Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Бикчентаев, Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана, II, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 5, 783–786

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4089>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:04:17

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана, II

А. М. Бикчентаев

В сообщении получены характеристики конечных, σ -конечных, атомических и конечномерных алгебр в классе всех полуконечных алгебр фон Неймана (далее АФН) в терминах топологии τ -локальной сходимости по мере. В [1; теорема 4.1] была доказана эквивалентность следующих условий:

- 1) алгебра $\mathcal{M}$ конечна;
- 2) $t_{w\tau l} = t_{\tau l}$;
- 3) произведение совместно $t_{\tau l}$ -непрерывно из $\widetilde{\mathcal{M}} \times \widetilde{\mathcal{M}}$ в $\widetilde{\mathcal{M}}$;
- 4) произведение совместно $t_{w\tau l}$ -непрерывно из $\widetilde{\mathcal{M}} \times \widetilde{\mathcal{M}}$ в $\widetilde{\mathcal{M}}$;
- 5) инволюция $t_{\tau l}$ -непрерывна из $\widetilde{\mathcal{M}}$ в $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Приведем основной результат заметки.

ТЕОРЕМА 1. Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Имеем следующие эквивалентности:

- (i) алгебра $\mathcal{M}$ конечна $\Leftrightarrow$ множество $\mathcal{M}^n$ $t_{\tau l}$ -замкнуто;
- (ii) алгебра $\mathcal{M}$ σ -конечна $\Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \widetilde{\mathcal{M}_0}$ такая, что $x_n \xrightarrow{\tau l} e$, $n \rightarrow \infty$;
- (iii) алгебра $\mathcal{M}$ атомическая $\Leftrightarrow$ топология $t_{\tau l}$ локально выпукла;
- (iv) алгебра $\mathcal{M}$ не имеет атомов $\Leftrightarrow$ на $\widetilde{\mathcal{M}}$ не существует нетривиального $t_{\tau l}$ -непрерывного линейного функционала;
- (v) алгебра $\mathcal{M}$ конечномерна $\Leftrightarrow$ топология $t_{\tau l}$ нормируема.

Предварительные сведения. Терминология, обозначения и результаты теории АФН взяты из [2], а сведения из теории некоммутативного интегрирования – из [3], [4]. Для АФН $\mathcal{M}$ операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ обозначим через $\mathcal{M}^u$, $\mathcal{M}^{\text{iso}}$ и $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ ее подмножества унитарных операторов, изометрий и решетку проекторов соответственно, и пусть e – единица $\mathcal{M}$. Для $p \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ обозначим $p^\perp = e - p$, и пусть $\mathcal{M}_p = \{px|p\mathcal{H} : x \in \mathcal{M}\}$ – редуцированная АФН. Для $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ запись $p \sim q$ означает, что $p = u^*u$ и $q = uu^*$ для некоторого $u \in \mathcal{M}$; запись $p \lesssim q$ означает, что $p \sim r$ для некоторого $r \leq q$, $r \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$. Проектор $p \in \mathcal{M}$ называется *конечным*, если из $p \sim q$ и $q \leq p$ следует $p = q$; *минимальным* или *атомом*, если $q \leq p$ влечет $q = 0$ или $q = p$. АФН $\mathcal{M}$ называется *конечной*, если проектор e конечен; *атомической*, если каждый ненулевой проектор в $\mathcal{M}$ мажорирует ненулевой минимальный проектор; σ -*конечной*, если любая система ее взаимно ортогональных проекторов не более чем счетна.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00799).

Замкнутый оператор $x\eta.\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(x)$, называется τ -измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $p \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, что $p\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(x)$ и $\tau(p^\perp) < \varepsilon$. Множество $\mathcal{M}$ всех τ -измеримых операторов является $*$ -алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения. Для $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ обозначим через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^h$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $\mathcal{M}^h$, порожденный собственным конусом $\mathcal{M}^+$, обозначим через $\leq$; запись $x_i \uparrow x$ (или $x_i \downarrow x$) означает, что $x_i \leq x_j$ (соответственно $x_i \geq x_j$) при $i \leq j$ и $x = \sup_i x_i$ (соответственно $x = \inf_i x_i$). Понятие (o) -сходимости было введено Биркгофом [5] и, независимо, Канторовичем [6]. Сеть $\{x_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{M}^h$ (o) -сходится к $x \in \mathcal{M}^h$ (запись: $x_i \xrightarrow{(o)} x$), если существуют такие сети $\{y_i\}_{i \in I}, \{z_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{M}^h$, что $y_i \leq x_i \leq z_i$ и $y_i \uparrow x, z_i \downarrow x$. Порядковая топология t_o на $\mathcal{M}^h$ есть сильнейшая из топологий, в которых (o) -сходимость сетей влечет их топологическую сходимость. Для σ -конечной $\mathcal{M}$ в определении топологии $t_o|_{\mathcal{M}^{\text{pr}}}$ вместо сетей можно обойтись последовательностями [7; с. 30]. В этом случае

$$p_n \xrightarrow{(o)} p \ (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} p_k = p = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} p_k.$$

Если $x \in \mathcal{M}$ и $x = u|x|$ – полярное разложение, где $|x| = \sqrt{x^*x}$, то $u \in \mathcal{M}$ и $|x| \in \mathcal{M}^+$.

В $*$ -алгебре $\mathcal{M}$ вводится топология t_τ сходимости по мере [4], фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$U_{\varepsilon, \delta} = \{x \in \mathcal{M} : \exists q \in \mathcal{M}^{\text{pr}} (\|xq\| \leq \varepsilon \text{ и } \tau(q^\perp) \leq \delta)\}, \quad \varepsilon > 0, \quad \delta > 0.$$

Множество τ -компактных операторов

$$\widetilde{\mathcal{M}}_0 = \{x \in \mathcal{M} : \tau(p^{|x|}(\lambda, \infty)) < \infty \text{ для всех } \lambda > 0\}$$

является $*$ -подалгеброй в $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{M}_\tau^{\text{pr}} = \{p \in \mathcal{M}^{\text{pr}} : \tau(p) < \infty\}$.

Локализация топологии t_τ и леммы. Топология t_τ сходимости по мере может быть локализована следующим образом (см. [1]). Для $\varepsilon, \delta > 0$ и $p \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ определим множества

$$\begin{aligned} V_{\varepsilon, \delta, p} &= \{x \in \mathcal{M} : \exists q \in \mathcal{M}^{\text{pr}} (q \leq p, \|xq\| \leq \varepsilon \text{ и } \tau(p - q) \leq \delta)\}, \\ W_{\varepsilon, \delta, p} &= \{x \in \mathcal{M} : \exists q \in \mathcal{M}^{\text{pr}} (q \leq p, \|qxq\| \leq \varepsilon \text{ и } \tau(p - q) \leq \delta)\}. \end{aligned}$$

Пространство $\widetilde{\mathcal{M}}$ становится топологическим векторным пространством относительно топологии $t_{\tau l}$ τ -локальной (соответственно $t_{w\tau l}$ слабо τ -локальной) сходимости по мере, базис окрестностей нуля которой образует семейство $\Theta = \{V_{\varepsilon, \delta, p}\}_{\varepsilon, \delta > 0, p \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}}$ (соответственно $\Theta = \{W_{\varepsilon, \delta, p}\}_{\varepsilon, \delta > 0, p \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}}$).

Будем использовать символы $x_i \xrightarrow{\tau} x$, $x_i \xrightarrow{\tau l} x$ и $x_i \xrightarrow{w\tau l} x$ для обозначения t_τ -, $t_{\tau l}$ - и $t_{w\tau l}$ -сходимости соответственно. С помощью стандартной техники редуцирования АФН можно показать (см. также [8]), что сеть $x_i \xrightarrow{\tau l} x$ (соответственно $x_i \xrightarrow{w\tau l} x$) тогда и только тогда, когда $x_i p \xrightarrow{\tau} x p$ (соответственно $p x_i p \xrightarrow{\tau} p x p$) для всех $p \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$. Ясно, что $t_{w\tau l} \leq t_{\tau l} \leq t_\tau$ и $t_{w\tau l}$ -сходимость совпадает со сходимостью по мере относительно $\langle p.\widetilde{\mathcal{M}}p = p.\widetilde{\mathcal{M}}p, t_{\tau(p.p)} \rangle$ для всех $p \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$.

Замечание 1. Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\tau = \text{tr}$, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и топологии t_τ , $t_{\tau l}$ и $t_{w\tau l}$ совпадают с топологиями равномерной, сильной и слабой операторной сходимости соответственно. $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ есть идеал компактных операторов в $\mathcal{H}$. Если $\dim \mathcal{H} < \infty$, то t_o дискретна на $\mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$.

Если $\mathcal{M}$ – абелева (т.е. коммутативна), то $\mathcal{M} \simeq L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $\tau(f) = \int_\Omega f d\mu$, где (Ω, Σ, μ) – локализуемое пространство с мерой, алгебра $\widetilde{\mathcal{M}}$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω, Σ, μ) , которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры. При этом топология t_τ является обычной топологией сходимости по мере; $t_{\tau l} = t_{w\tau l}$ и совпадает с топологией сходимости по мере на множествах конечной меры. Сеть $\{f_i\}_{i \in I} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ (o)-сходится тогда и только тогда, когда она μ -п.в. сходится на Ω и $|f_i| \leq f$ μ -п.в. для некоторой $f \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$.

Если $\tau(e) < \infty$, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ состоит из всех замкнутых линейных операторов в $\mathcal{H}$, присоединенных к $\mathcal{M}$ и $t_\tau = t_{\tau l} = t_{w\tau l}$ не зависит от конкретного выбора такого следа и является минимальной среди всех метризуемых топологий, согласованных со структурой кольца на $\widetilde{\mathcal{M}}$ [9].

ЛЕММА 1 [1; лемма 3.4]. Пусть $x_i, y_i \in \widetilde{\mathcal{M}}$, $|y_i| \leq |x_i|$, $i \in I$. Если $x_i \xrightarrow{\tau l} 0$ и сеть $\{y_i\}_{i \in I}$ t_τ -ограничена, то $y_i \xrightarrow{\tau l} 0$.

ЛЕММА 2 [1; лемма 3.14]. (i) Если $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $x_n \downarrow 0$, то $x_n \xrightarrow{\tau l} 0$ при $n \rightarrow \infty$.
(ii) Если $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \widetilde{\mathcal{M}}_0^+$ и $x_n \downarrow 0$, то $x_n \xrightarrow{\tau} 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 3 (ср. [10; лемма 1]). Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Множество $\mathcal{M}^u$ $t_{\tau l}$ -плотно в $\mathcal{M}^{\text{iso}}$.

Порядковая топология на решетке $\mathcal{M}^{\text{pr}}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{M}$ – σ -конечная алгебра фон Неймана и τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Если $p_n, p \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, $n \in \mathbb{N}$, и $p_n \xrightarrow{(o)} p$, $n \rightarrow \infty$, то $p_n \xrightarrow{\tau l} p$, $n \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на АФН $\mathcal{M}$, $p_n \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, $n \in \mathbb{N}$, и $q = \bigvee_{n=1}^\infty p_n$.

$$\text{Если } q \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}} \text{ и } \bigvee_{n=1}^\infty \bigwedge_{k=n}^\infty p_k = \bigwedge_{n=1}^\infty \bigvee_{k=n}^\infty p_k = p, \text{ то } \tau(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(p_n).$$

Этот интересный частный случай теоремы о мажорированной сходимости следует из [1; следствие 3.15].

Можно показать, что $t_{w\tau l}|\mathcal{M}^{\text{pr}} = t_{\tau l}|\mathcal{M}^{\text{pr}}$, ср. с [1; лемма 3.7]. Поскольку $t_{\tau l} \leq t_\tau$ и для σ -конечной $\mathcal{M}$ для ограничений топологий выполнено $t_{\tau l}|\mathcal{M}^{\text{pr}} \leq t_o|\mathcal{M}^{\text{pr}}$, имеем $t_{\tau l}|\mathcal{M}^{\text{pr}} \leq t_\tau|\mathcal{M}^{\text{pr}} \wedge t_o|\mathcal{M}^{\text{pr}}$.

ЗАДАЧА. Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на σ -конечной АФН $\mathcal{M}$. Верно ли, что

$$t_{\tau l}|\mathcal{M}^{\text{pr}} = t_\tau|\mathcal{M}^{\text{pr}} \wedge t_o|\mathcal{M}^{\text{pr}}?$$

Ответ положителен, если $\tau(e) < \infty$, поскольку $t_{\tau l} = t_\tau \leq t_o$. Для $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ сепарабельно и бесконечномерно, $\tau = \text{tr}$, в [11] показано, что

$$t_{\tau l}|\mathcal{M}^{\text{pr}} < t_\tau|\mathcal{M}^{\text{pr}}, \quad t_{\tau l}|\mathcal{M}^{\text{pr}} < t_o|\mathcal{M}^{\text{pr}}.$$

Доказательство теоремы 1. (i) Всякая изометрия из конечной АФН автоматически является унитарным оператором, а множество $\mathcal{M}^{\text{iso}}$ $t_{\tau l}$ -замкнуто [1; лемма 3.7]. Остается применить лемму 3.

(ii), ($\Rightarrow$) Лемма Цорна и полуконечность следа τ позволяют построить ортогональную последовательность $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ с $\sum_{n=1}^\infty p_n = e$. Положим $q_n = \sum_{k=1}^n p_k$, $n \in \mathbb{N}$; тогда $q_n \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ и $q_n \uparrow e$, $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $q_n \xrightarrow{\tau l} e$, $n \rightarrow \infty$, по лемме 2.

(ii), ($\Leftarrow$) Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \widetilde{\mathcal{M}}_0$ и $x_n \xrightarrow{\tau l} e$, $n \rightarrow \infty$. В силу [1; лемма 3.8] имеем

$$r_n = s_r(x_n e) = s_r(x_n) \xrightarrow{\tau l} e, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где $s_r(x)$ – правый носитель $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Если $x_n = u_n |x_n|$ – полярное разложение, то

$$u_n^* x_n = |x_n| \in \widetilde{\mathcal{M}}_0, \quad x_n r_n = x_n \quad \text{и} \quad r_n \leq s_r(|x_n|), \quad n \in \mathbb{N}.$$

По определению множества $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ имеем $\tau(p^{|x_n|}(k^{-1}, \infty)) < \infty$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$, где $|x_n| = \int_0^\infty \lambda p^{|x_n|} d\lambda$ – спектральное разложение. Ясно, что $p^{|x_n|}(k^{-1}, \infty) \uparrow r_n$, $k \rightarrow \infty$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $p_m = \bigvee_{n=1}^m r_n$, $m \in \mathbb{N}$. В силу единственности $t_{\tau l}$ -предела, из (1) имеем $p_m \uparrow e$, $m \rightarrow \infty$. Точная верхняя грань последовательности σ -конечных проекторов является σ -конечным, и импликация $(\Rightarrow)$ в (ii) следует из равенств

$$e = \bigvee_{m=1}^\infty p_m = \bigvee_{n=1}^\infty r_n = \bigvee_{n=1}^\infty \bigvee_{k=1}^\infty p^{|x_n|}(k^{-1}, \infty).$$

(iii), $(\Rightarrow)$ Следует из структурной теории атомических АФН – некоммутативных аналогов (l^∞) -алгебр.

(iii), $(\Leftarrow)$ Проверяется с помощью стандартной техники редуцирования АФН и шага 2 доказательства теоремы 4.1 [1].

(iv), $(\Rightarrow)$ Проверяется по схеме доказательства предложения 3 из [7; с. 258–259].

(iv), $(\Leftarrow)$ Если алгебра $\mathcal{M}$ имеет атом, то существует такой центральный проектор $p \in \mathcal{M}$, что $\mathcal{M}_p$ – атомическая алгебра. По (iii) ограничение $t_{\tau l}|_{\mathcal{M}_p}$ – локально выпуклая топология. Существует нетривиальный $t_{\tau l}|_{\mathcal{M}_p}$ -непрерывный линейный функционал φ на $\mathcal{M}_p$. Положим $\psi(x) = \varphi(pxp)$, $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Оба отображения $x \mapsto xy$ (для фиксированного y) и $y \mapsto xy$ (для фиксированного x) $t_{\tau l}$ -непрерывны на $\widetilde{\mathcal{M}}$ [12; теорема 1]. Следовательно, ψ есть нетривиальный $t_{\tau l}$ -непрерывный линейный функционал на $\widetilde{\mathcal{M}}$ – противоречие.

(v), $(\Rightarrow)$ Каждая векторная топология на конечномерном пространстве нормируема.

(v), $(\Leftarrow)$ Пусть топология $t_{\tau l}$ задается нормой $\|\cdot\|'$. Тогда $\mathcal{M}$ атомическая в силу (iii). Если алгебра $\mathcal{M}$ бесконечномерна, то в $\mathcal{M}$ существует последовательность попарно ортогональных проекторов $\{p_n\}_{n=1}^\infty$. Положим $x_n = (\|p_n\|')^{-1} p_n$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $p_n \downarrow 0$, имеем $p_n \xrightarrow{\tau l} 0$, $n \rightarrow \infty$, по лемме 2. Следовательно, $x_n \xrightarrow{\tau l} 0$, $n \rightarrow \infty$ (доказывается как в шаге 2 теоремы 4.1 [1]). Но $\|x_n\|' = 1$, $n \in \mathbb{N}$, – противоречие.

Отметим, что аналогии (iii) и (vi) для топологии t_τ в случае $\tau(e) < \infty$ доказаны в [13]. Импликацию $(\Rightarrow)$ в (iii) можно доказать и с помощью [13; лемма 3.3], поскольку $t_{\tau l}|_{\mathcal{M}_p}$ совпадает с $t_{\tau(p \cdot)}$ на $\widetilde{\mathcal{M}}_p p = \widetilde{\mathcal{M}}_p$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $t_{\tau l} = t_\tau$, то алгебра $\mathcal{M}$ конечна.

Это утверждение следует также и из [1; теорема 4.1]. Обратное утверждение в общем случае неверно, даже если $\mathcal{M}$ абелева [12; пример 1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Бикчентаев, *Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ: Сборник статей*, Тр. МИАН, **255**, 2006, 41–54. [2] M. Takesaki, *Theory of operator algebras*, I, Springer, Berlin, 1979. [3] I. E. Segal, *Ann. of Math.* (2), **57**:3 (1953), 401–457. [4] E. Nelson, *J. Funct. Anal.*, **15**:2 (1974), 103–116. [5] G. Birkhoff, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **31**:3 (1935), 433–454. [6] Л. В. Канторович, *Докл. АН СССР*, **4**:1 (1935), 11–14. [7] Т. А. Сарымсаков, Ш. А. Аюпов, Дж. Хаджиев, В. И. Чилин, *Упорядоченные алгебры*, ФАН, Ташкент, 1983. [8] Г. Ш. Скворцова, О. Е. Тихонов, *Изв. вузов. Сер. матем.*, **42**:8 (1998), 48–55. [9] А. М. Бикчентаев, *Матем. заметки*, **75**:3 (2004), 342–349. [10] M. Choda, H. Choda, *Proc. Japan Acad.*, **46**:10 (1970), 1086–1090. [11] V. Palko, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123**:3 (1995), 715–721. [12] А. М. Бикчентаев, *Lobachevskii J. Math.*, **14** (2004), 17–24; <http://ljm.ksu.ru> [13] A. R. Padmanabhan, *Nanta Math.*, **10**:1 (1977), 72–76.

А. М. Бикчентаев

Казанский государственный университет

E-mail: Airat.Bikchentaev@ksu.ru

Поступило

23.03.2007