sigma}_2(s)} a_i^{1/(1-r)}, & i > s, \end{cases}$$

$$\bar{t}_s = \left(\bar{\sigma}_1(s) + \left(\frac{\bar{\sigma}_1(s)}{s-1} \right)^{1/(1-r)} \bar{\sigma}_2(s) \right)^{-r}.$$

При данном $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ через $Q_{\mathcal{N}}$ обозначим множество пар (Δ, n) , где $n \in \mathbb{N}$, и Δ – разбиения множества $\mathbb{N}$, удовлетворяющих следующему условию:

$$\sup_{\gamma_n} \sum_{i \in \gamma_n} n_i \leq \mathcal{N}.$$

Предположим, что пара (Δ, n) принадлежит $Q_{\mathcal{N}}$. Положим

$$\sigma_n(\alpha, m, r)_{\Delta} = \sup_{\gamma_n} \sum_{i \in \gamma_n} \sum_{k \in \Delta_i} \alpha_k m_k^r.$$

В последней сумме имеется

$$N_{\gamma_n} = \sum_{i \in \gamma_n} n_i$$

слагаемых вида $\alpha_k m_k^r$, поэтому

$$\sigma_n(\alpha, m, r)_{\Delta} \leq \sup_{\gamma_{\mathcal{N}}} \sum_{k \in \gamma_{\mathcal{N}}} \alpha_k m_k^r.$$

Следовательно,

$$\sup_{m \in \mathcal{M}} F_n(\alpha, m, r)_{\Delta} \geq \sup_{m \in \mathcal{M}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r - \sup_{\gamma_{\mathcal{N}}} \sum_{k \in \gamma_{\mathcal{N}}} \alpha_k m_k^r \right),$$

т.е. для любой пары $(\Delta, n) \in Q_{\mathcal{N}}$ справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r)_{\Delta} \geq e_{\mathcal{N}, r}(\alpha), \quad (47)$$

где $e_{\mathcal{N}, r}(\alpha)$ – величина, определяемая при $r \geq 1$ равенством (25), а при $r \in (0, 1)$ – равенством (38).

Ясно, что $e_{\mathcal{N}, r}(\alpha) = \mathcal{E}_{\mathcal{N}}(\alpha, r)_{\Delta(1)}$, и что пара $(\Delta^{(1)}, \mathcal{N})$ принадлежит $Q_{\mathcal{N}}$. Поэтому из (47) заключаем, что

$$\inf_{(\Delta, n) \in Q_{\mathcal{N}}} \mathcal{E}_n(\alpha, r)_{\Delta} = \mathcal{E}_{\mathcal{N}}(\alpha, r)_{\Delta(1)} = e_{\mathcal{N}, r}(\alpha). \quad (48)$$

Таким образом доказано следующее утверждение

ТЕОРЕМА 3. Пусть при $r \geq 1$ $\alpha \in \bar{A}$ или при $r \in (0, 1)$ $\alpha \in \bar{A}_r$. Тогда при любом $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ справедливо равенство (48).

Укажем на некоторые из возможных приложений полученных результатов.

Пусть $L^0 = L^0(0, 2\pi)$ – пространство действительных 2π -периодических интегрируемых со средним значением на периоде равным нулю функций. Каждой функции $f \in L^0$ поставим в соответствие систему чисел $\hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, – ее коэффициентов Фурье по тригонометрической системе $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть, далее, $\mu = \{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ – некоторая система неотрицательных чисел, $\mu_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, и p – фиксированное число из промежутка $(0, \infty)$.

Положим

$$S^{p, \mu} = S^{p, \mu}(L^0) = \{f \in L^0 : \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k) \mu_{|k|}|^p < \infty\}.$$

Элементы $f, g \in L^0$ считаются тождественными, если при всех $k \in \mathbb{Z}$ $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$.

Для произвольных элементов $f, g \in L$ определим p, μ -расстояние между ними посредством равенства

$$\rho(f, g)_{p, \mu} \stackrel{\text{df}}{=} \|f - g\|_{p, \mu} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k) - \hat{g}(k)|^p \mu_{|k|}^p \right)^{1/p}.$$

Нулевым элементом множества $S^{p,\mu}$ называется элемент θ , для которого $\widehat{\theta}(k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Расстояние $\rho(\theta, f)_{p,\mu}$, $f \in S^{p,\mu}$, называется p, μ -нормой для f и обозначается через $\|f\|_{p,\mu}$. Таким образом, по определению

$$\|f\|_{p,\mu} = \rho(\theta, f)_{p,\mu} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k) \mu_{|k|}|^p \right)^{1/p}. \quad (49)$$

Ясно, что $S^{p,\mu}$ – линейное пространство. Если в системе μ все числа отличны от нуля, то равенство $\|x\|_{p,\mu} = 0$ возможно только при $f = \theta$. Отсюда следует, что при $p \geq 1$ и $\mu_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, функционал $\|\cdot\|_{p,\mu}$ удовлетворяет всем аксиомам нормы, а при $p \in (0, 1)$ – квазинормы. Поэтому, если $\mu_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, то при $p \geq 1$ $S^{p,\mu}$ – линейное нормированное пространство, а при $p \in (0, 1)$ – пространство с квазинормой.

Ясно также, что если $\mu_k \equiv 1$ и $p = 2$, то $S^{p,\mu}$ совпадает с гильбертовым пространством $L_2(0, 2\pi)$ функций, для которых

$$\int_0^{2\pi} f^2(t) dt < \infty.$$

И в общем случае пространства $S^{p,\mu}$ наследуют важнейшие свойства сепарабельных гильбертовых пространств – равенство Парсеваля в виде соотношения (49) и минимальное свойство частных сумм Фурье, которое формулируется следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\{g_\alpha\}$ – семейство ограниченных подмножеств множества $\mathbb{Z}$, зависящих от параметра α и таких, что любое число $k \in \mathbb{Z}$ принадлежит всем множествам g_α с достаточно большими значениями α .

Пусть, далее, $f \in S^{p,\mu}$, $p \in (0, \infty)$, и

$$S_\alpha(f) = S_{g_\alpha}(f) = \sum_{k \in g_\alpha} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

– частная сумма ряда Фурье $S[f]$ функции f , соответствующая множеству g_α . Тогда среди всех сумм вида

$$P_\alpha(x) = \sum_{k \in g_\alpha} c_k e^{ikx},$$

где c_k – некоторые числа, наименее уклоняется от f в пространстве $S^{p,\mu}$ частная сумма $S_\alpha(f)$, т.е.

$$\inf_{c_k} \|f - P_\alpha\|_{p,\mu} = \|f - S_\alpha(f)\|_{p,\mu}.$$

При этом

$$\|f - S_\alpha(f)\|_{p,\mu}^p = \|f\|_{p,\mu}^p - \sum_{k \in g_\alpha} |\widehat{f}(k) \mu_{|k|}|^p, \quad (50)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|f - S_\alpha(f)\|_{p,\mu} = 0. \quad (51)$$

Доказательство этого утверждения следует из соотношения (49), согласно которому

$$\|f - P_n\|_{p,\mu}^p = \sum_{k \in g_\alpha} |\widehat{f}(k) \mu_{|k|}|^p - \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus g_\alpha} |\widehat{f}(k) \mu_{|k|}|^p.$$

Если $\alpha \rightarrow \infty$, то правая часть в (50) стремится к нулю. Отсюда получаем (51) и, в частности, тот факт, что для любой функции f из $S^{p,\mu}$ ее ряд Фурье $S[f]$ сходится в пространстве $S^{p,\mu}$ к f в смысле сходимости частных сумм вида

$$S_n(f; x) = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

В качестве приближающих агрегатов для функций $f \in S^{p,\mu}$ будем рассматривать полиномы вида

$$P_n(x)_\Delta = \sum_{j \in \gamma_n} \sum_{k \in \Delta_j} c_k e^{ikx},$$

где, как и раньше, γ_n – некоторый набор из n натуральных чисел, а Δ_j – подмножество целых чисел $k \in \mathbb{Z}$ таких, что $|k| \in \Delta_j$; в качестве аппроксимационных характеристик – величины

$$e_n(f)_\Delta^{p,\mu} = \inf_{\gamma_n \in \Gamma_n} \inf_{c_k} \|f(x) - P_n(x)_\Delta\|_{p,\mu}. \quad (52)$$

В случае, когда $n_i = 1$, $i \in \mathbb{N}$, $\Delta_i = \{i\}$, $i = 1, 2, \dots$, $p = 2$ и $\mu_k \equiv 1$, величины $e_n(f)_\Delta$ совпадают с известными величинами $e_n(f)_{L_2}$ наилучших n -членных тригонометрических приближений функций f в пространстве L_2 , появившихся впервые, по-видимому, в работе Стечкина [16].

Заметим, что из предложения 1 вытекает, что внутренняя нижняя грань в (52) реализуется, когда $c_k = \hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, поэтому с учетом равенства (50) имеем

$$\begin{aligned} e_n^p(f)_\Delta^{p,\mu} &= \inf_{\gamma_n \in \Gamma_n} \left\| f(x) - \sum_{j \in \gamma_n} \sum_{k \in \Delta_j} \hat{f}(k) e^{ikx} \right\|_{p,\mu}^p \\ &= \inf_{\gamma_n \in \Gamma_n} \left(\|f\|_{p,\mu}^p - \sum_{j \in \gamma_n} \sum_{k \in \Delta_j} |\hat{f}(k) \mu_{|k|}|^p \right) = \|f\|_{p,\mu}^p - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{j \in \gamma_n} \sum_{k \in \Delta_j} |\hat{f}(k) \mu_{|k|}|^p. \end{aligned} \quad (53)$$

Если $\mathfrak{M}$ – некоторое подмножество из $S^{p,\mu}$, то полагаем

$$e_n(\mathfrak{M})_\Delta^{p,\mu} = \sup_{f \in \mathfrak{M}} e_n(f)_\Delta^{p,\mu}. \quad (54)$$

Определим теперь множества $\mathfrak{M}$, для которых будем рассматривать величины (54).

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=0}^\infty$ – некоторая система комплексных чисел и β – фиксированное действительное число такие, что ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \psi_k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

является рядом Фурье некоторой функции $\psi_\beta(\cdot)$. Тогда для любой функции $f \in L^o$ положим

$$F(x) = \mathcal{J}_\beta^\psi f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) \psi_\beta(t) dt \quad (55)$$

и назовем функцию $\mathcal{J}_\beta^\psi f$ ψ -интегралом функции f . Если $\mathfrak{N}$ – некоторое подмножество из L^o , то через $\psi_\beta \mathfrak{N}$ будем обозначать множество ψ -интегралов всех функций

из $\mathfrak{N}$. В частности, если при некоторых $q > 0$ и $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\lambda_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{N} = B^{q,\lambda}$ – единичный шар в пространстве $S^{q,\lambda}$,

$$B^{q,\lambda} = \{f \in S^{q,\lambda} : \|f\|_{q,\lambda} \leq 1\},$$

то $\psi_\beta B^{q,\lambda}$ – множество функций, представимых сверткой (55), у которой $f \in B^{q,\lambda}$. Функцию f в (55) иногда удобно называть (ψ, β) -производной функции F и записывать $F^\psi = f$.

Коэффициенты Фурье функции F имеют вид

$$\widehat{F}(k) = \psi_{|k|} e^{-i((\beta\pi)/2) \operatorname{sign} k} \widehat{f}(k). \quad (56)$$

В частности, если $\psi_k = k^{-r}$, $k \in \mathbb{N}$, и $\beta = r > 0$, то

$$\widehat{F}(k) = |k|^{-r} e^{-i((\beta\pi)/2) \operatorname{sign} k} \widehat{f}(k) = (ik)^{-r} \widehat{f}(k)$$

и тогда $\psi_\beta B^{q,\lambda}$ – множество функций, у которых r -е производные в смысле Вейля находятся в шаре $B^{q,\lambda}$. Такие множества обозначаются через $W^r B^{q,\lambda}$.

Будем рассматривать величины $e_n(\mathfrak{M})_\Delta^{p,\mu}$ в случае, когда $\mathfrak{M} = \psi_\beta B^{q,\lambda}$ при условиях их корректности. Пусть сначала $p \geq q > 0$.

Согласно неравенству Йенсена для любой неотрицательной последовательности $a = \{a_k\}_{k=1}^\infty$ имеем

$$\left(\sum_{k=1}^\infty a_k^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^q \right)^{1/q}, \quad 0 < q \leq p.$$

Поэтому, если $f \in \psi_\beta B^{q,\lambda}$, то вследствие (49) и (56)

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,\mu} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi_{|k|} \widehat{f}^\psi(k) \mu_{|k|}|^p \right)^{1/p} \\ &= 2^{1/p} \left(\sum_{k=1}^\infty |\psi_k \widehat{f}^\psi(k) \mu_k|^p \right)^{1/p} \leq 2^{1/p} \left(\sum_{k=1}^\infty |\psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k} \widehat{f}(k) \lambda_k|^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Видим, что если, например,

$$\left| \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right| \leq C, \quad k \in \mathbb{N}, \quad C = \text{const}, \quad C > 0, \quad (57)$$

то $f \in S^{p,\mu}$. Таким образом, если $p \geq q > 0$ и выполняется (57), то величины $e_n(\psi_\beta B^{q,\lambda})_\Delta^{p,\mu}$ определены корректно и тогда справедлива

ТЕОРЕМА 4. Пусть p и q – действительные числа такие, что $p \geq q > 0$, ψ , μ и λ – последовательности, для которых

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi'_k = 0, \quad \psi'_k = \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда при любом допустимом разбиении Δ множества $\mathbb{N}$ и при любом натуральном n выполняется равенство

$$e_n^p(\psi_\beta B^{q,\lambda})_\Delta^{p,\mu} = (l^* - n) \left(\sum_{\nu=1}^{l^*} |\psi'_{k_{i_\nu}}|^{-q} \right)^{-1/q},$$

в котором $|\psi'_{k_{i_\nu}}|$, $\nu = 1, 2, \dots$, – значения $|\psi'_{k_i}|$,

$$|\psi'_{k_i}| = \max_{k \in \Delta_i} |\psi'_k|, \quad (58)$$

перенумерованные в невозрастающем порядке, l^* – натуральное число, выбранное из условия

$$\sup_{l > n} (l - n) \left(\sum_{\nu=1}^l |\psi'_{k_{i_\nu}}|^{-q} \right)^{-1/q} = (l^* - n) \left(\sum_{\nu=1}^{l^*} |\psi'_{k_{i_\nu}}|^{-q} \right)^{-1/q}. \quad (59)$$

Такое число l^* существует и единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $f \in \psi_\beta B^{q,\lambda}$ в силу соотношений (53) и (56) имеем

$$e_n^p(f)_\Delta^{p,\mu} = 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k \widehat{f}^\psi(k) \mu_k|^p - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{j \in \gamma_n} \sum_{k \in \Delta_j} |\psi_k \widehat{f}^\psi(k) \mu_k|^p \right). \quad (60)$$

Отсюда, полагая $m_k = 2|\widehat{f}^\psi(k) \lambda_k|^q$, $k \in \mathbb{N}$, и $r = p/q$, заключаем, что

$$e_n^p(\psi_\beta B^{q,\lambda})_\Delta^{p,\mu} \leq 2^{1-p/q} \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\psi'_k|^p m_k^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{j \in \gamma_n} \sum_{k \in \Delta_j} |\psi'_k|^p m_k^r, \sum_{k=1}^{\infty} m_k \leq 1 \right\}. \quad (61)$$

Последовательность $|\psi'_k|^p$, $k \in \mathbb{N}$, принадлежит множеству A . Поэтому, применяя теорему 1, получим

$$e_n^p(\psi_\beta B^{q,\lambda})_\Delta^{p,\mu} \leq 2^{1-p/q} (l^* - n) \left(\sum_{\nu=1}^{l^*} |\psi'_{k_{i_\nu}}|^{-q} \right)^{-p/q}, \quad (62)$$

где $|\psi'_{k_{i_\nu}}|$, $\nu = 1, 2, \dots$, – значения из (58), перенумерованные в невозрастающем порядке, l^* – натуральное число, выбранное из условия (59). Такое число существует и единственно. Для завершения доказательства теоремы остается показать, что соотношение (62) строгим неравенством быть не может. Для этого покажем, что в множестве $\psi_\beta B^{q,\lambda}$ существует функция f_* , для которой

$$e_n^p(f_*)_\Delta^{p,\mu} = 2^{1-p/q} (l^* - n) \left(\sum_{\nu=1}^{l^*} |\psi'_{k_{i_\nu}}|^{-q} \right)^{-p/q}. \quad (63)$$

С этой целью, имея в виду равенство (7), положим

$$h = \sum_{k \neq 0} c_k e^{ikx},$$

где числа c_k подобраны так, что

$$c_{|k|}^q = \begin{cases} \frac{|\psi'_{k_{i_\nu}}|^{-q}}{2\lambda_{|k_{i_\nu}}^q} \left(\sum_{j=1}^{l^*} |\psi'_{k_{i_j}}|^{-q} \right)^{-1}, & k = k_{i_\nu}, \nu = 1, 2, \dots, l^*, \\ 0 & \text{при остальных значениях } k. \end{cases} \quad (64)$$

Функция h , являясь полиномом, принадлежит всем пространствам $S^{q,\lambda}$ при любых $q > 0$ и $\lambda_k \geq 0$, и поскольку

$$\|h\|_{q,\lambda}^q = \sum_{k \neq 0} c_k^q \lambda_{|k|}^q = 1,$$

то $h \in B^{q,\lambda}$. Поэтому, полагая $f_* = \mathcal{J}_\beta^\psi h$, видим, что $f_* \in \psi_\beta B^{q,\lambda}$ и $f_*^\psi = 1$. В то же время (см. (60)),

$$e_n^p(f_*)_{\Delta}^{p,\mu} = 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^p c_k^p \mu_k^p - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{j \in \gamma_n} \sum_{k \in \Delta_j} |\psi_k|^p c_k^p \mu_k^p \right).$$

Согласно (64)

$$c_k^p = \begin{cases} \frac{|\psi'_{i_{k_\nu}}|^{-p}}{2^{p/q} \lambda_{i_{k_\nu}}^p} \left(\sum_{j=1}^{l^*} |\psi'_{i_{k_j}}|^{-q} \right)^{-p/q}, & k = i_{k_\nu}, \nu = 1, 2, \dots, l^*, \\ 0, & \text{при остальных значениях } k. \end{cases} \quad (65)$$

Каждое множество $\bigcup_{j \in \gamma_n} \Delta_j$ может содержать только n чисел вида i_{k_ν} . Поэтому

$$e_n^p(f_*)_{\Delta}^{p,\mu} = 2 \left(\sum_{k=1}^{l^*} |\psi_{k_{i_\nu}}|^p c_{k_{i_\nu}}^p \mu_{k_{i_\nu}}^p - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{\nu \in \gamma_n} |\psi_{k_{i_\nu}}|^p c_{k_{i_\nu}}^p \mu_{k_{i_\nu}}^p \right).$$

В силу (65) при $k_{i_\nu} \geq 1$

$$|\psi_{k_{i_\nu}}|^p c_{k_{i_\nu}}^p \mu_{k_{i_\nu}}^p = 2^{-p/q} \left(\sum_{j=1}^{l^*} |\psi'_{k_{i_\nu}}|^{-q} \right)^{-p/q}.$$

Подставляя эти значения в (66), получаем равенство (63).

Получим аналог теоремы 4 в случае, когда $q > p > 0$. Корректность определения величин $e_n^p(\psi_\beta B^{q,\lambda})_{\Delta}^{p,\mu}$ в этом случае обеспечивают условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\psi'_k|^{pq/(q-p)} < \infty, \quad \psi'_k = \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (66)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть p и q – действительные числа такие, что $p > q > 0$, ψ, μ и λ – последовательности, удовлетворяющие условию (66). Тогда при любом допустимом разбиении Δ множества $\mathbb{N}$ и при любом натуральном n выполняется равенство

$$e_n^p(\psi_\beta B^{q,\lambda})_{\Delta}^{p,\mu} = 2^{1-p/q} \tilde{\sigma}_1^{-p/q}(s) [(s-n)^{q/(q-p)} + \tilde{\sigma}_1^{p/(q-p)}(s) \tilde{\sigma}_2(s)]^{(q-p)/q},$$

в котором

$$\tilde{\sigma}_1(s) = \sum_{\nu=1}^s \tilde{a}_{i_\nu}^{-q/p}, \quad \tilde{\sigma}_2(s) = \sum_{\nu=s+1}^{\infty} \tilde{a}_{i_\nu}^{q/(q-p)}, \quad (67)$$

где $\tilde{a}_{i_\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$, – значения $\tilde{a}_i$,

$$\tilde{a}_i = \left(\sum_{k \in \Delta_i} |\psi'_k|^{pq/(q-p)} \right)^{(q-p)/q}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (68)$$

перенумерованные в невозрастающем порядке; число s выбрано из условия

$$\tilde{a}_{i_s}^{-q/p} \leq \frac{\tilde{\sigma}_1(s)}{s-n} < \tilde{a}_{i_{s+1}}^{-q/p}, \quad s > n. \quad (69)$$

Такое число s всегда существует и единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in \psi_\beta B^{q,\lambda}$, то и в рассматриваемом случае справедливы соотношения (60) и (61). Последовательность $|\psi'_k|^p$, $k \in \mathbb{N}$, в силу (66) принадлежит множеству A_r . Поэтому применима теорема 2, согласно которой получим

$$\begin{aligned} e_n^p(\psi_\beta B^{q,\lambda})_\Delta^{p,\mu} &\leq 2^{1-p/q} \tilde{\sigma}_1^{-p/q}(s) [(s-n)^{q/(q-p)} + \tilde{\sigma}_1^{p/(q-p)}(s) \tilde{\sigma}_2(s)]^{(q-p)/q} \\ &\stackrel{\text{df}}{=} 2^{1-p/q} \mathcal{E}_n \left(|\psi'|^p; \frac{p}{q} \right), \end{aligned} \quad (70)$$

где величины $\tilde{\sigma}_1(s)$, $\tilde{\sigma}_2(s)$ и число s определяются соотношениями (67)–(69) и для завершения доказательства теоремы остается показать, что соотношение (70) на самом деле является равенством. Понятно, что для этого достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$ во множестве $\psi_\beta B^{q,\lambda}$ есть функция f_ε , для которой значение $e_n^p(\psi_\beta B^{q,\lambda})_\Delta^{p,\mu}$ отличается от правой части (70) не больше, чем на ε .

С этой целью сначала руководствуясь теоремой 2 при $\alpha_k = |\psi'_k|$ выберем число s из условия (69). Поскольку $\tilde{\sigma}_1(s) = \tilde{\sigma}_1(|\psi'|^p; s)$, где $\tilde{\sigma}_1(|\psi'|^p; s)$ величина из (29) при $\alpha_k = |\psi'_k|^p$, согласно теореме 2 такое число всегда существует и единственно. При выбранном s найдем значение $\tilde{t}_s$ согласно формуле

$$\tilde{t}_s = \left(\tilde{\sigma}_1(s) + \left(\frac{\tilde{\sigma}_1(s)}{s-n} \right)^{q/(q-p)} \tilde{\sigma}_2(s) \right)^{-p/q},$$

где $\tilde{\sigma}_2(s) = \tilde{\sigma}_2(|\psi'|^p; s)$, и положим

$$\tilde{m}_k = \tilde{\mu}_{i_\nu} |\psi'_k|^{qp/(q-p)} \tilde{a}_{i_\nu}^{-q/(q-p)}, \quad k \in \Delta_{i_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

где

$$\tilde{\mu}_{i_\nu} = \begin{cases} \left(\frac{\tilde{t}_s}{\tilde{a}_{i_\nu}} \right)^{q/p}, & \nu = 1, 2, \dots, s, \\ \frac{1 - \tilde{t}_s^{q/p} \tilde{\sigma}_1(s)}{\tilde{\sigma}_2(s)} \tilde{a}_{i_\nu}^{q/(q-p)}, & \nu > s. \end{cases}$$

Согласно построению и теореме 2 имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\psi'_k|^p \tilde{m}_k^{p/q} - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{j \in \gamma_n} \sum_{k \in \Delta_j} |\psi'_k|^p \tilde{m}_k^{p/q} = \mathcal{E}_n \left(|\psi'|^p; \frac{p}{q} \right). \quad (71)$$

Пусть γ_n^* – набор из n чисел j , для которых

$$\sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{j \in \gamma_n} \sum_{k \in \Delta_j} |\psi'_k|^p \tilde{m}_k^{p/q} = \sum_{j \in \gamma_n^*} \sum_{k \in \Delta_j} |\psi'_k|^p \tilde{m}_k^{p/q}$$

и

$$k_o = \max\{k : k \in \Delta_j, j \in \gamma_n^*\}.$$

По данному $\varepsilon > 0$ найдем число k' , $k' > k_o$, для которого

$$\sum_{k=k'+1}^{\infty} |\psi'_k|^p \tilde{m}_k^{p/q} < \varepsilon.$$

В таком случае, согласно (71) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{k'} |\psi'_k|^p \tilde{m}_k^{p/q} - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{j \in \gamma_n} \sum_{k \in \Delta_j} |\psi'_k|^p \tilde{m}_k^{p/q} = \mathcal{E}_n \left(|\psi'|^p; \frac{p}{q} \right) - \rho_{k'}, \quad 0 < \rho_{k'} < \varepsilon. \quad (72)$$

Отметив это, положим

$$h_{k'} = \sum_{k=-k'}^{k'} c_k e^{ikx}, \quad c_{|k|} = \frac{\tilde{m}_k^{1/q}}{2^{1/q} \lambda_k}, \quad k = \overline{1, k'}, \quad c_o = 0.$$

Поскольку

$$\|h_{k'}\|_{q, \lambda}^q = \sum_{k=1}^{k'} c_k^q \lambda_k^q = \sum_{k=1}^{k'} \tilde{m}_k \leq 1,$$

то $h_{k'} \in B^{q, \lambda}$. Поэтому полагая $f_{k'} = \mathcal{J}_\beta^\psi h_{k'}$, заключаем, что $f_{k'} \in \psi_\beta B^{q, \lambda}$ и $f_{k'}^\psi = h_{k'}$. В это же время согласно (60)

$$e_n^p(f_{k'})_{\Delta}^{p, \mu} = 2^{1-p/q} \left(\sum_{k=1}^{k'} |\psi'_k|^p \tilde{m}_k^{p/q} - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n} \sum_{j \in \gamma_n} \sum_{k \in \Delta_j} |\psi'_k|^p \tilde{m}_k^{p/q} \right). \quad (73)$$

Объединяя соотношения (70), (72) и (73), видим, что искомая функция f_ε в множестве $\psi_\beta B^{q, \lambda}$ действительно существует, что и завершает доказательство теоремы 5.

В заключение отметим, что пространства $S^{p, \mu}$, $p > 0$, по-видимому впервые рассматривались Стерлиным в работе [17].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Степанец, *Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p* , Препринт № 2001.2, Институт математики НАН Украины, Киев, 2001.
- [2] А. И. Степанец, “Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p ”, *Укр. матем. журн.*, **53**:3 (2001), 392–416.
- [3] А. И. Степанец, “Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p в разных метриках”, *Укр. матем. журн.*, **53**:8 (2001), 1121–1146.
- [4] А. И. Степанец, А. С. Сердюк, “Прямые и обратные теоремы теории приближений функций в пространстве S^p ”, *Укр. матем. журн.*, **54**:1 (2002), 106–124.
- [5] А. И. Степанец, *Методы теории приближений*, Труды Института математики НАН Украины, **40**, Ин-т математики НАН Украины, Киев, 2002.
- [6] А. И. Степанец, В. И. Рукасов, “Пространства S^p с несимметричной метрикой”, *Укр. матем. журн.*, **55**:2 (2003), 264–277.

- [7] А. И. Степанец, В. И. Рукасов, “Наилучшие “сплошные” n -членные приближения в пространствах S_φ^p ”, *Укр. матем. журн.*, **55**:5 (2003), 663–670.
- [8] А. И. Степанец, А. Л. Шидлич, “Наилучшие n -членные приближения Λ -методами в пространствах S_φ^p ”, *Укр. матем. журн.*, **55**:8 (2003), 1107–1126.
- [9] А. И. Степанец, “Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах”, *Укр. матем. журн.*, **55**:10 (2003), 1378–1409.
- [10] А. И. Степанец, “Наилучшие приближения q -эллипсоидов в пространствах $S_\varphi^{p,\mu}$ ”, *Укр. матем. журн.*, **56**:10 (2004), 1378–1383.
- [11] А. С. Сердюк, “Поперечники в просторі S^p класів функцій, що означаються модулями неперервності їх ψ -похідних”, *Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання*, Праці Інституту математики НАН України, **46**, Ін-т математики НАН України, Київ, 2003, 229–248.
- [12] С. Б. Вакарчук, “Неравенство типа Джексона и точные значения поперечников классов функций в пространствах S^p , $1 \leq p < \infty$ ”, *Укр. матем. журн.*, **56**:5 (2004), 595–605.
- [13] С. Б. Вакарчук, “О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации в пространствах S^p , $(1 \leq p < \infty)$ ”, *Современные методы теории функций и смежные проблемы* (Воронеж, 26 января–2 февраля, 2003 г.), Воронеж. ун-т, Воронеж, 2003, 47–48.
- [14] В. И. Рукасов, “Наилучшие n -членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой”, *Укр. матем. журн.*, **55**:6 (2003), 806–816.
- [15] А. И. Степанец, А. Л. Шидлич, “Об одной экстремальной задаче для числовых рядов”, *Укр. матем. журн.*, **57**:12 (2005), 1677–1683.
- [16] С. Б. Стечкин, “Об абсолютной сходимости ортогональных рядов”, *Докл. АН СССР*, **102**:1 (1955), 37–40.
- [17] М. Д. Стерлин, “Точные постоянные в обратных теоремах теории приближений”, *Докл. АН СССР*, **202**:3 (1972), 545–547.

А. И. Степанец

Институт математики НАН Украины

E-mail: step@imath.kiev.ua

Поступило

11.04.2006