Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Трофимов, О максимально быстром удалении от вершины в ориентированном регулярном графе, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 5, 770–782

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4088>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:22:48

О максимально быстром удалении от вершины в ориентированном регулярном графе

В. И. Трофимов

Пусть Γ – ориентированный регулярный локально конечный граф и $\bar{\Gamma}$ – неориентированный граф, получающийся из Γ снятием ориентации. Пусть x – некоторая вершина графа Γ и n – некоторое неотрицательное целое число. В работе исследуется вопрос о длине кратчайшего ориентированного пути графа Γ , начинающегося в x и заканчивающегося вне шара радиуса n с центром x графа $\bar{\Gamma}$.

Библиография: 1 название.

1. Введение. Пусть Γ – ориентированный граф, X – конечное подмножество множества вершин графа Γ и $x \in X$. В настоящей работе рассматривается вопрос о длине кратчайшего ориентированного пути графа Γ , начинающегося в x и заканчивающегося вне X , т.е. вопрос о максимально быстром выходе из X по ориентированным путям, начинающимся в x . Определим на множестве неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ функцию $\alpha_{\Gamma,x}$ со значениями в $\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, характеризующую максимально быстрое удаление от вершины x в графе Γ по ориентированным путям. Пусть $\bar{\Gamma}$ – неориентированный граф, получающийся из Γ снятием ориентации (точные определения этого и ряда других используемых в п. 1 понятий см. в п. 2). Тогда $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ для $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ определяется следующими образом: если в графе Γ существуют ориентированные пути, начинающиеся в x и заканчивающиеся вне шара радиуса n с центром x графа $\bar{\Gamma}$, то $\alpha_{\Gamma,x}(n) + 1$ есть наименьшая из длин таких путей; если же в графе Γ нет ориентированных путей, начинающихся в x и заканчивающихся вне шара радиуса n с центром x графа $\bar{\Gamma}$, то полагаем $\alpha_{\Gamma,x}(n) = \infty$. Нас будет интересовать поведение функции $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ для локально конечных регулярных графов Γ со связными графами $\bar{\Gamma}$. Заметим, что, если подмножество X множества вершин графа Γ содержит шар радиуса n_1 , $n_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, с центром x графа $\bar{\Gamma}$ и содержится в шаре радиуса n_2 , $n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, с центром x графа $\bar{\Gamma}$, то длина кратчайшего среди ориентированных путей графа Γ , начинающихся в x и заканчивающихся вне X (если такие пути существуют), ограничена снизу величиной $\alpha_{\Gamma,x}(n_1) + 1$ и ограничена сверху величиной $\alpha_{\Gamma,x}(n_2) + 1$. В частности, эта длина ограничена сверху величиной $\alpha_{\Gamma,x}(\text{diam}_{\bar{\Gamma}}(X)) + 1$, где $\text{diam}_{\bar{\Gamma}}(X)$ – диаметр множества X в графе $\bar{\Gamma}$.

Настоящая работа примыкает к работе [1]. В [1] для произвольного ориентированного локально конечного графа Γ с транзитивной на множестве вершин группой

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00378).

автоморфизмов и со связным графом $\bar{\Gamma}$ доказано, что в случае $\deg^+(\Gamma) \neq \deg^-(\Gamma)$ справедливо

$$\alpha_{\Gamma,x}(n) = n,$$

где x – произвольная вершина графа Γ и n – произвольное неотрицательное целое число, а в случае $\deg^+(\Gamma) = \deg^-(\Gamma) > 0$ справедливо

$$\alpha_{\Gamma,x}(n) \leq kn^2,$$

где x – произвольная вершина графа Γ , k – вещественное число, зависящее лишь от $\deg^+(\Gamma)$ (например, можно положить $k = 3(\deg^+(\Gamma) + 1) \log_2(2 \deg^+(\Gamma))$), и n – произвольное неотрицательное целое число, если граф Γ бесконечен, и произвольное неотрицательное целое число, не превосходящее $(\text{diam}(\bar{\Gamma}) + 1)/2$, если граф Γ конечен. Отметим, что следствием этого результата является существование для произвольной бесконечной конечно порожденной группы $G = \langle g_1, \dots, g_d \rangle$ и произвольного $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ слова длины $\leq 3(d+1) \log_2(2d)n^2 + 1$ над алфавитом $\{g_1, \dots, g_d\}$, представляющего элемент группы G , который не может быть представлен словом длины $\leq n$ над алфавитом $\{g_1, g_1^{-1}, \dots, g_d, g_d^{-1}\}$.

В настоящей работе показывается, что при переходе к (более широкому, чем класс ориентированных локально конечных графов Γ с транзитивной на множестве вершин группой автоморфизмов и со связным графом $\bar{\Gamma}$) классу ориентированных локально конечных регулярных графов Γ со связными графами $\bar{\Gamma}$ возможное поведение функций $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ становится существенно более разнообразным. А именно, в работе доказывается, что в случае $\deg^+(\Gamma) > \deg^-(\Gamma)$ функция $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ ограничена сверху линейной функцией от n (но значения $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ могут, вообще говоря, превосходить n); в случае $\deg^+(\Gamma) = \deg^-(\Gamma)$ функция $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ ограничена сверху экспоненциальной функцией от n , причем существуют как бесконечные, так и сколь угодно большие с фиксированными in- и out-степенями конечные графы Γ , у которых функции $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ для подходящих вершин x ограничены снизу фиксированной экспоненциальной функцией от n ; наконец, в случае $\deg^+(\Gamma) < \deg^-(\Gamma)$ для произвольных положительных целых чисел k, l с условием $k < l$ существуют (с необходимостью бесконечные) графы Γ с $\deg^+(\Gamma) = k$, $\deg^-(\Gamma) = l$ и со связными графами $\bar{\Gamma}$ такие, что $\alpha_{\Gamma,x}(n) = \infty$ для некоторой вершины x графа Γ и некоторого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Рассмотрению случаев $\deg^+(\Gamma) > \deg^-(\Gamma)$, $\deg^+(\Gamma) = \deg^-(\Gamma)$ и $\deg^+(\Gamma) < \deg^-(\Gamma)$ посвящены соответственно п. 3, п. 4 и п. 5 работы. В п. 6 работы указываются некоторые направления исследований, в связи с которыми результаты настоящей работы представляют интерес.

2. Используемая терминология и предварительные результаты. В настоящей работе используется следующая терминология.

Если Γ – ориентированный граф, то $V(\Gamma)$ – множество вершин Γ и $E(\Gamma) (\subseteq V(\Gamma) \times V(\Gamma) \setminus \text{diag}(V(\Gamma) \times V(\Gamma)))$ – множество ребер Γ . Для $(x, y) \in E(\Gamma)$ вершины x и y называются соответственно *начальной вершиной* и *конечной вершиной* ребра (x, y) . Произвольная последовательность $(x_0, \dots, x_n)$, где $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x_i \in V(\Gamma)$ для всех $0 \leq i \leq n$ и $(x_i, x_{i+1}) \in E(\Gamma)$ для всех $0 \leq i < n$, называется *ориентированным путем* (длины n) графа Γ . Произвольная последовательность $(x_0, \dots, x_n)$, где $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x_i \in V(\Gamma)$ для всех $0 \leq i \leq n$ и $(x_i, x_{i+1}) \in E(\Gamma)$ или $(x_{i+1}, x_i) \in E(\Gamma)$ для всех $0 \leq i < n$, называется *неориентированным путем* (длины n) графа Γ . Вер-

шина x_0 называется начальной вершиной ориентированного (неориентированного) пути $(x_0, \dots, x_n)$, а вершина x_n – его конечной вершиной. Ориентированный (неориентированный) путь $(y_0, \dots, y_m)$ графа Γ называется *подпутем* ориентированного (соответственно неориентированного) пути $(x_0, \dots, x_n)$ графа Γ , если $y_i = x_{i_0+i}$ для некоторого $0 \leq i_0 \leq n$ и всех $0 \leq i \leq m$.

Пусть Γ – ориентированный граф и $x \in V(\Gamma)$. Для каждого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ через $\Gamma^n(x)$ обозначается множество конечных вершин ориентированных путей графа Γ длины $\leq n$ с начальной вершиной x , а через $\Gamma^{-n}(x)$ – множество начальных вершин ориентированных путей графа Γ длины $\leq n$ с конечной вершиной x . Кроме того, $\Gamma^\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Gamma^n(x)$. Далее, $\deg_\Gamma^+(x) := |\Gamma^1(x) \setminus \{x\}|$ есть out-степень вершины x (в графе Γ), а $\deg_\Gamma^-(x) := |\Gamma^{-1}(x) \setminus \{x\}|$ – in-степень вершины x (в графе Γ). Если out-степень и in-степень каждой вершины графа Γ конечны, то граф Γ называется *локально конечным*. Если out-степени всех вершин графа Γ совпадают и in-степени всех вершин графа Γ совпадают, то граф Γ называется *регулярным*. В последнем случае через $\deg^+(\Gamma)$ обозначается out-степень произвольной вершины графа Γ , а через $\deg^-(\Gamma)$ – in-степень произвольной вершины графа Γ .

Ориентированный граф Δ называется *подграфом* ориентированного графа Γ , если $V(\Delta) \subseteq V(\Gamma)$ и $E(\Delta) \subseteq E(\Gamma)$.

Далее, если Ω – неориентированный граф, то $V(\Omega)$ – множество вершин Ω и $E(\Omega)$ – множество ребер Ω . При этом предполагается, что элементы из $E(\Omega)$ являются двухэлементными подмножествами множества $V(\Omega)$ (в частности, Ω не имеет ни петель, ни кратных ребер). Произвольная последовательность $(x_0, \dots, x_n)$, где $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x_i \in V(\Omega)$ для всех $0 \leq i \leq n$ и $\{x_i, x_{i+1}\} \in E(\Omega)$ для всех $0 \leq i < n$, называется *путем* (длины n) графа Ω . Вершина x_0 называется начальной вершиной этого пути, а вершина x_n – его конечной вершиной.

Пусть Ω – неориентированный граф. Для $x, y \in V(\Omega)$ через $d_\Omega(x, y)$ обозначается минимум длин путей графа Ω с начальной вершиной x и конечной вершиной y в случае, если такие пути существуют, и ∞ в противном случае. Для $X \subseteq V(\Omega)$ полагаем $\text{diam}_\Omega(X) = \max\{d_\Omega(x', x'') \mid x', x'' \in X\}$ в случае, если $\{d_\Omega(x', x'') \mid x', x'' \in X\}$ – ограниченное подмножество множества $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, и $\text{diam}_\Omega(X) = \infty$ в противном случае. Полагаем, кроме того, $\text{diam}(\Omega) := \text{diam}_\Omega(V(\Omega))$. Для $x \in V(\Omega)$ и $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ через $\Omega^n(x)$ обозначается множество конечных вершин путей графа Ω длины $\leq n$ с начальной вершиной x (шар радиуса n с центром x графа Ω). Кроме того, $\Omega^\infty(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Omega^n(x)$ (связная компонента графа Ω , содержащая вершину x). Ясно, что в случае, когда степени всех вершин неориентированного графа Ω не превосходят целого числа $d \geq 2$, для произвольных $x \in V(\Omega)$ и $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеем $|\Omega^n(x)| \leq (3/2)d^n$ (поскольку $|\Omega^n(x)| \leq 1 + d + d(d-1) + \dots + d(d-1)^{n-1}$ при $n > 1$).

Для произвольного ориентированного графа Γ через $\bar{\Gamma}$ обозначается неориентированный граф с множеством вершин $V(\bar{\Gamma}) = V(\Gamma)$ и множеством ребер $E(\bar{\Gamma}) = \{\{x', y'\} \mid (x', y') \in E(\Gamma) \text{ или } (y', x') \in E(\Gamma)\}$. Отметим, что во введенных обозначениях определенная в п. 1 (для произвольных ориентированного графа Γ и вершины x этого графа) функция $\alpha_{\Gamma, x}: \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ задается следующим образом:

$$\alpha_{\Gamma, x}(n) = \max\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \mid \Gamma^m(x) \subseteq \bar{\Gamma}^n(x)\}.$$

Для вещественного числа r через $\lfloor r \rfloor$ обозначаются наибольшее целое число $\leq r$, а через $\lceil r \rceil$ – наименьшее целое число $\geq r$.

В дальнейшем нам потребуются следующие простые утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть Γ – ориентированный локально конечный граф, X – собственное конечное подмножество множества $V(\Gamma)$ и $x \in X$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если в графе Γ существует ориентированный путь, начинающийся в x и заканчивающийся вне X , то в Γ существует также ориентированный путь длины $\leq |X|$, начинающийся в x и заканчивающийся вне X .

2) Если $\deg_{\Gamma}^{+}(y) \geq \deg_{\Gamma}^{-}(y)$ для каждой вершины y графа Γ и граф $\bar{\Gamma}$ связан, то в Γ существует ориентированный путь, начинающийся в x и заканчивающийся вне X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения 1) достаточно заметить, что кратчайший ориентированный путь графа Γ , начинающийся в x и заканчивающийся вне X , не может проходить более одного раза через какую бы то ни было вершину из X .

Для доказательства утверждения 2) предположим, что оно не выполняется. Тогда $\Gamma^{\infty}(x) \subseteq X$ и, в частности, $\Gamma^{\infty}(x)$ – собственное конечное подмножество множества $V(\Gamma)$. Поскольку в графе Γ число ребер, заканчивающихся в $\Gamma^{\infty}(x)$, равно $\sum_{z \in \Gamma^{\infty}(x)} \deg_{\Gamma}^{-}(z)$, а число ребер, начинающихся в $\Gamma^{\infty}(x)$, равно $\sum_{z \in \Gamma^{\infty}(x)} \deg_{\Gamma}^{+}(z)$, причем каждое ребро, начинающееся в $\Gamma^{\infty}(x)$, заканчивается в $\Gamma^{\infty}(x)$, то с учетом $\deg_{\Gamma}^{+}(z) \geq \deg_{\Gamma}^{-}(z)$ для всех $z \in \Gamma^{\infty}(x)$ получаем, что множество ребер графа Γ , начинающихся в $\Gamma^{\infty}(x)$, совпадает с множеством ребер графа Γ , заканчивающихся в $\Gamma^{\infty}(x)$. Последнее противоречит связности графа $\bar{\Gamma}$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть Γ – ориентированный локально конечный граф со связным графом $\bar{\Gamma}$. Предположим, что $\deg_{\Gamma}^{+}(y) \geq \deg_{\Gamma}^{-}(y)$ для всех $y \in V(\Gamma)$, причем числа $\deg_{\Gamma}^{+}(y)$, $y \in V(\Gamma)$, ограничены в совокупности. Пусть, кроме того, $x \in V(\Gamma)$ и n – неотрицательное целое число такое, что $\bar{\Gamma}^n(x) \neq V(\Gamma)$. Тогда

$$\alpha_{\Gamma,x}(n) \leq |\bar{\Gamma}^n(x)| \leq \frac{3}{2}(\max\{\deg_{\Gamma}^{+}(y) + \deg_{\Gamma}^{-}(y) \mid y \in V(\Gamma)\})^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя предложение 2.1 к подмножеству $\bar{\Gamma}^n(x)$ (в качестве X) и вершине x , получаем требуемое.

3. Регулярные графы Γ с $\deg^{+}(\Gamma) > \deg^{-}(\Gamma)$. Как показывает следующая теорема, в этом случае для $x \in V(\Gamma)$ функция $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ ограничена сверху линейной функцией cn , где c зависит лишь от $\deg^{+}(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть Γ – ориентированный локально конечный регулярный граф с $\deg^{+}(\Gamma) > \deg^{-}(\Gamma)$. Тогда найдется положительное целое число c_{Γ} (например, в качестве c_{Γ} можно взять число $\lceil \log_{\deg^{+}(\Gamma)/\deg^{-}(\Gamma)}((3/2)(\deg^{+}(\Gamma) + \deg^{-}(\Gamma))) \rceil$) такое, что для произвольной вершины x графа Γ и произвольного неотрицательного целого числа n справедливо неравенство

$$\alpha_{\Gamma,x}(n) \leq c_{\Gamma}n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x – произвольная вершина графа Γ . Для произвольного $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ каждое ребро графа Γ с началом в $\Gamma^m(x)$ заканчивается в $\Gamma^{m+1}(x)$. Следовательно,

$$|\Gamma^m(x)| \deg^{+}(\Gamma) \leq |\Gamma^{m+1}(x)| \deg^{-}(\Gamma). \quad (3.1)$$

Отсюда для произвольного $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ получаем

$$|\Gamma^n(x)| \geq \left(\frac{\deg^+(\Gamma)}{\deg^-(\Gamma)} \right)^n.$$

Так как

$$|\bar{\Gamma}^n(x)| \leq \frac{3}{2}(\deg^+(\Gamma) + \deg^-(\Gamma))^n,$$

это влечет

$$|\Gamma^{cn}(x)| \geq |\bar{\Gamma}^n(x)|,$$

где

$$c_{\Gamma} := \left\lceil \log_{\deg^+(\Gamma)/\deg^-(\Gamma)} \left(\frac{3}{2}(\deg^+(\Gamma) + \deg^-(\Gamma)) \right) \right\rceil.$$

С учетом

$$\Gamma^{cn}(x) \subsetneq \Gamma^{cn+1}(x)$$

(см. (3.1)) отсюда следует

$$\alpha_{\Gamma,x}(n) \leq c_{\Gamma}n,$$

что завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Легко привести пример ориентированного локально конечного регулярного графа Γ с $\deg^+(\Gamma) > \deg^-(\Gamma)$ и со связным графом $\bar{\Gamma}$ такого, что для некоторой вершины x графа Γ и всех $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ справедливо $\alpha_{\Gamma,x}(n) > n$. (Напомним, что согласно [1; предложение 3.2] если Γ – ориентированный локально конечный вершинно-симметрический граф с $\deg^+(\Gamma) > \deg^-(\Gamma)$, то $\alpha_{\Gamma,x}(n) = n$ для всех $x \in V(\Gamma)$ и всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.)

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. С учетом теоремы 3.1 для произвольных положительных целых чисел $d^+ > d^-$ корректно определено положительное целое число $c(d^+, d^-)$, являющееся наименьшим среди положительных целых чисел c таких, что для произвольного ориентированного локально конечного регулярного графа Γ с $\deg^+(\Gamma) = d^+$, $\deg^-(\Gamma) = d^-$ и со связным графом $\bar{\Gamma}$, для произвольной вершины x графа Γ и для произвольного неотрицательного целого числа n справедливо неравенство $\alpha_{\Gamma,x}(n) \leq cn$. Представляется интересным исследовать функцию $c(d^+, d^-)$.

4. Регулярные графы Γ с $\deg^+(\Gamma) = \deg^-(\Gamma)$. Согласно следствию 2.2 если Γ – ориентированный регулярный граф с $\deg^+(\Gamma) = \deg^-(\Gamma)$ и со связным графом $\bar{\Gamma}$, то для $x \in V(\Gamma)$ и произвольного неотрицательного целого числа n такого, что $\Gamma^n(x) \neq V(\Gamma)$, имеем

$$\alpha_{\Gamma,x}(n) \leq |\bar{\Gamma}^n(x)| \leq \frac{3}{2}(\deg^+(\Gamma) + \deg^-(\Gamma))^n.$$

В частности, при дополнительном предположении, что Γ – бесконечный локально конечный граф, функция $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ ограничена сверху экспоненциальной функцией от n . Ниже (см. теорему 4.1) будет показано, что экспоненциальный рост функции при этом достигим. Здесь уместно напомнить, что согласно [1; теорема 5.1] если Γ – ориентированный бесконечный локально конечный вершинно-симметрический граф с $\deg^+(\Gamma) = \deg^-(\Gamma)$ и со связным графом $\bar{\Gamma}$, то для подходящего вещественного числа k , зависящего лишь от $\deg^+(\Gamma)$ (например, для $k = 3(\deg^+(\Gamma) + 1) \log_2(2d)$),

и всех положительных целых чисел n справедливо $\alpha_{\Gamma,x}(n) \leq kn^2$, где x – произвольная вершина графа Γ . Кроме того, согласно [1; теорема 5.1] если Γ – ориентированный конечный вершинно-симметрический граф со связным графом $\bar{\Gamma}$, то для подходящего вещественного числа k , зависящего лишь от $\deg^+(\Gamma)$ (например, для $k = 2(\deg^+(\Gamma) + 1)\log_2(2d)$), и всех положительных целых чисел n , меньших $\text{diam}(\bar{\Gamma})/2 + 1$, справедливо $\alpha_{\Gamma,x}(n) \leq kn^2$, где x – произвольная вершина графа Γ .

ТЕОРЕМА 4.1. 1) *Существуют вещественное число $r > 1$ и ориентированные бесконечные локально конечные регулярные графы Γ с $\deg^+(\Gamma) = \deg^-(\Gamma)$ и со связными графами $\bar{\Gamma}$ такие, что для некоторой вершины x графа Γ неравенство $\alpha_{\Gamma,x}(n) \geq r^n$ справедливо для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

2) *Существуют вещественное число $r' > 1$ и ориентированные сколь угодно большие конечные регулярные графы Γ с фиксированными $\deg^+(\Gamma) = \deg^-(\Gamma)$ и со связными графами $\bar{\Gamma}$ такие, что для некоторой вершины x графа Γ неравенство $\alpha_{\Gamma,x}(n) \geq r'^n$ справедливо для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для построения графов Γ с требуемыми в утверждении 1) теоремы свойствами (для некоторого вещественного числа $r > 1$) зафиксируем некоторое целое число $a > 1$ и некоторую последовательность $s(1), s(2), \dots$ целых чисел такую, что $1 < s(i) \leq a$ для всех $i \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Индуктивно определим для каждого положительного целого числа j ориентированный граф $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$ с выделенными “начальной” вершиной u_j и “конечной” вершиной v_j , для которых

$$\begin{aligned} \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^+(u_j) &= 2, & \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^-(u_j) &= 1, \\ \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^+(v_j) &= 1, & \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^-(v_j) &= 2, \end{aligned}$$

в то время как для произвольной отличной от u_j, v_j вершины z графа $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$ справедливо $\deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^+(z) = \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^-(z) = 2$.

При $j = 1$ полагаем

$$\begin{aligned} V(\Gamma_{s(1)}) &= \{u_1, x_1, \dots, x_{s(1)-1}, x'_1, \dots, x'_{s(1)-1}, y_1, \dots, y_{s(1)-1}, \\ &\quad y'_1, \dots, y'_{s(1)-1}, z_1, \dots, z_{s(1)-1}, z'_1, \dots, z'_{s(1)-1}, v_1\}, \\ E(\Gamma_{s(1)}) &= \{(u_1, x_1), (u_1, x'_1), (x_{s(1)-1}, v_1), (x'_{s(1)-1}, v_1), (v_1, u_1)\} \\ &\quad \cup \{(x_i, x_{i+1}), (x'_i, x'_{i+1}) \mid 1 \leq i < s(1) - 1\} \\ &\quad \cup \{(x_i, y_i), (y_i, y'_i), (y'_i, x'_i), (x'_i, z'_i), (z'_i, z_i), (z_i, x_i), \\ &\quad (y_i, z_i), (y'_i, z'_i), (z_i, y'_i), (z'_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq s(1) - 1\}. \end{aligned}$$

Заметим, что для произвольной отличной от u_1, v_1 вершины z графа $\Gamma_{s(1)}$ справедливо $\deg_{\Gamma_{s(1)}}^+(z) = \deg_{\Gamma_{s(1)}}^-(z) = 2$. В то же время, $\deg_{\Gamma_{s(1)}}^+(u_1) = 2$, $\deg_{\Gamma_{s(1)}}^-(u_1) = 1$, $\deg_{\Gamma_{s(1)}}^+(v_1) = 1$, $\deg_{\Gamma_{s(1)}}^-(v_1) = 2$.

Пусть теперь для некоторого $j > 1$ уже определен граф $\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}$ с “начальной” вершиной u_{j-1} и “конечной” вершиной v_{j-1} ; таким образом, для произвольной отличной от u_{j-1}, v_{j-1} вершины z графа $\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}$ справедливо

$$\deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}}^+(z) = \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}}^-(z) = 2,$$

в то время как

$$\begin{aligned}\deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}}^+(u_{j-1}) &= 2, & \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}}^-(u_{j-1}) &= 1, \\ \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}}^+(v_{j-1}) &= 1, & \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}}^-(v_{j-1}) &= 2.\end{aligned}$$

Пусть $\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}^{(1)}, \dots, \Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}^{(s(j)-1)}$ – графы, изоморфные $\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}$, причем множества $V(\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}), V(\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}^{(1)}), \dots, V(\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}^{(s(j)-1)})$ попарно не пересекаются. Для каждого $k \in \{1, \dots, s(j) - 1\}$ граф $\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}^{(k)}$ имеет единственную “начальную” вершину $u_{j-1}^{(k)}$, для которой

$$\deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}^{(k)}}^+(u_{j-1}^{(k)}) = 2, \quad \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}^{(k)}}^-(u_{j-1}^{(k)}) = 1,$$

и единственную “конечную” вершину $v_{j-1}^{(k)}$, для которой

$$\deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}^{(k)}}^+(v_{j-1}^{(k)}) = 1, \quad \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}^{(k)}}^-(v_{j-1}^{(k)}) = 2.$$

Определим ориентированный граф Γ' , полагая

$$\begin{aligned}V(\Gamma') &= V(\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}) \cup \bigcup_{1 \leq k \leq s(j)-1} V(\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}^{(k)}), \\ E(\Gamma') &= (E(\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)})) \cup \{(v_{j-1}, u_{j-1}^{(1)})\} \\ &\cup \bigcup_{1 \leq k \leq s(j)-1} (E(\Gamma_{s(1), \dots, s(j-1)}^{(k)}) \cup \{(v_{j-1}^{(k)}, u_{j-1}^{(k+1)})\}).\end{aligned}$$

Заметим, что граф Γ' имеет “начальную” вершину $u' := u_{j-1}$ и “конечную” вершину $v' := v_{j-1}^{s(j)-1}$ такие, что для произвольной отличной от u' , v' вершины z графа Γ' справедливо $\deg_{\Gamma'}^+(z) = \deg_{\Gamma'}^-(z) = 2$, в то время как $\deg_{\Gamma'}^+(u') = 2$, $\deg_{\Gamma'}^-(u') = 1$, $\deg_{\Gamma'}^+(v') = 1$, $\deg_{\Gamma'}^-(v') = 2$. Пусть Γ'' – граф, изоморфный Γ' , причем множества $V(\Gamma')$ и $V(\Gamma'')$ не пересекаются. Будучи изоморфным Γ' , граф Γ'' имеет единственную “начальную” вершину u'' (со свойством $\deg_{\Gamma''}^+(u'') = 2$ и $\deg_{\Gamma''}^-(u'') = 1$) и единственную “конечную” вершину v'' (со свойством $\deg_{\Gamma''}^+(v'') = 1$ и $\deg_{\Gamma''}^-(v'') = 2$). Определим, наконец, ориентированный граф $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$, полагая

$$V(\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}) = V(\Gamma') \cup V(\Gamma'') \cup \{u_j, v_j\}$$

(предполагается, что $\{u_j, v_j\} \cap (V(\Gamma') \cup V(\Gamma'')) = \emptyset$) и

$$E(\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}) = E(\Gamma') \cup E(\Gamma'') \cup \{(u_j, u'), (u_j, u''), (v', v_j), (v'', v_j), (v_j, u_j)\}.$$

Заметим, что для произвольной отличной от u_j , v_j вершины z графа $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$ имеем $\deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^+(z) = \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^-(z) = 2$, в то время как

$$\begin{aligned}\deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^+(u_j) &= 2, & \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^-(u_j) &= 1, \\ \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^+(v_j) &= 1, & \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^-(v_j) &= 2.\end{aligned}$$

Таким образом, u_j является “начальной” вершиной графа $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$, а v_j – его “конечной” вершиной.

Легко убедиться, что построенные ориентированные графы $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$, где j пробегает множество всех положительных целых чисел, с выделенными “начальными” вершинами u_j и “конечными” вершинами v_j , обладают следующими свойствами (1)–(5). (Справедливость утверждений (1)–(3) очевидна. Справедливость утверждений (4) и (5) легко устанавливается индукцией по j .)

(1) Для каждого положительного целого числа j граф $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$ является подграфом графа $\Gamma_{s(1), \dots, s(j), s(j+1)}$, причем

$$\deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j), s(j+1)}}^+(z) = \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j), s(j+1)}}^-(z) = 2$$

для произвольной вершины z графа $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$.

(2) Для произвольных положительных целых чисел j, j' с условием $j < j'$ и произвольной вершины z графа $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$ справедливы равенства

$$\Gamma_{s(1), \dots, s(j')}^1(z) = \Gamma_{s(1), \dots, s(j), s(j+1)}^1(z), \quad \Gamma_{s(1), \dots, s(j')}^{-1}(z) = \Gamma_{s(1), \dots, s(j), s(j+1)}^{-1}(z).$$

(3) Для произвольных положительных целых чисел j, j' с условием $j < j'$ каждый ориентированный путь графа $\Gamma_{s(1), \dots, s(j')}$, начинающийся в u_1 и заканчивающийся вне $V(\Gamma_{s(1), \dots, s(j)})$, содержит в качестве подпути ориентированный путь графа $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$, начинающийся в u_1 и заканчивающийся в v_j .

(4) Для произвольного положительного целого числа j каждый ориентированный путь графа $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$, начинающийся в u_1 или в u_j и заканчивающийся в v_j , имеет длину $\geq 2^j$.

(5) Существует вещественное число b (например, в качестве b можно взять число $2a - 1$) такое, что для произвольного положительного целого числа j и произвольной вершины z графа $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$ в графе $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$ найдется неориентированный путь длины $\leq bj$, начинающийся в u_j и заканчивающийся в z .

Из (1) и (2) следует, что условиями

$$V(\Gamma_{s(1), s(2), \dots}) = \bigcup_{j=1}^{\infty} V(\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}), \quad E(\Gamma_{s(1), s(2), \dots}) = \bigcup_{j=1}^{\infty} E(\Gamma_{s(1), \dots, s(j)})$$

корректно определен ориентированный бесконечный регулярный граф $\Gamma_{s(1), s(2), \dots}$ с $\deg^+(\Gamma_{s(1), s(2), \dots}) = 2 = \deg^-(\Gamma_{s(1), s(2), \dots})$ и со связным графом $\bar{\Gamma}_{s(1), s(2), \dots}$.

С учетом (3) и (4) для каждого $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ имеем

$$\Gamma_{s(1), s(2), \dots}^n(u_1) \subseteq V(\Gamma_{s(1), \dots, s(m)}), \quad (4.1)$$

где $m = \lfloor \log_2(n) + 1 \rfloor$. В то же время, согласно свойству (5)

$$V(\Gamma_{s(1), \dots, s(m)}) \subseteq \bar{\Gamma}_{s(1), \dots, s(m)}^{bm}(u_m) \subseteq \bar{\Gamma}_{s(1), s(2), \dots}^{bm}(u_m).$$

Поскольку, кроме того, $(u_1, \dots, u_m)$ – путь графа $\bar{\Gamma}_{s(1), s(2), \dots}$, то

$$V(\Gamma_{s(1), \dots, s(m)}) \subseteq \bar{\Gamma}_{s(1), s(2), \dots}^{(b+1)m}(u_1). \quad (4.2)$$

Следствием (4.1) и (4.2) является существование такого вещественного числа $r_0 > 1$, что для всех положительных целых чисел n , удовлетворяющих неравенству $n > (b+1)\lfloor \log_2(n) + 1 \rfloor$, справедливо

$$\alpha_{\Gamma_{s(1), s(2), \dots}, u_1}(n) > r_0^n. \quad (4.3)$$

Следующим образом определим ориентированный граф Λ :

$$\begin{aligned} V(\Lambda) &= \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}, \\ E(\Lambda) &= \{(w_0, w_1), (w_0, w_2), (w_3, w_0), (w_4, w_0), (w_1, w_3), (w_1, w_4), \\ &\quad (w_5, w_1), (w_2, w_3), (w_2, w_4), (w_5, w_2), (w_3, w_6), (w_4, w_6)\} \end{aligned}$$

(предполагается, что $V(\Lambda) \cap V(\Gamma_{s(1), s(2), \dots}) = \emptyset$). Заметим, что для произвольной отличной от w_5, w_6 вершины z графа Λ имеем $\deg_{\Lambda}^{+}(z) = \deg_{\Lambda}^{-}(z) = 2$, в то время как $\deg_{\Lambda}^{+}(w_5) = 2$, $\deg_{\Lambda}^{-}(w_5) = 0$, $\deg_{\Lambda}^{+}(w_6) = 0$, $\deg_{\Lambda}^{-}(w_6) = 2$. Определим, наконец, ориентированный граф $\Gamma_{0, s(1), s(2), \dots}$, полагая

$$\begin{aligned} V(\Gamma_{0, s(1), s(2), \dots}) &= (V(\Gamma_{s(1), s(2), \dots}) \setminus \{u_1\}) \cup V(\Lambda), \\ E(\Gamma_{0, s(1), s(2), \dots}) &= (E(\Gamma_{s(1), s(2), \dots}) \setminus \{(u_1, x_1), (u_1, x'_1), (v_1, u_1), (u_2, u_1)\}) \\ &\quad \cup E(\Lambda) \cup \{(w_6, x_1), (w_6, x'_1), (v_1, w_5), (u_2, w_5)\}. \end{aligned}$$

(Граф $\Gamma_{0, s(1), s(2), \dots}$ получается, таким образом, из графа $\Gamma_{s(1), s(2), \dots}$ заменой вершины u_1 графом Λ .)

Ясно, что $\Gamma_{0, s(1), s(2), \dots}$ является регулярным графом с

$$\deg^{+}(\Gamma_{0, s(1), s(2), \dots}) = \deg^{-}(\Gamma_{0, s(1), s(2), \dots}) = 2$$

и со связным графом $\bar{\Gamma}_{0, s(1), s(2), \dots}$. Далее, легко видеть, что для произвольного $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \Gamma_{0, s(1), s(2), \dots}^{n+3}(w_0) \setminus \{w_5\} &= (\Gamma_{s(1), s(2), \dots}^n(u_1) \setminus \{u_1\}) \cup \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_6\}, \\ \bar{\Gamma}_{0, s(1), s(2), \dots}^{n+2}(w_0) &= (\bar{\Gamma}_{s(1), s(2), \dots}^n(u_1) \setminus \{u_1\}) \cup \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}. \end{aligned}$$

Кроме того, $\alpha_{\Gamma_{0, s(1), s(2), \dots}, w_0}(1) = 2$ и, следовательно, для произвольного $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ имеем

$$\alpha_{\Gamma_{0, s(1), s(2), \dots}, w_0}(n) > n.$$

С учетом (4.3) отсюда следует существование такого вещественного числа $r > 1$, зависящего лишь от b (и, следовательно, зависящего лишь от a), что

$$\alpha_{\Gamma_{0, s(1), s(2), \dots}, w_0}(n) > r^n$$

для всех $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Итак, для произвольного целого числа $a > 1$ и произвольной бесконечной последовательности $s(1), s(2), \dots$, где $s(i) \in \{2, \dots, a\}$ для всех $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, полагая $\Gamma := \Gamma_{0, s(1), s(2), \dots}$ и $x := w_0$, получаем, что Γ – ориентированный бесконечный регулярный граф с $\deg^{+}(\Gamma) = \deg^{-}(\Gamma) = 2$ и со связным графом $\bar{\Gamma}$, $x \in V(\Gamma)$ и существует такое вещественное число $r > 1$ (зависящее лишь от a), что неравенство $\alpha_{\Gamma, x}(n) \geq r^n$ справедливо для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Утверждение 1) теоремы 4.1 доказано.

2) Для построения графов Γ с требуемыми в утверждении 2) теоремы 4.1 свойствами (для некоторого вещественного числа $r' > 1$) вновь зафиксируем некоторое целое число $a > 1$ и некоторую последовательность $s(1), s(2), \dots$ целых чисел такую, что $1 < s(i) \leq a$ для всех $i \in \mathbb{Z}_{>0}$. Для каждого положительного целого числа j выше, при доказательстве утверждения 1) теоремы, определен ориентированный

конечный граф $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$ с выделенными “начальной” вершиной u_j и “конечной” вершиной v_j , для которых

$$\begin{aligned} \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^+(u_j) &= 2, & \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^-(u_j) &= 1, \\ \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^+(v_j) &= 1, & \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^-(v_j) &= 2, \end{aligned}$$

в то время как для произвольной отличной от u_j, v_j вершины z графа $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$ справедливо $\deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^+(z) = \deg_{\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}}^-(z) = 2$. Как было замечено, для всех положительных целых чисел j графы $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$ обладают указанными выше свойствами (1)–(5). Ранее был определен, кроме того, граф Λ .

Следующим образом определим ориентированный граф Λ' :

$$\begin{aligned} V(\Lambda') &= \{w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, w'_5\}, \\ E(\Lambda') &= \{(w'_1, w'_2), (w'_1, w'_3), (w'_2, w'_3), (w'_2, w'_5), \\ &\quad (w'_3, w'_4), (w'_3, w'_5), (w'_4, w'_1), (w'_4, w'_2), (w'_5, w'_4)\} \end{aligned}$$

(предполагается, что $V(\Lambda') \cap V(\Lambda) = \emptyset$ и $V(\Lambda') \cap V(\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}) = \emptyset$ для всех $j \in \mathbb{Z}_{>0}$). Заметим, что для произвольной отличной от w'_1, w'_5 вершины z графа Λ' имеем $\deg_{\Lambda'}^+(z) = \deg_{\Lambda'}^-(z) = 2$, в то время как $\deg_{\Lambda'}^+(w'_1) = 2$, $\deg_{\Lambda'}^-(w'_1) = 1$, $\deg_{\Lambda'}^+(w'_5) = 1$, $\deg_{\Lambda'}^-(w'_5) = 2$.

Чтобы получить графы Γ с требуемыми в утверждении 2) теоремы 4.1 свойствами (для некоторого вещественного числа $r' > 1$) достаточно следующим образом “подправить” графы $\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}$, $j > 1$. Для каждого положительного целого числа $j > 1$ обозначим через $\Delta_{s(1), \dots, s(j)}$ ориентированный граф с множеством вершин

$$V(\Delta_{s(1), \dots, s(j)}) = V(\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}) \cup V(\Lambda')$$

и множеством ребер

$$E(\Delta_{s(1), \dots, s(j)}) = E(\Gamma_{s(1), \dots, s(j)}) \cup E(\Lambda') \cup \{(v_j, w'_1), (w'_5, u_j)\},$$

после чего для каждого положительного целого числа $j > 1$ следующим образом определим ориентированный граф $\Delta_{0, s(1), \dots, s(j)}$:

$$\begin{aligned} V(\Delta_{0, s(1), \dots, s(j)}) &= (V(\Delta_{s(1), \dots, s(j)}) \setminus \{u_1\}) \cup V(\Lambda), \\ E(\Delta_{0, s(1), \dots, s(j)}) &= (E(\Delta_{s(1), \dots, s(j)}) \setminus \{(u_1, x_1), (u_1, x'_1), (v_1, u_1), (u_2, u_1)\}) \\ &\quad \cup E(\Lambda) \cup \{(w_6, x_1), (w_6, x'_1), (v_1, w_5), (u_2, w_5)\}. \end{aligned}$$

Мы покажем, что графы $\Gamma := \Delta_{0, s(1), \dots, s(j)}$, $j > 1$, обладают требуемыми в утверждении 2) теоремы свойствами (для некоторого вещественного числа $r' > 1$).

Ясно, что (для каждого положительного целого числа $j > 1$) $\Delta_{0, s(1), \dots, s(j)}$ – конечный регулярный граф с

$$\deg^+(\Delta_{0, s(1), \dots, s(j)}) = \deg^-(\Delta_{0, s(1), \dots, s(j)}) = 2$$

и со связным графом $\bar{\Delta}_{0, s(1), \dots, s(j)}$. Кроме того, легко видеть, что

$$\bar{\Delta}_{0, s(1), \dots, s(j)}^n(w_0) \setminus V(\Lambda') = \bar{\Gamma}_{0, s(1), s(2), \dots}^n(w_0) \cap V(\Delta_{0, s(1), \dots, s(j)}) \quad (4.4)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. В то же время, если n_0 – наименьшее положительное целое число, для которого $v_j \in \Delta_{0,s(1),\dots,s(j)}^{n_0}(w_0)$, то с учетом свойства (3) графа $\Gamma_{s(1),\dots,s(j)}$ имеем

$$\Delta_{0,s(1),\dots,s(j)}^n(w_0) = \Gamma_{0,s(1),s(2),\dots}^n(w_0) \quad (4.5)$$

для всех положительных целых чисел $n \leq n_0$ и

$$\Delta_{0,s(1),\dots,s(j)}^n(w_0) = (\Gamma_{0,s(1),s(2),\dots}^n(w_0) \cap V(\Delta_{0,s(1),\dots,s(j)})) \cup V(\Lambda') \quad (4.6)$$

для всех положительных целых чисел $n \geq n_0 + 3$. Из (4.4)–(4.6) следует, что

$$\alpha_{\Delta_{0,s(1),\dots,s(j)},w_0}(n+3) \geq \alpha_{\Gamma_{0,s(1),s(2),\dots},w_0}(n)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Поскольку, кроме того, как было показано при доказательстве утверждения 1) теоремы, для некоторого зависящего лишь от a вещественного числа $r > 1$

$$\alpha_{\Gamma_{0,s(1),s(2),\dots},w_0}(n) > r^n$$

для всех $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, то с учетом $\alpha_{\Delta_{0,s(1),\dots,s(j)},w_0}(1) = 2$ получаем, что

$$\alpha_{\Delta_{0,s(1),\dots,s(j)},w_0}(n) > r'^n$$

для некоторого зависящего лишь от a вещественного числа $r' > 1$ и всех $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Итак, для произвольного целого числа $a > 1$ и произвольной бесконечной последовательности $s(1), s(2), \dots$, где $s(i) \in \{2, \dots, a\}$ для всех $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, выбирая произвольное целое число $j > 1$ и полагая $\Gamma := \Delta_{0,s(1),\dots,s(j)}$, $x := w_0$, получаем, что Γ – ориентированный конечный регулярный граф с $\deg^+(\Gamma) = \deg^-(\Gamma) = 2$ и со связным графом $\bar{\Gamma}$, $x \in V(\Gamma)$ и существует такое вещественное число $r' > 1$ (зависящее лишь от a), что неравенство $\alpha_{\Gamma,x}(n) \geq r'^n$ справедливо для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Поскольку $|V(\Delta_{0,s(1),\dots,s(j)})|$ возрастает с увеличением j , за счет выбора j граф Γ может быть сделан при этом сколь угодно большим. Утверждение 2) теоремы 4.1 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Полиномиальным или экспоненциальным ростом далеко не исчерпывается возможное поведение функции $\alpha_{\Gamma,x}(n)$, где Γ – ориентированный бесконечный локально конечный регулярный граф с $\deg^+(\Gamma) = \deg^-(\Gamma)$ и со связным графом $\bar{\Gamma}$, $x \in V(\Gamma)$. Так, отказываясь в конструкции из доказательства утверждения 1) теоремы 4.1 от условия ограниченности сверху числом a всех членов последовательности $s(1), s(2), \dots$ и чередуя подходящим образом участки малых и больших значений членов последовательности $s(1), s(2), \dots$, можно для произвольных наперед заданных функции $f_1: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ со свойством $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2(f_1(n))/n = 0$ и функции $f_2: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ со свойством $\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(n)/n = \infty$ получить такой граф Γ , что для бесконечного множества значений n справедливо $\alpha_{\Gamma,w_0}(n) \geq f_1(n)$ и для бесконечного множества значений n справедливо $\alpha_{\Gamma,w_0}(n) \leq f_2(n)$.

5. Регулярные графы Γ с $\deg^+(\Gamma) < \deg^-(\Gamma)$. Согласно [1; предложение 3.2] если Γ – ориентированный локально конечный вершинно-симметрический граф с $\deg^+(\Gamma) < \deg^-(\Gamma)$, то $\alpha_{\Gamma,x}(n) = n$ для всех $x \in V(\Gamma)$ и всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Однако в общем случае для регулярных графов Γ с $\deg^+(\Gamma) < \deg^-(\Gamma)$ справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.1. Для произвольных положительных целых чисел k, l с условием $k < l$ существуют ориентированные (с необходимостью бесконечные) регулярные графы Γ с $\deg^+(\Gamma) = k$, $\deg^-(\Gamma) = l$ и со связными графами $\bar{\Gamma}$ такие, что $\alpha_{\Gamma,x}(n) = \infty$ для некоторой вершины x графа Γ и некоторого $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Графы с требуемыми в теореме свойствами могут быть построены, например, следующим образом.

Пусть T – ориентированный граф, определяемый единственным с точностью до изоморфизма образом следующими условиями:

- (1) граф $\bar{T}$ является деревом, у которого степени всех вершин, за исключением одной *особой* вершины u , чья степень есть $k + l - 1$, равны $k + l$;
- (2) $\deg_T^+(v) = k$ для всех $v \in V(T) \setminus \{u\}$ и $\deg_T^+(u) = k - 1$;
- (3) $\deg_T^-(v) = l$ для всех $v \in V(T)$.

Пусть, кроме того, Π – произвольный ориентированный конечный регулярный граф с $\deg^+(\Pi) = k = \deg^-(\Pi)$ и со связным графом $\bar{\Pi}$.

Для каждой вершины w графа Π и каждого $i \in \{1, \dots, l - k\}$ пусть $T_{w,i}$ – граф, изоморфный T , и $u_{w,i}$ – особая вершина графа $T_{w,i}$. При этом предполагается, что графы $T_{w,i}$, где $w \in V(\Pi)$ и $i \in \{1, \dots, l - k\}$, попарно дизъюнкты. Следующим образом определим граф Γ :

$$V(\Gamma) = V(\Pi) \cup \bigcup_{w \in V(\Pi), 1 \leq i \leq l-k} V(T_{w,i}),$$

$$E(\Gamma) = E(\Pi) \cup \bigcup_{w \in V(\Pi), 1 \leq i \leq l-k} (E(T_{w,i}) \cup \{(u_{w,i}, w)\}).$$

Ясно, что Γ – ориентированный регулярный граф с $\deg^+(\Gamma) = k$, $\deg^-(\Gamma) = l$ и со связным графом $\bar{\Gamma}$, причем для произвольной содержащейся в $V(\Pi)$ вершины x графа Γ существует положительное целое число n (например, в качестве n можно взять число $\text{diam}(\bar{\Pi})$) такое, что $\alpha_{\Gamma,x}(n) = \infty$. (Заметим, что при $k = 1$ для произвольной вершины x построенного графа Γ существует положительное целое число n такое, что $\alpha_{\Gamma,x}(n) = \infty$.)

6. Заключительные замечания. В заключение укажем некоторые направления исследований, в связи с которыми результаты настоящей работы могут представлять интерес. (Предварительно уместно отметить, что первоначально целью настоящей работы было получение ответа на вопрос о возможности обобщения результатов работы [1] на случай регулярных, не обязательно вершинно-симметрических, графов. В свою очередь, основной мотивировкой для работы [1] было получение результата о конечно порожденных группах, см. п. 1 настоящей работы.) Итак, пусть Γ – ориентированный граф и $x \in V(\Gamma)$.

Ясно, что функция $\alpha_{\Gamma,x}$, являясь важной характеристикой множеств $\Gamma^m(x)$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, представляет интерес в контексте исследований ориентированных (направленных) случайных блужданий на графах и ориентированного (направленного) просачивания.

Далее, представим, что некоторый “сигнал” может распространяться лишь вдоль ориентированных ребер графа Γ , причем при прохождении любого ориентированного ребра “сигнал” частично поглощается (или искажается). Тогда граф Γ с быстро

растущей функцией $\alpha_{\Gamma,x}$ (таковы, например, графы из теоремы 4.1) может рассматриваться как эффективный поглотитель “сигналов” (так как “сигналы”, выходящие из x , сильно поглощаются уже шарами небольших радиусов с центром x графа $\bar{\Gamma}$).

Становясь на игровую точку зрения, предположим теперь, что, с одной стороны, имеются игроки $A_1, \dots, A_s$, каждый из которых может двигаться в топологическом графе Γ лишь вдоль некоторого сопоставленного ему ориентированного пути, начинающегося в x и заканчивающегося вне шара $\bar{\Gamma}^r$ для некоторого заданного $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, причем скорость этого движения $\leq v_A$ (длины ребер предполагаются единичными), а с другой стороны, имеется игрок B , который может двигаться в топологическом графе Γ по всем ребрам без учета их ориентации со скоростью $\leq v_B$. Игроки $A_1, \dots, A_s, B$ одновременно стартуют в вершине x . Каждый из игроков $A_1, \dots, A_s$ стремится “спастись”, выйдя из $\bar{\Gamma}^r$ по сопоставленному ему пути, не проходя при этом через точки, в которых до того побывал игрок B . Соответственно, игрок B стремится не дать “спастись” как можно большему числу из игроков $A_1, \dots, A_s$. Тогда при $v_A/v_B \leq \alpha_{\Gamma,x}(r)/((2s-1)r)$ игрок B заведомо может не дать “спастись” ни одному из игроков $A_1, \dots, A_s$.

Исследование поведения функции $\alpha_{\Gamma,x}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, естественно было бы дополнить указанием (для представляющих интерес графов Γ) эффективных алгоритмов нахождения кратчайших (или близких к кратчайшим по длине) ориентированных путей графа Γ , начинающихся в x и заканчивающихся вне шара радиуса n , $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, с центром x графа $\bar{\Gamma}$. Поскольку при этом достаточно ограничиться рассмотрением ориентированных путей длины $\alpha_{\Gamma,x}(n) + 1$, то вновь важным оказывается наличие хорошей верхней оценки для $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ (в сочетании с эффективным способом проверки ориентированных путей, длина которых не более чем на 1 превосходит эту верхнюю оценку).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. I. Trofimov, “On geometric properties of directed vertex-symmetric graphs”, *European J. Combin.*, **27**:5 (2006), 690–700.

В. И. Трофимов

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

E-mail: trofimov@imm.uran.ru

Поступило

06.05.2006

Исправленный вариант

10.04.2007