Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Тимофеева, Компактификация в схеме Гильберта многообразия модулей стабильных 2-векторных расслоений на поверхности, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 5, 756–769

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4087>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 18:00:57

Компактификация в схеме Гильберта многообразия модулей стабильных 2-векторных расслоений на поверхности

Н. В. Тимофеева

В статье построена новая компактификация многообразия модулей стабильных векторных 2-расслоений с классами Чженя c_1, c_2 для случая, когда универсальное семейство стабильных пучков с данными значениями инвариантов существует, а строго полустабильные пучки отсутствуют. Предложенная компактификация является подмногообразием в схеме Гильберта подсхем многообразия Грассмана, имеющих фиксированный многочлен Гильберта, и получается добавлением к многообразию модулей расслоений точек, соответствующих локально свободным пучкам на поверхностях, являющихся модификациями исходной поверхности. Кроме того, построен морфизм новой компактификации многообразия модулей на его компактификацию Гизекера–Маруямы.

Библиография: 8 названий.

Введение. В настоящей работе проведено построение новой компактификации тонкого многообразия модулей стабильных по Гизекеру [1] векторных расслоений ранга $r = 2$ с классами Чженя c_1, c_2 на гладкой проективной алгебраической поверхности S над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Понятие стабильности по Гизекеру зависит от выбора поляризации $H \in \text{Pic } S$. Будем считать, что при поляризации H выполнено соотношение $GCD(r, c_1 \cdot H, (1/2)c_1 \cdot (c_1 - K_S) - c_2) = 1$, где K_S – канонический класс поверхности S , символ GCD означает взятие наибольшего общего делителя. При этом [2; 4.6.7, 4.6.8] пространство модулей стабильных пучков является тонким, а его компактификация Гизекера–Маруямы $\overline{M}$ не содержит полустабильных, но не стабильных пучков. Тогда универсальное семейство $\mathbb{E}$ пучков, соответствующее пространству модулей стабильных пучков, определено на всем многообразии $\overline{M}$.

Во всем тексте данной работы используются следующие обозначения: M_0 – многообразие модулей стабильных 2-расслоений с классами Чженя c_1, c_2 на поверхности S ; $Y_0 := M_0 \times S$, $Y := \overline{M} \times S$ – произведения. Работа ведется в предположении, что $\overline{M}$ – неособое многообразие. В противном случае все рассуждения останутся в силе, если заменить особое многообразие $\overline{M}$ его гладким разрешением по Хиронаке [3].

В то время как компактификация Гизекера–Маруямы может содержать точки, соответствующие не локально свободным когерентным пучкам без кручения на поверхности S , предлагаемая в настоящей статье новая компактификация $\widetilde{M}$ состо-

ит из точек, соответствующих локально свободным пучкам на поверхностях, являющихся модификациями поверхности S . Компактификация $\widetilde{M}$ является базой плоского семейства $\widetilde{Y} \xrightarrow{p_1} \widetilde{M}$ двумерных подсхем некоторого многообразия Грассмана, имеющих в нем фиксированный многочлен Гильберта. Достаточно общий член семейства поверхностей $\widetilde{Y}$ изоморфен поверхности S . Многообразие $\widetilde{M}$ содержит открытое подмножество, изоморфное многообразию M_0 , точки которого соответствуют расслоениям на поверхностях, изоморфных S , и обладает бирациональным морфизмом $\phi: \widetilde{M} \rightarrow \overline{M}$.

1. Семейства пучков и гомологическая размерность пучка $\mathcal{E}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{E}$ – плоское семейство стабильных пучков без кручения на гладкой поверхности S , параметризованное равноразмерной схемой T . Тогда пучок $\mathcal{E}$ обладает локально свободной резольвентой длины 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{E}_y$ – член семейства $\mathcal{E}$, соответствующий точке $y \in T$. По теореме о сизигиях пучок $\mathcal{E}_y$ обладает локально свободной резольвентой длины 2:

$$0 \rightarrow E_{2y} \rightarrow E_{1y} \rightarrow E_{0y} \rightarrow \mathcal{E}_y \rightarrow 0. \quad (1)$$

Пусть $C_1 = \ker(E_{0y} \rightarrow \mathcal{E}_y)$. Дуализация точной последовательности (1) порождает две точные последовательности:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{E}_y^\vee \rightarrow E_{0y}^\vee \rightarrow C_1^\vee \rightarrow \text{Ext}_S^1(\mathcal{E}_y, \mathcal{O}_S) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow C_1^\vee \rightarrow E_{1y}^\vee \rightarrow E_{2y}^\vee \rightarrow \text{Ext}_S^1(C_1, \mathcal{O}_S) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Введя обозначения $C_2 = \text{coker}(\mathcal{E}_y^\vee \rightarrow E_{0y}^\vee)$, $C_3 = \text{coker}(C_1^\vee \rightarrow E_{1y}^\vee)$, имеем точные последовательности двойственных пучков

$$0 \rightarrow C_2^\vee \rightarrow E_{0y} \rightarrow \mathcal{E}_y^{\vee\vee} \rightarrow \text{Ext}_S^1(C_2, \mathcal{O}_S) \rightarrow 0, \quad (2)$$

$$0 \rightarrow C_3^\vee \rightarrow E_{1y} \rightarrow C_1^{\vee\vee} \rightarrow \text{Ext}_S^1(C_3, \mathcal{O}_S) \rightarrow 0. \quad (3)$$

Пучки $\mathcal{E}_y^{\vee\vee}$ и $C_1^{\vee\vee}$ локально свободны. Заметим, что по теореме о сизигиях пучок $C_2^\vee$ локально свободен, и, поскольку коразмерность подмножества особенностей пучка $\mathcal{E}_y$ равна 2, то $\text{Ext}_S^1(\text{Ext}_S^1(\mathcal{E}_y, \mathcal{O}_S), \mathcal{O}_S) = 0$ и $C_1^{\vee\vee} = C_2^\vee$. Аналогично, в (3) пучок $C_3^\vee$ локально свободен, $\text{Ext}_S^1(\text{Ext}_S^1(C_1^\vee, \mathcal{O}_S), \mathcal{O}_S) = 0$ и $E_{2y} = C_3^\vee$. Обозначив через $\mathcal{F}$ коядро канонического вложения $\mathcal{E}_y \hookrightarrow \mathcal{E}_y^{\vee\vee}$, имеем точную диаграмму (4).

По теореме о сизигиях пучок $\mathcal{F}$ имеет гомологическую размерность не более 2. Следовательно, пучок $\ker(E_{0y} \rightarrow \mathcal{E}_y^{\vee\vee})$ локально свободен. Следовательно, пучок $\mathcal{E}_y$ обладает локально свободной резольвентой длины 1.

Для глобального случая достаточно заметить, что если семейство $\mathcal{E}$ не имеет локально свободной резольвенты длины меньше 2, то найдется точка $y \in T$ такая, что пучок $\mathcal{E}_y$ обладает гомологической размерностью 2, что противоречит доказанному.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пучок $\mathcal{E}$ гомологической размерности 1 на гладкой схеме X , множество особенностей которого имеет коразмерность выше 2, рефлексивен.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & E_{2y} & \xlongequal{\quad} & C_3^\vee & & & \\
 & \parallel & & \downarrow & & 0 & \\
 0 \longrightarrow & E_{2y} & \longrightarrow & E_{1y} & \longrightarrow & E_{0y} & \longrightarrow \mathcal{E}_y \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \downarrow \\
 & 0 & \longrightarrow & C_2^\vee & \longrightarrow & E_{0y} & \longrightarrow \mathcal{E}_y^{\vee\vee} \longrightarrow \text{Ext}_S^1(C_2, \mathcal{O}_S) \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow & & & \downarrow \\
 & & & 0 & & & \mathcal{F} \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array} \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0 \tag{5}$$

– локально свободная резольвента пучка $\mathcal{E}$; ее дуализация, обозначение $R = E_0^\vee / \mathcal{E}^\vee$ и повторная дуализация приводят к точным последовательностям

$$\begin{aligned}
 0 &\rightarrow R^\vee \rightarrow E_0 \rightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee} \rightarrow \text{Ext}_X^1(R, \mathcal{O}_X) \rightarrow 0, \\
 0 &\rightarrow E_1 \rightarrow R^\vee \rightarrow \text{Ext}_X^1(\text{Ext}_X^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) \rightarrow 0, \\
 0 &\rightarrow \text{Ext}_X^1(R, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Ext}_X^2(\text{Ext}_X^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Так как $\text{codim Ext}_X^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) \geq 3$, то

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\text{Ext}_X^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) = \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^2(\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) = 0,$$

и поэтому $\text{Ext}_X^1(R, \mathcal{O}_X) = 0$, $R^\vee = E_1$ и $\mathcal{E}^{\vee\vee} = \mathcal{E}$.

Универсальное семейство пучков, соответствующее многообразию модулей стабильных пучков без кручения ранга 2 с классами Чженя c_1, c_2 , удовлетворяет условиям обоих предложений, поэтому положим в (5) $\mathcal{E} = \mathbb{E}$. Далее пусть $\sigma: \hat{Y} \rightarrow Y$ – морфизм раздутия схемы Y в пучке идеалов Фиттинга $\mathcal{I} = \text{Fitt}^0(\text{Ext}_Y^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_Y))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Схема $\hat{Y}$ обладает локально свободным пучком E ранга 2 таким, что $(\sigma_* E^\vee)^{\vee\vee} = \mathbb{E}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применение к (5) дуализации и функтора σ^* приводит к точным последовательностям

$$\text{Tor}_1^{\sigma^{-1}\mathcal{O}_Y}(\sigma^{-1}R, \mathcal{O}_{\hat{Y}}) \rightarrow \sigma^*E^\vee \rightarrow \sigma^*E_0^\vee \rightarrow \sigma^*R \rightarrow 0, \tag{6a}$$

$$\text{Tor}_1^{\sigma^{-1}\mathcal{O}_Y}(\sigma^{-1}\text{Ext}_{\mathcal{O}_Y}^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_{\hat{Y}}) \rightarrow \sigma^*R \rightarrow \sigma^*E_1^\vee \rightarrow \sigma^*\text{Ext}_{\mathcal{O}_Y}^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_Y) \rightarrow 0. \tag{6b}$$

Пусть в (6b) $\mathcal{A} := \ker(\sigma^* E_1^\vee \rightarrow \sigma^* \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_Y}^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_Y))$. Рассмотрим пучок

$$\operatorname{Fitt}^0(\sigma^* \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_Y}^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_Y)).$$

Он обратим, так как

$$\operatorname{Fitt}^0(\sigma^* \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_Y}^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_Y)) = (\sigma^{-1} \operatorname{Fitt}^0(\operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_Y}^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_Y))) \cdot \mathcal{O}_{\hat{Y}} = (\sigma^{-1} \mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_{\hat{Y}},$$

где Y – целая схема; последний пучок обратим по свойству раздутий. Теперь нам необходим следующий результат, принадлежащий Тихомирову.

ЛЕММА 4 [4; лемма 1]. *Пусть X – целая нетерова схема, и $\mathcal{F}$ – ненулевой когерентный $\mathcal{O}_X$ -пучок кручения. Тогда пучок нулевых идеалов Фиттинга $\operatorname{Fitt}^0(\mathcal{F})$ является обратимым $\mathcal{O}_X$ -пучком тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ имеет гомологическую размерность 1, т.е. $\operatorname{hd} \mathcal{F} = 1$.*

Тогда $\operatorname{hd} \sigma^* \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_Y}^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_Y) = 1$. Таким образом, пучок $\mathcal{A}$ локально свободен, $\mathcal{A} = \sigma^* R / \operatorname{tors}(\sigma^* R)$, где в правой части стоит факторпучок пучка $\sigma^* R$ по кручению, и $\mathcal{A}^\vee = (\sigma^* R)^\vee$.

Так как $\sigma^* E_0^\vee$ – пучок без кручения, то из (6a) следует точная тройка

$$0 \rightarrow \sigma^* \mathbb{E}^\vee / \operatorname{tors}(\sigma^* \mathbb{E}^\vee) \rightarrow \sigma^* E_0^\vee \rightarrow \sigma^* R \rightarrow 0. \quad (7)$$

Пусть $E = \ker(\sigma^* E_0^\vee \rightarrow \mathcal{A})$. Этот пучок локально свободен как ядро эпиморфизма локально свободных пучков. Принимая во внимание (7) и используя лемму о змее, получаем точную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \operatorname{tors}(\sigma^* R) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \sigma^* \mathbb{E}^\vee / \operatorname{tors}(\sigma^* \mathbb{E}^\vee) & \longrightarrow & \sigma^* E_0^\vee & \longrightarrow & \sigma^* R \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \sigma^* E_0^\vee & \longrightarrow & \mathcal{A} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & \operatorname{tors}(\sigma^* R) & & & & 0 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array} \quad (8)$$

Дуализация левой вертикальной тройки в (8) и применение функтора σ_* приводят к вложению $\sigma_* E^\vee \hookrightarrow \sigma_*(\sigma^* \mathbb{E}^\vee)^\vee$ пучков, совпадающих вне подмножества $Y \setminus Y_0$ коразмерности 3. Образуя рефлексивные оболочки и учитывая рефлексивность пучка $\mathbb{E}$, имеем равенство $(\sigma_* E^\vee)^{\vee\vee} = (\sigma_*(\sigma^* \mathbb{E}^\vee)^\vee)^{\vee\vee} = \mathbb{E}$.

2. Компактификация пространства M_0 и ее основные свойства. Зафиксируем основные обозначения и соглашения этого пункта:

- $\mathbb{E}_0 := \mathbb{E}|_{Y_0}$;
- $\widehat{\mathcal{L}}$ – очень обильный обратимый пучок на схеме $\widehat{Y}$;
- $G := G(r, V)$ – грассманиан подпространств размерности r векторного пространства V размерности $\dim V > r$; далее всюду $r = 2$;
- $\mathcal{S}$ – тавтологическое подрасслоение ранга r на многообразии G ;
- $H := \text{Hilb}^{P(k)} G$ – схема Гильберта подсхем в многообразии Грассмана G , имеющих многочлен Гильберта, равный $P(k)$;
- $Z \subset H \times G$ – универсальное семейство подсхем над схемой Гильберта H ;
- $p_1^Z: Z \rightarrow H$, $p_2^Z: Z \rightarrow G$ – проекции универсальной подсхемы Z .

Будут построены:

- $\tilde{h}: \tilde{M} \hookrightarrow H$ – замкнутое вложение новой компактификации $\tilde{M}$ в схему Гильберта;
- $h_0 = \tilde{h}|_{M_0}: M_0 \hookrightarrow H$ – вложение открытого подмножества $M_0 \subset \tilde{M}$;
- $\tilde{Y} := (p_1^Z)^{-1}(\tilde{h}(\tilde{M}))$ – ограничение универсального семейства подсхем Z на подсхему $\tilde{M}$ в H ;
- $\tilde{h}_Y: \tilde{Y} \hookrightarrow Z$ – вложение подсхемы $\tilde{Y}$, индуцированное вложением $\tilde{h}$;
- $h_Y = \tilde{h}_Y|_{Y_0}: Y_0 \hookrightarrow Z$ – вложение открытого подмножества $Y_0 \subset \tilde{Y}$;
- $p_1: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{M}$ – структурная проекция семейства подсхем $\tilde{Y}$;
- $j: \widehat{Y} \hookrightarrow G$ – замкнутое вложение;
- $j_0 = j|_{Y_0}: Y_0 \hookrightarrow G$ – вложение открытого подмножества $Y_0 \subset \widehat{Y}$, соответствующее вложению j ;
- $p_2 = p_2^Z|_{\widehat{Y}}: \widehat{Y} \rightarrow \widehat{Y}$ – проекция, индуцированная проекцией p_2^Z ;
- $\tilde{\mathbb{E}} = \tilde{h}_Y^*(\mathcal{O}_H \boxtimes \mathcal{S}|_Z)$ – локально свободный пучок на схеме $\tilde{Y}$;
- $\widehat{\Delta} := (\text{id}_{\tilde{M}}, p_2)(p_1 \times \text{id}_{\widehat{Y}})(\tilde{Y})$ – схемный образ морфизма $\tilde{Y} \rightarrow \tilde{M} \times \widehat{Y}$;
- $\Delta := (\text{id}_{\tilde{M}}, \sigma \circ p_2)(p_1 \times \text{id}_{\widehat{Y}})(\tilde{Y})$ – схемный образ морфизма $\tilde{Y} \rightarrow \tilde{M} \times Y$;
- $\tilde{\pi}: \Delta \rightarrow \tilde{M}$ – проекция, индуцированная вложением $\Delta \hookrightarrow \tilde{M} \times Y$;
- $\phi: \tilde{M} \rightarrow \overline{M}$ – морфизм новой компактификации на компактификацию Гизека–Маруямы.

Пусть $\widehat{\mathcal{L}}$ – очень обильный обратимый пучок на $\widehat{Y}$. Выбором пучка $\widehat{\mathcal{L}}$ (например, заменив его при необходимости на достаточно большой степени кратный) можно добиться того, что

- пучок $\bigwedge^2(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}})$ очень обилен;
- естественное отображение $\bigwedge^2 H^0(\widehat{Y}, E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}) \rightarrow H^0(\widehat{Y}, \bigwedge^2(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}))$ сюръективно.

Для (i) достаточно того, чтобы пучок $\bigwedge^2(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}) = (\bigwedge^2 E^\vee) \otimes \widehat{\mathcal{L}}^{\otimes 2}$ порождался глобальными сечениями; это гарантировано теоремой [5; II, теорема 5.17].

Возможность выбора $\widehat{\mathcal{L}}$ такого, что отображение

$$\bigotimes^2 H^0(\widehat{Y}, E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}) \rightarrow H^0(\widehat{Y}, \bigotimes^2(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}))$$

сюръективно, дается в книге Лазарсфельда [6; пример 1.8.13]. Для перехода к внеш-

нему квадрату рассмотрим очевидный эпиморфизм

$$\bigotimes^2 H^0(\widehat{Y}, E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}) \twoheadrightarrow \bigwedge^2 H^0(\widehat{Y}, E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}})$$

и цепочку равенств

$$\begin{aligned} H^0(\widehat{Y}, \bigotimes^2(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}})) &= H^0\left(\widehat{Y}, \bigwedge^2(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}) \oplus S^2(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}})\right) \\ &= H^0\left(\widehat{Y}, \bigwedge^2(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}})\right) \oplus H^0(\widehat{Y}, S^2(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}})), \end{aligned}$$

приводящую к эпиморфизму проекции на прямое слагаемое

$$H^0(\widehat{Y}, \bigotimes^2(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}})) \twoheadrightarrow H^0(\widehat{Y}, \bigwedge^2(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}})).$$

Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^2 H^0(\widehat{Y}, E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}) & \longrightarrow & H^0(\widehat{Y}, \bigwedge^2(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}})) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bigotimes^2 H^0(\widehat{Y}, E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}) & \longrightarrow & H^0(\widehat{Y}, \bigotimes^2(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}})) \end{array}$$

в которой известно, что все отображения кроме верхнего – эпиморфизмы. Тогда и верхняя стрелка – эпиморфизм. Теперь нам необходим следующий результат Траутманна (не опубликован).

ЛЕММА 5. Пусть $\mathfrak{E}$ – локально свободный пучок ранга r на многообразии X , и пусть

- (i) пучок $\bigwedge^r \mathfrak{E}$ очень обилен;
- (ii) естественное отображение $\bigwedge^r H^0(X, \mathfrak{E}) \rightarrow H^0(X, \bigwedge^r \mathfrak{E})$ сюръективно.

Тогда пучок $\mathfrak{E}$ порожден глобальными сечениями и ассоциированный морфизм $\Phi_{\mathfrak{E}}: X \rightarrow G(r, H^0(X, \mathfrak{E})^\vee)$ является замкнутым вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположениям леммы отображение

$$\bigwedge^r H^0(X, \mathfrak{E}) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \bigwedge^r \mathfrak{E} \quad (9)$$

сюръективно и, следовательно, отображение $H^0(X, \mathfrak{E}) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathfrak{E}$ также сюръективно. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \swarrow \Phi_1 & \downarrow \Phi_0 & \searrow \Phi_{\mathfrak{E}} & \\ P(H^0(X, \bigwedge^r \mathfrak{E})^\vee) & \hookrightarrow & P(\bigwedge^r H^0(X, \mathfrak{E})^\vee) & \xleftarrow{i} & G(r, H^0(X, \mathfrak{E})^\vee) \end{array}$$

где i – плюккерovo вложение, Φ_1 – замкнутое вложение, определенное очень обильным пучком $\bigwedge^r \mathfrak{E}$, Φ_0 – морфизм, определенный сюръекцией (9). Тогда Φ_0 – замкнутое вложение и согласно [5; II, упражнение 4.8e] отображение $\Phi_{\mathfrak{E}}$ – замкнутое вложение.

Теперь, полагая $\mathfrak{E} = E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}$, $r = 2$, имеем индуцированное вложение $j: \widehat{Y} \hookrightarrow G$. Пусть $\mathcal{S}$ – тавтологическое подраспложение ранга 2 на многообразии G . Вложением j индуцировано равенство $E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}} = j^* \mathcal{S}$.

Заметим, что согласно предложению 3 имеет место равенство $\mathbb{E}_0 = E^\vee|_{Y_0}$. Для открытого в $\widehat{Y}$ подмножества $Y_0 \subset \widehat{Y}$ имеет место (индуцированное вложением j) вложение $j_0: Y_0 \hookrightarrow G$, так что $\mathbb{E}_0 \otimes \widehat{\mathcal{L}}|_{Y_0} = j_0^* \mathcal{S}$.

Пусть $\mathcal{O}_G(1)$ – положительная образующая в группе Пикара многообразия Грассмана G . Многочлен Гильберта $P(k) := \chi(j^* \mathcal{O}_G(k)|_{\{y\} \times S})$ образа слоя $\{y\} \times S \subset Y_0$ при вложении j_0 не зависит от точки $y \in M_0$. Пусть Z – универсальная подсхема в произведении $H \times G$, $p_1^Z: Z \rightarrow H$ – естественная проекция; тогда ввиду гладкости морфизма $\pi|_{M_0}: Y_0 \rightarrow M_0$ имеет место сохраняющее слои вложение плоского над базой M_0 семейства поверхностей Y_0 в универсальное (плоское над схемой Гильберта H) семейство подсхем $Z: Y_0 \xrightarrow{h_Y} Z$. Тогда определено индуцированное вложение базы $h_0: M_0 \hookrightarrow H$ многообразия модулей стабильных векторных расслоений в схему Гильберта подсхем многообразия G , имеющих многочлен Гильберта $P(k)$, и имеет место диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} Y_0 & \xrightarrow{h_Y} & Z & \longrightarrow & H \times G \\ \pi|_{Y_0} \downarrow & & \downarrow p_1^Z & \nearrow & \\ M_0 & \xrightarrow{h_0} & H & & \end{array}$$

с расслоенным квадратом.

Образует замыкание $\widetilde{M}$ образа $h_0(M_0) \cong M_0$ вложения h_0 и определим схему $\widetilde{Y} \supset Y_0$ с помощью расслоенной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} Y_0 & \xrightarrow{i_Y} & \widetilde{Y} & \xrightarrow{\widetilde{h}_Y} & Z \\ \pi|_{Y_0} \downarrow & & p_1 \downarrow & & p_1^Z \downarrow \\ M_0 & \xrightarrow{i_0} & \widetilde{M} & \xrightarrow{\widetilde{h}} & H \end{array}$$

в которой i_0, i_Y – открытые вложения и $\widetilde{h} \circ i_0 = h_0$, $\widetilde{h}_Y \circ i_Y = h_Y$. Схема $\widetilde{Y}$ снабжена локально свободным пучком $\widetilde{\mathbb{E}} = \widetilde{h}_Y^*(\mathcal{O}_H \boxtimes \mathcal{S}|_Z)$.

Для справедливости диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} G & \xleftarrow{j} & \widehat{Y} & \xrightarrow{\sigma} & Y \\ p_2^Z \uparrow & & \uparrow p_2 & & \downarrow \pi \\ Z & \xleftarrow{\widetilde{h}_Y} & \widetilde{Y} & & \widetilde{M} \\ p_1^Z \downarrow & & \downarrow p_1 & & \\ H & \xleftarrow{\widetilde{h}} & \widetilde{M} & & \end{array}$$

необходимо лишь убедиться в том, что $p_2^Z(\widetilde{Y}) = \widehat{Y}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Равенство верно на открытом подмножестве $Y_0 \subset \widetilde{Y}$:

$$p_2^Z(h_Y(Y_0)) = j_0(Y_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Морфизм j_0 осуществляет вложение произведения $Y_0 = M_0 \times S$ как семейства поверхностей, изоморфных S , в многообразие Грассмана с постоянным многочленом Гильберта $P(k)$. Пусть $(j_0)_y: \{y\} \times S \hookrightarrow G$, $(h_Y)_y: \{y\} \times S \hookrightarrow Z$ – вложения слоя $\{y\} \times S \subset Y_0$ над точкой $y \in M_0$. Морфизм j_0 индуцирует вложение h_Y семейства Y_0 в универсальную подсхему Z над схемой Гильберта, соответствующей многочлену Гильберта $P(k)$, определенное на слоях семейства Y_0 следующим образом:

$$(h_Y)_y: \{y\} \times S \rightarrow (h_y, (j_0)_y(\{y\} \times S)),$$

где h_y – точка схемы Гильберта H , соответствующая подсхеме $(j_0)_y(\{y\} \times S)$. Проекция $p_2^Z: Z \rightarrow G$ отображает слой $(h_Y)_y(\{y\} \times S)$ на образ слоя $(j_0)_y(\{y\} \times S)$. Таким образом, проекция p_2^Z осуществляет соответствие образов семейства Y_0 : $p_2^Z(h_Y(Y_0)) = j_0(Y_0) \cong Y_0$. Утверждение доказано.

Образуем теоретико-схемное замыкание $\overline{h_Y(Y_0)}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Верно схемное равенство $\overline{h_Y(Y_0)} = \tilde{Y}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C_0 – гладкая пунктированная кривая в $M_0 \subset \tilde{M}$, C – ее схемное замыкание в $\tilde{M}$, $p_1^{-1}C_0 \subset Y_0$ – ее прообраз в Z . Тогда согласно [5; III, предложение 9.8] схемное замыкание $\overline{p_1^{-1}C_0}$ является плоской над C подсхемой в схеме Z , причем слои схемы $\overline{p_1^{-1}C_0}$ и $\tilde{Y}$ над точками кривой C совпадают, и $\overline{p_1^{-1}C_0} = p_1^{-1}C$. Таким образом, имеется композиция замкнутых вложений схем $p_1^{-1}C \hookrightarrow \overline{h_Y(Y_0)} \hookrightarrow \tilde{Y}$, причем слои схемы $p_1^{-1}C$ совпадают с соответствующими слоями схемы $\tilde{Y}$. Отсюда следует, что схемы $\overline{h_Y(Y_0)}$ и $\tilde{Y}$ совпадают послойно над $\tilde{M}$. Пусть $\iota: \overline{h_Y(Y_0)} \hookrightarrow \tilde{Y}$ – замкнутое вложение. Тогда имеется точная тройка $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}\text{-пучков}$

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{Y}} \rightarrow \iota_* \mathcal{O}_{\overline{h_Y(Y_0)}} \rightarrow 0,$$

где пучок $\mathcal{K}$ определен как ядро эпиморфизма $\mathcal{O}_{\tilde{Y}} \rightarrow \iota_* \mathcal{O}_{\overline{h_Y(Y_0)}}$. Так как схемы $\overline{h_Y(Y_0)}$ и $\tilde{Y}$ совпадают послойно над $\tilde{M}$, то многочлены Гильберта их слоев над $\tilde{M}$ равны и схема $\overline{h_Y(Y_0)}$ является плоской над $\tilde{M}$. Тогда оба пучка $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ и $\iota_* \mathcal{O}_{\overline{h_Y(Y_0)}}$ являются плоскими над $\tilde{M}$. Следовательно, пучок ядра $\mathcal{K}$ плоский над $\tilde{M}$, причем в общей точке его слой равен 0. Значит, $\mathcal{K} = 0$ и $\mathcal{O}_{\tilde{Y}} = \iota_* \mathcal{O}_{\overline{h_Y(Y_0)}}$, ι – изоморфизм, что и требовалось доказать.

Очевидно, $\overline{j_0(Y_0)} \hookrightarrow \hat{Y}$, и в силу собственности морфизма p_2^Z имеется замкнутое вложение $p_2^Z(\tilde{Y}) \hookrightarrow \hat{Y}$, где $p_2^Z(\tilde{Y})$ – схемный образ морфизма p_2 . Так как схема $\tilde{Y}$ приведена, то схемная структура на $p_2^Z(\tilde{Y})$ – приведенная структура [5; II, упражнение 3.11 d]. Схема $\hat{Y}$ приведена и неприводима как раздутие целой схемы [7; В.6.4], и $p_2^Z(Y_0) = j_0(Y_0)$, поэтому $\hat{Y} = \overline{j_0(Y_0)} = p_2^Z(\tilde{Y})$.

Для дальнейшего потребуется

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Справедливы равенства

$$\tilde{Y} = (\tilde{h}(\tilde{M}) \times G) \cap Z = (\tilde{h}, j)(\tilde{M} \times \hat{Y}) \cap Z,$$

где $(\tilde{h}, j): \tilde{M} \times \hat{Y} \rightarrow H \times G$ – вложение произведения $\tilde{M} \times \hat{Y}$, индуцированное вложениями $\tilde{h}$ и j сомножителей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство непосредственно следует из того, что универсальное семейство подсхем Z является плоским над схемой Гильберта H , а $\tilde{Y}$ – его ограничение на подсхему $\tilde{M} \subset H$. Второе равенство получается из первого при учете равенства $p_2^Z(\tilde{Y}) = \hat{Y}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Определен регулярный бирациональный морфизм компактификаций $\phi: \tilde{M} \rightarrow \overline{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. *Отображение множеств.* Положим по определению $\phi := (\pi \circ \sigma \circ p_2)p_1^{-1}$. Для проверки корректности определения достаточно убедиться в том, что проекция p_2 сохраняет слои. Это означает, что слой проекции p_1 при морфизме p_2 переходит в слой композиции $\pi \circ \sigma$.

Рассмотрим открытое подмножество $M_0 \subset \tilde{M}$, точки которого соответствуют локально свободным пучкам. Подмножество M_0 порождает в универсальной подсхеме Z подсемейство $h_Y(Y_0) \subset \tilde{Y} \subset Z$, изоморфное $M_0 \times S$. Согласно утверждению 6 $p_2(h_Y(Y_0)) = j_0(Y_0)$, причем по конструкции проекция p_2 на подмножестве $h_Y(Y_0)$ сохраняет слои над M_0 .

Далее, пусть $\tilde{y} \in \tilde{M} \setminus h_0(M_0)$. Рассмотрим в M_0 гладкую кривую C_0 такую, что $\overline{h_0(C_0)} \setminus h_0(C_0) = \tilde{y}$. В силу плоскости морфизма p_1 и универсальности схемы Z , $p_1^{-1}\overline{h_0(C_0)} = \overline{p_1^{-1}(h_0(C_0))}$, слой семейства $p_1^{-1}\overline{h_0(C_0)}$ над точкой $\tilde{y}$ совпадает со слоем $p_1^{-1}(\tilde{y})$ и не зависит от выбора кривой C_0 .

Рассмотрим вложение $l_0: C_0 \hookrightarrow M_0 \subset \tilde{M}$ кривой C_0 такое, что проекция p_2 осуществляет сохраняющий слои изоморфизм локально замкнутых подсхем $p_1^{-1}C_0 \subset \tilde{Y}$ и $\sigma^{-1}\pi^{-1}l_0(C_0)$, расслоенных над C_0 и $l_0(C_0)$ соответственно. Образы замыкания, имеем индуцированный проекцией p_2 бирациональный морфизм замкнутых подсхем $\overline{p_1^{-1}(C_0)} \rightarrow \overline{\sigma^{-1}\pi^{-1}l_0(C_0)}$. Пусть $\tilde{y} = C \setminus C_0 \in \tilde{M}$, $\bar{y} = \overline{l_0(C_0)} \setminus l_0(C_0)$. Слой семейства $\tilde{Y}$ над точкой $\tilde{y}$ – поверхность, слой семейства $\overline{\sigma^{-1}\pi^{-1}l_0(C_0)}$ над точкой $\bar{y}$ также поверхность по построению. Следовательно, проекция p_2 отображает слой $p_1^{-1}(\tilde{y})$ семейства $\tilde{Y}$ в слой схемы $\overline{\sigma^{-1}\pi^{-1}l_0(C_0)}$ над точкой $\bar{y}$.

Далее будем пользоваться обозначением $f = \pi \circ \sigma \circ p_2$.

Шаг 2. *Непрерывное отображение топологических пространств.* Для этого достаточно показать, что прообраз замкнутого по Зарискому множества при отображении ϕ замкнут. В самом деле, композиция $f: \tilde{Y} \rightarrow \overline{M}$ – настоящий морфизм, и поэтому непрерывна в топологии Зарисского. Пусть $A \subset \overline{M}$ – замкнутое по Зарискому подмножество в схеме $\overline{M}$; тогда его прообраз $f^{-1}(A)$ замкнут в схеме $\tilde{Y}$. Морфизм p_1 собственный и, следовательно, образ $p_1 f^{-1}(A)$ замкнутого множества замкнут. По определению отображения ϕ прообраз замкнутого подмножества A при этом отображении равен $\phi^{-1}(A) = p_1 f^{-1}(A)$ и замкнут.

Шаг 3. *Морфизм алгебраических схем.* Необходимо построить морфизм пучков $\phi^\#: \mathcal{O}_{\tilde{M}} \rightarrow \phi_* \mathcal{O}_{\tilde{M}}$. Имеется морфизм пучков $f^\#: \mathcal{O}_{\tilde{M}} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}}$. Очевидно, $\mathcal{O}_{\tilde{Y}} = p_1^* \mathcal{O}_{\tilde{M}}$.

Проверим равенство функторов

$$\phi_* = f_* p_1^{-1}. \quad (10)$$

Пусть $\mathcal{F}$ – произвольный пучок на схеме $\tilde{M}$, $V \subset \overline{M}$ – открытое подмножество. Согласно определению прямого образа пучка при непрерывном отображении топо-

логических пространств $(\phi_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(p_1 f^{-1}(V))$. Убедимся в том, что подмножество $W_0 := p_1 f^{-1}(V)$ открыто в $\widetilde{M}$. Так как V – открытое в $\overline{M}$ подмножество, то $A = \overline{M} \setminus V$ замкнуто. По доказанному (шаг 2) образ $p_1 f^{-1}(A)$ замкнут. Очевидно, $p_1 f^{-1}(A) \cup p_1 f^{-1}(V) = \widetilde{M}$. Осталось проверить, что $p_1 f^{-1}(A) \cap p_1 f^{-1}(V) = \emptyset$. Предположив противное, выберем точку $\tilde{y} \in p_1 f^{-1}(A) \cap p_1 f^{-1}(V)$. Тогда в слое $\tilde{S}_{\tilde{y}} = p_1^{-1}(\tilde{y})$ найдутся точки q_1 и q_2 такие, что $p_1(q_1) \in p_1 f^{-1}(A)$, $p_1(q_2) \in p_1 f^{-1}(V)$. Следовательно, в $\overline{M}$ найдутся точки $y_1 \in A$ и $y_2 \in V$ такие, что $f(q_i) = y_i$, $i = 1, 2$. Это противоречит корректности определения ϕ как отображения множеств. Отсюда следует, что $W_0 := p_1 f^{-1}(V)$ открыто в $\widetilde{M}$ как дополнение к замкнутому множеству.

Далее обратимся к прообразу $(p_1^{-1}\mathcal{F})(U)$, где $U := f^{-1}(V)$. Согласно определению обратного образа пучка

$$(p_1^{-1}\mathcal{F})(U) = \lim_{W \supset W_0} \mathcal{F}(W),$$

где справа стоит индуктивный предел по системе открытых подмножеств, содержащих образ $p_1(U) = W_0$.

Утверждается, что

$$\lim_{W \supset W_0} \mathcal{F}(W) = \mathcal{F}(W_0).$$

При проверке этого утверждения мы будем придерживаться следующих обозначений. Множества индуктивной системы – это $\mathcal{F}(W)$; они нумеруются открытыми подмножествами W . Для любых двух открытых множеств W и W' таких, что $W' \subset W$, определено отображение ограничения $f_{W'}^W: \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{F}(W')$. Очевидно, что $f_W^W = \text{id}_{\mathcal{F}(W)}$ и $f_{W'}^W \circ f_{W''}^{W'} = f_{W''}^W$ для любых открытых подмножеств $W'' \subset W' \subset W$. Канонические отображения в индуктивный предел будем обозначать $f^W: \mathcal{F}(W) \rightarrow \lim_{W \supset W_0} \mathcal{F}(W)$ и $f^{W'} \circ f_{W'}^W = f^W$. Наконец, свойство универсальности индуктивного предела [8; I, 1.6] утверждает, что для множества F и набора отображений $h^W: \mathcal{F}(W) \rightarrow F$ таких, что $h^{W'} = h^W \circ f_{W'}^W$, существует единственное отображение $h: \lim_{W \supset W_0} \mathcal{F}(W) \rightarrow F$ такое, что $h^W = h \circ f^W$.

Пара $(W_0, \mathcal{F}(W_0))$ входит в рассматриваемую индуктивную систему. Поэтому имеется отображение $f^{W_0}: \mathcal{F}(W_0) \rightarrow \lim_{W \supset W_0} \mathcal{F}(W)$. Определены отображения ограничения $h^W = f_{W_0}^W: \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{F}(W_0)$ и по свойству универсальности индуктивного предела существует единственное отображение $h: \lim_{W \supset W_0} \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{F}(W_0)$.

Теперь рассмотрим диаграмму отображений

$$\begin{array}{ccc} \lim_{W \supset W_0} \mathcal{F}(W) & \xrightarrow{h} & \mathcal{F}(W_0) \\ f^{W_0} \uparrow & \nearrow & \\ \mathcal{F}(W_0) & & \end{array}$$

Здесь f^{W_0} – отображение множества сечений $\mathcal{F}(W_0)$ как элемента индуктивной системы в индуктивный предел, h – (единственное) отображение, индуцированное отображениями h^W по универсальности индуктивного предела. Диагональное вложение – это отображение h^{W_0} , и по смыслу оно тождественно, и $h \circ f^{W_0} = \text{id}_{\mathcal{F}(W_0)}$.

Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(W_0) & \xrightarrow{f^{W_0}} & \lim_{W \supset W_0} \mathcal{F}(W) \\ \uparrow h & \nearrow & \\ \lim_{W \supset W_0} \mathcal{F}(W) & & \end{array}$$

в которой диагональное отображение единственно в силу универсальности индуктивного предела. Следовательно, оно тождественно и $f^{W_0} \circ h = \text{id}_{\lim_{W \supset W_0} \mathcal{F}(W)}$. Таким образом, $\mathcal{F}(W_0) = \lim_{W \supset W_0} \mathcal{F}(W)$.

Итак, $(p_1^{-1}\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(p_1(U))$. Вычислим сечения пучка $f_*p_1^{-1}\mathcal{F}$:

$$(f_*p_1^{-1}\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(p_1f^{-1}(V)) = (\phi_*\mathcal{F})(V).$$

Это доказывает равенство (10).

Тензорное умножение на $1^{\tilde{Y}} \in \mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ определяет морфизм $\mathcal{O}_{\tilde{M}}$ -пучков

$$\cdot \otimes_{p_1^{-1}\mathcal{O}_{\tilde{M}}} 1^{\tilde{Y}} : p_1^{-1}\mathcal{O}_{\tilde{M}} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{Y}}.$$

Он инъективен, так как p_1 – плоский морфизм схем. Применение функтора прямого образа f_* приводит к мономорфизму $\rho := f_*(\cdot \otimes_{p_1^{-1}\mathcal{O}_{\tilde{M}}} 1^{\tilde{Y}}) : f_*p_1^{-1}\mathcal{O}_{\tilde{M}} \rightarrow f_*\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$.

Пусть теперь U – открытое в $\tilde{M}$ подмножество; тогда морфизм пучков $f^\# : \mathcal{O}_{\tilde{M}} \rightarrow f_*\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ порождает гомоморфизм колец $f^\#(U) : \mathcal{O}_{\tilde{M}}(U) \rightarrow (f_*\mathcal{O}_{\tilde{Y}})(U) = \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(f^{-1}(U))$.

Далее, $(f_*p_1^{-1}\mathcal{O}_{\tilde{M}})(U) = p_1^{-1}\mathcal{O}_{\tilde{M}}(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_{\tilde{M}}(p_1f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_{\tilde{M}}(W_0)$, где $W_0 = p_1f^{-1}(U)$ – открытое в $\tilde{M}$ подмножество.

Морфизм схем p_1 порождает гомоморфизм колец

$$p_1^\#(W_0) : \mathcal{O}_{\tilde{M}}(W_0) \rightarrow (p_{1*}\mathcal{O}_{\tilde{Y}})(W_0) = \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(p_1^{-1}p_1f^{-1}(U)).$$

Так как проекция p_2 переводит слой морфизма $p_1 : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{M}$ в слой композиции $\pi \circ \sigma$, то $p_1^{-1}p_1f^{-1}(U) = p_1^{-1}\phi^{-1}(U) = (\phi \circ p_1)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ и, таким образом, $\rho(W_0) = p_1^\#(W_0)$. Для произвольного сечения $s \in \mathcal{O}_{\tilde{M}}(W_0)$ $\rho(s) = s \cdot p_{1*}(1^{\tilde{Y}})$.

Пусть $U_0 = U \cap M_0 \cong W_0 \cap M_0$, и сечение $s' \in \mathcal{O}_{\tilde{M}}(U)$ таково, что ограничения $s'|_{U_0} \in \mathcal{O}_{\tilde{M}}(U_0)$ и $s|_{U_0} \in \mathcal{O}_{\tilde{M}}(U_0)$ отождествляются при изоморфизме $\phi_0 : \mathcal{O}_{\tilde{M}}(U_0) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{M}}(U_0) : \phi_0(s'|_{U_0}) = s|_{U_0}$. Тогда образ сечения $s'|_{U_0}$ при гомоморфизме $f^\#(U_0)$ равен $f^\#(s'|_{U_0}) = (s'|_{U_0}) \cdot f_*(1^{\tilde{Y}})$.

Далее, $\rho\phi_0(s'|_{U_0}) = \rho(s|_{U_0}) = (s|_{U_0}) \cdot p_{1*}(1^{\tilde{Y}})$ и справедливо равенство $(s|_{U_0}) \cdot p_{1*}(1^{\tilde{Y}}) = (s'|_{U_0}) \cdot f_*(1^{\tilde{Y}})$. Осталось убедиться в том, что это равенство можно продолжить до отображения $\phi^\#(U) : \mathcal{O}_{\tilde{M}}(U) \rightarrow \phi_*\mathcal{O}_{\tilde{M}}(U) = (f_*p_1^{-1}\mathcal{O}_{\tilde{M}})(U)$, делающего коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\tilde{M}} & \xrightarrow{f^\#} & f_*\mathcal{O}_{\tilde{Y}} \\ \phi^\# \downarrow & \nearrow \rho & \\ f_*p_1^{-1}\mathcal{O}_{\tilde{M}} & & \end{array}$$

Для этого рассмотрим в $\overline{M}$ открытые подмножества U_1 и U_2 такие, что $U_1 \cup U_2 = U$, $U_1 \cap U_2 = U_0$, причем $s_1 \in (\phi_* \mathcal{O}_{\widetilde{M}})(U_1)$, $s_2 \in (\phi_* \mathcal{O}_{\widetilde{M}})(U_2)$ и $s_1 \cdot p_{1*}(1^{\widetilde{Y}}) = (s'|_{U_1}) \cdot f_*(1^{\widetilde{Y}})$, $s_2 \cdot p_{1*}(1^{\widetilde{Y}}) = (s'|_{U_2}) \cdot f_*(1^{\widetilde{Y}})$. При этом $s_1|_{U_0} = s_2|_{U_0}$. Тогда по аксиоме пучка существует единственное сечение $s \in \mathcal{O}_{\overline{M}}(U)$ такое, что $s|_{U_1} = s_1$, $s|_{U_2} = s_2$. Тогда $s = \phi^\#(s')$, что и требовалось.

Теперь рассмотрим сквозное отображение

$$(\mathrm{id}_{\widetilde{M}}, \sigma \circ p_2): \widetilde{M} \times \widetilde{Y} \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\widetilde{M}}, p_2)} \widetilde{M} \times \widehat{Y} \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\widetilde{M}}, \sigma)} \widetilde{M} \times Y, \quad (11)$$

и вложение $\widetilde{Y} \xrightarrow{p_1 \times \mathrm{id}_{\widetilde{Y}}} \widetilde{M} \times \widetilde{Y}$, определяемое композицией $\widetilde{Y} \xrightarrow{\mathrm{diag}} \widetilde{Y} \times \widetilde{Y} \xrightarrow{(p_1, \mathrm{id}_{\widetilde{Y}})} \widetilde{M} \times \widetilde{Y}$ диагонального вложения и проекции первого сомножителя. Убедимся в том, что образ $\Delta := (\mathrm{id}_{\widetilde{M}}, \sigma \circ p_2)(p_1 \times \mathrm{id}_{\widetilde{Y}})(\widetilde{Y})$ в произведении $\widetilde{M} \times Y$ изоморфен произведению $\widetilde{M} \times S$. Введем обозначения $\widetilde{\Delta} := (p_1 \times \mathrm{id}_{\widetilde{Y}})(\widetilde{Y})$, $\widehat{\Delta} := (\mathrm{id}_{\widetilde{M}}, p_2)(\widetilde{\Delta})$; тогда $\Delta = (\mathrm{id}_{\widetilde{M}}, \sigma)(\widehat{\Delta})$. Здесь $\widetilde{\Delta}$, $\widehat{\Delta}$ и Δ определяются как схемные образы соответствующих морфизмов. Схема $\widetilde{Y}$ приведена и неприводима, и схемный образ представляет собой приведенную структуру на замыкании ее образа, $\widetilde{\Delta} \cong \widetilde{Y}$. Тогда $\widehat{\Delta}$ и Δ – приведенные неприводимые схемы. В силу утверждения 8 $\widehat{\Delta} \cong (\widetilde{h}, j)(\widetilde{M} \times \widehat{Y}) \cap Z = \widetilde{Y} \cong \widetilde{\Delta}$, т.е. $(\mathrm{id}_{\widetilde{M}}, p_2)|_{\widetilde{\Delta}}$ – изоморфизм.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} \times Y & \xlongequal{\quad} & \widetilde{M} \times \overline{M} \times S \\ \uparrow & & \downarrow p_{13} \\ \Delta & \xrightarrow{p_{13}|_{\Delta}} & \widetilde{M} \times S \end{array} \quad (12)$$

где p_{13} – естественная проекция, и замкнутое вложение $((\mathrm{id}_{\widetilde{M}} \times \phi), \mathrm{id}_S): \widetilde{M} \times S \rightarrow \widetilde{M} \times Y$, индуцированное морфизмом ϕ . По построению морфизма ϕ и схемы Δ как схемного образа $(\mathrm{id}_{\widetilde{M}} \times \phi, \mathrm{id}_S)(\widetilde{M} \times S) = \Delta$. Отображение $p_{13}|_{\Delta}$, очевидно, бирационально и по доказанному обладает двусторонним обратным, равным $((\mathrm{id}_{\widetilde{M}} \times \phi), \mathrm{id}_S)$. Таким образом, $p_{13}|_{\Delta}$ – изоморфизм.

Рассмотрим $\mathcal{O}_Y$ -пучок $(\sigma_* \mathcal{L})^{\vee\vee}$. Он рефлексивен, имеет в общей точке ранг 1 и, следовательно, обратим. Пусть $(\sigma_* \widehat{\mathcal{L}})^{\vee\vee} = \mathcal{O}_Y(D)$.

Теперь возьмем на $\widetilde{M} \times \widetilde{Y}$ локально свободный пучок $\mathcal{O}_{\widetilde{M}} \boxtimes \widetilde{\mathbb{E}} \otimes (\sigma \circ p_2)^* \mathcal{O}_Y(-D)$ и вычислим по формуле проекции его прямой образ при морфизме $(\mathrm{id}_{\widetilde{M}}, \sigma \circ p_2)$:

$$(\mathrm{id}_{\widetilde{M}}, \sigma \circ p_2)_*(\mathcal{O}_{\widetilde{M}} \boxtimes \widetilde{\mathbb{E}} \otimes (\sigma \circ p_2)^* \mathcal{O}_Y(-D)) = \mathcal{O}_{\widetilde{M}} \boxtimes (\sigma \circ p_2)_* \widetilde{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{O}_Y(-D).$$

В самом деле, формула проекции здесь применима, поскольку по теореме Зарисского $(\sigma \circ p_2)_* \mathcal{O}_{\widetilde{Y}} = \mathcal{O}_Y$. Используя явный вид пучка

$$\widetilde{\mathbb{E}} = \widetilde{h}_Y^*(\mathcal{O}_H \boxtimes \mathcal{S}|_Z) = p_1^* h^* \mathcal{O}_H \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}} p_2^* j^* \mathcal{S} = p_1^* \mathcal{O}_{\widetilde{M}} \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}} p_2^* j^* \mathcal{S}$$

и соотношение $p_1^* \mathcal{O}_{\widetilde{M}} = \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$, получим

$$\mathcal{O}_{\widetilde{M}} \boxtimes (\sigma \circ p_2)_* \widetilde{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{O}_Y(-D) = \mathcal{O}_{\widetilde{M}} \boxtimes \sigma_* p_{2*} p_2^* j^* \mathcal{S} \otimes \mathcal{O}_Y(-D).$$

По формуле проекции имеем $\sigma_* p_{2*} p_2^* j^* \mathcal{S} = \sigma_*(j^* \mathcal{S} \otimes p_{2*} \mathcal{O}_{\tilde{Y}})$. Имеет место отображение вычисления $\sigma_* j^* \mathcal{S} \otimes \sigma_* p_{2*} \mathcal{O}_{\tilde{Y}} \rightarrow \sigma_*(j^* \mathcal{S} \otimes p_{2*} \mathcal{O}_{\tilde{Y}})$. Стоящий слева пучок равен $\sigma_* j^* \mathcal{S}$. Применив равенство $E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}} = j^* \mathcal{S}$ и тензорное умножение на $\boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{M}}$ и на $\mathcal{O}_Y(-D)$, имеем отображение

$$\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \sigma_*(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}) \otimes \mathcal{O}_Y(-D) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \sigma_*(j^* \mathcal{S} \otimes p_{2*} \mathcal{O}_{\tilde{Y}}) \otimes \mathcal{O}_Y(-D)$$

пучков одинакового ранга, совпадающих вне подмножества коразмерности 3. Тогда $(\sigma_*(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}))^{\vee\vee} = (\sigma_*(j^* \mathcal{S} \otimes p_{2*} \mathcal{O}_{\tilde{Y}}))^{\vee\vee}$ и

$$((\text{id}_{\tilde{M}}, \sigma \circ p_2)_*(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \tilde{\mathbb{E}} \otimes (\sigma \circ p_2)^* \mathcal{O}_Y(-D)))^{\vee\vee} = \mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes (\sigma_*(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}))^{\vee\vee} \otimes \mathcal{O}_Y(-D).$$

Рассмотрим морфизм $\sigma_* E^\vee \otimes \sigma_* \widehat{\mathcal{L}} \rightarrow \sigma_*(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}})$ и связанный с ним морфизм рефлексивных оболочек $(\sigma_* E^\vee \otimes \sigma_* \widehat{\mathcal{L}})^{\vee\vee} \rightarrow (\sigma_*(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}))^{\vee\vee}$. Когерентные рефлексивные пучки $(\sigma_* E^\vee \otimes \sigma_* \widehat{\mathcal{L}})^{\vee\vee}$ и $(\sigma_*(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}))^{\vee\vee}$ на гладком комплексном многообразии Y совпадают вне подмножества коразмерности 3. Следовательно, $(\sigma_* E^\vee \otimes \sigma_* \widehat{\mathcal{L}})^{\vee\vee} = (\sigma_*(E^\vee \otimes \widehat{\mathcal{L}}))^{\vee\vee}$.

Умножая канонический морфизм $\mu: \sigma_* \widehat{\mathcal{L}} \rightarrow (\sigma_* \widehat{\mathcal{L}})^{\vee\vee} = \mathcal{O}_Y(D)$ тензорно на $\sigma_* E^\vee$, получим морфизм $\mathcal{O}_Y$ -пучков $\mu_E: \sigma_* E^\vee \otimes \sigma_* \widehat{\mathcal{L}} \rightarrow \sigma_* E^\vee \otimes \mathcal{O}_Y(D)$. Тогда имеется индуцированное отображение дважды двойственных пучков

$$(\mu_E)^{\vee\vee}: (\sigma_* E^\vee \otimes \sigma_* \widehat{\mathcal{L}})^{\vee\vee} \rightarrow (\sigma_* E^\vee \otimes \mathcal{O}_Y(D))^{\vee\vee}.$$

Для пучка, стоящего справа, согласно предложению 3 справедливо равенство

$$(\sigma_* E^\vee \otimes \mathcal{O}_Y(D))^{\vee\vee} = \mathbb{E} \otimes \mathcal{O}_Y(D) = \mathbb{E}(D).$$

Итак, получено отображение $(\mu_E)^{\vee\vee}: (\sigma_* E^\vee \otimes \sigma_* \widehat{\mathcal{L}})^{\vee\vee} \rightarrow \mathbb{E}(D)$ рефлексивных пучков, совпадающих вне подмножества коразмерности 3. Имеем равенство

$$(\sigma_* E^\vee \otimes \sigma_* \widehat{\mathcal{L}})^{\vee\vee} = \mathbb{E}(D).$$

Принимая во внимание изоморфизм $\Delta \cong \tilde{M} \times S$ и выбрав произвольную точку $\tilde{y} \in \tilde{M}$, рассмотрим пучок

$$\begin{aligned} ((\text{id}_{\tilde{M}}, \sigma \circ p_2)_*(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \tilde{\mathbb{E}} \otimes (\sigma \circ p_2)^* \mathcal{O}_Y(-D)))^{\vee\vee}|_{\Delta}|_{\{\tilde{y}\} \times S} &= ((\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E})|_{\Delta})|_{\{\tilde{y}\} \times S} \\ &= k_{\tilde{y}} \boxtimes (\mathbb{E}|_{\{\phi(\tilde{y})\} \times S}) = k_{\tilde{y}} \boxtimes \mathcal{E}_{\phi(\tilde{y})}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем явное описание морфизма $\phi: \tilde{M} \rightarrow \overline{M}$:

$$\tilde{y} \mapsto (((\text{id}_{\tilde{M}}, \sigma \circ p_2)_*(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \tilde{\mathbb{E}} \otimes (\sigma \circ p_2)^* \mathcal{O}_Y(-D)))^{\vee\vee}|_{\Delta})|_{\{\tilde{y}\} \times S}.$$

Итак, доказана

ТЕОРЕМА. Для стабильных векторных расслоений ранга 2 на гладкой проективной алгебраической поверхности с классами Чженя c_1, c_2 существует компактификация $\tilde{M}$ тонкого пространства модулей вместе с ее вложением в схему Гильберта H подсем с фиксированным многочленом Гильберта в многообразии Грассмана G , включающаяся в диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{p_{13}(\text{id}_{\tilde{M}}, \sigma \circ p_2)(p_1 \times \text{id}_{\tilde{Y}})} & \tilde{M} \times S \\ p_1 \downarrow & \swarrow \pi & \\ \tilde{M} & & \end{array}$$

где $\widetilde{Y}$ – ограничение универсального семейства подсхем на $\widetilde{M} \subset H$. Морфизмы $(\text{id}_{\widetilde{M}}, \sigma \circ p_2)$, $(p_1 \times \text{id}_{\widetilde{Y}})$ и p_{13} определены в (11) и (12). Кроме того, имеется регулярный бирациональный морфизм новой компактификации на компактификацию Гизекера–Маруямы, определяемый выражением

$$\phi: \widetilde{M} \rightarrow \overline{M}: \tilde{y} \mapsto (((\text{id}_{\widetilde{M}}, \sigma \circ p_2)_*(\mathcal{O}_{\widetilde{M}} \boxtimes \widetilde{\mathbb{E}} \otimes (\sigma \circ p_2)^* \mathcal{O}_Y(-D)))^{\vee\vee}|_{\Delta})|_{\{\tilde{y}\} \times S},$$

в котором $\widetilde{\mathbb{E}}$ – локально свободный $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$ -пучок, Δ – подсхема в $\widetilde{M} \times Y$, изоморфная произведению $\widetilde{M} \times S$, D – класс дивизоров на многообразии Y , не зависящий от точки $\tilde{y} \in \widetilde{M}$. При этом диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{\pi \sigma p_2} & \overline{M} \\ p_1 \downarrow & \nearrow \phi & \\ \widetilde{M} & & \end{array}$$

коммутативна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Gieseker, “On the moduli of vector bundles on an algebraic surface”, *Ann. of Math.* (2), **106**:1 (1977), 45–60.
- [2] D. Huybrechts, M. Lehn, *Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*, Aspects of Mathematics, **E31**, Vieweg, Braunschweig, 1997.
- [3] H. Hironaka, “Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I.”, *Ann. of Math.* (2), **79**:1 (1964), 109–203.
- [4] А. С. Тихомиров, “Многообразие полных пар нульмерных подсхем алгебраической поверхности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:6 (1997), 153–180.
- [5] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981.
- [6] R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry. I.*, Classical setting: line bundles and linear series, *Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete. 3 Folge A Series of Modern Surveys in Mathematics*, **48**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [7] У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, М., 1989.
- [8] Р. Годеман, *Алгебраическая топология и теория пучков*, ИЛ, М., 1961.

Н. В. Тимофеева

Ярославский государственный педагогический университет

им. К. Д. Ушинского

E-mail: ntimofeeva@list.ru

Поступило

27.04.2006

Исправленный вариант

28.05.2007