Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Созутов, С. И. Шахова, Строение квазислойно конечных групп, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 1, 118–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm409>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:26:18

УДК 512.544

СТРОЕНИЕ КВАЗИСЛОЙНО КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А. И. Созутов, С. И. Шахова

Группа называется *слоено конечной*, если она имеет не более чем конечное число элементов каждого порядка. В статье исследовано строение бесконечных групп, все собственные подгруппы которых *слоено конечны*.

Библиография: 20 названий.

Квази- σ -группой в статье называется не- σ группа, все собственные подгруппы которой обладают свойством σ . Группа называется *слоено конечной*, если она имеет не более чем конечное число элементов каждого порядка [1], [2]. Слоено конечные группы были детально изучены С. Н. Черниковым, Р. Бэром, Х. Х. Мухамеджаном, Я. Д. Половицким и др. (см., например, [3]–[5]). В данной работе заканчивается исследование строения бесконечных групп, все собственные подгруппы которых *слоено конечны*, начатое в [6]–[8]. С целью полноты изложения в ней приведены формулировки всех основных результатов по квазислоено конечным группам из [6]–[8] (теоремы 1, 3–7).

1. Определения, основные результаты, вспомогательные предложения.
В [7] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Для бесконечной группы G , все собственные подгруппы которой *слоено конечны*, справедливо одно из следующих утверждений:*

- 1) G – *слоено конечная группа*;
- 2) $G = P \rtimes \langle a \rangle$, где P – черниковская полная абелева p -группа, не содержащая собственных бесконечных a -инвариантных подгрупп, $\langle a \rangle$ – примарная группа и $|G : C_G(P)|$ – простое число;
- 3) $G/Z(G)$ – простая не локально конечная группа.

Редукцию к простым не локально конечным группам из теоремы 1 дополняет теорема существования континуального множества таких групп.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\{G_i\}_{i \in I}$ – конечное или счетное множество неединичных конечных или *слоено конечных* групп G_i без инволюций, $|I| \geq 2$, p_0 – достаточно большое нечетное число. Тогда свободная амальгама X групп G_i вложима в квазислоено конечную простую группу $G = G(\infty)$ [9], в которой всякая собственная подгруппа является или циклической группой порядка, делящего p_0 , или содержится в подгруппе, сопряженной с некоторой из групп G_i .*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00542, и Красноярского краевого фонда науки, грант № 9F132.

При этом можно построить и такую группу $G = G(\infty)$, мультипликатор Шура которой является свободной абелевой группой счетного ранга. В этом случае для любой абелевой конечной или слойно конечной группы Z существует квазислойно конечная группа, являющаяся центральным расширением группы G с помощью центральной подгруппы Z .

Ввиду теоремы 2 строение центра и строение факторгруппы по центру в квазислойно конечной группе могут не зависеть друг от друга. Поэтому в дальнейшем в работе будут изучаться только простые квазислойно конечные группы. Поскольку группа, все собственные подгруппы которой конечны, также является квазислойно конечной, коснемся строения простых квазиконечных групп.

Как вытекает из известных результатов В.П. Шункова [10] (см. также [9, теорема 7.7]), простая квазиконечная группа не содержит инволюций. По теореме 35.1 из [9] любая свободная амальгама конечных групп нечетного порядка вложима в подходящую простую квазиконечную группу, в частности, множество квазиконечных групп континуально. Обсудим возможность вложений в подходящую простую квазиконечную группу амальгам конечных групп с объединенной подгруппой (вееров подгрупп). Естественные ограничения на подгруппы вложимого веера вытекают из результатов работ [11], [6]. Почти все его подгруппы обязаны быть группами Фробениуса, инвариантный множитель которых совпадает с основанием [6] бесконечного веера (является объединяемой подгруппой амальгамы). Вложимость подобных амальгам в настоящее время вполне решаемая задача комбинаторной теории групп (см., например, [12], [9]).

Неизвестно, расщепляема ли произвольная простая квазиконечная группа. Более определенная ситуация с ее парами порождающих. Приведем результат из [6].

ТЕОРЕМА 3. *Для любой пары неединичных элементов a, b простой квазиконечной группы G найдется бесконечно много элементов b^g таких, что $G = \langle a, b^g \rangle$.*

В частности, простая квазиконечная группа G – монстр и 1-го, и 2-го рода, и 3-го рода в терминологии Шункова (определения монстров см. в вопросах 6.63, 6.64, 14.83 из Коуровской тетради [13]).

Ввиду приведенных результатов в дальнейшем в основном будут изучаться простые квазислойно конечные группы, содержащие собственные бесконечные подгруппы. Легко убедиться, что в простой квазислойно конечной группе каждая собственная подгруппа содержится в некоторой максимальной подгруппе [7]. В [7] доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 4. *В простой бесконечной группе, все собственные подгруппы которой слойно конечны, любые две бесконечные максимальные подгруппы пересекаются по единичной подгруппе.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть G – простая бесконечная группа, все собственные подгруппы которой слойно конечны, и H – ее бесконечная максимальная подгруппа. Тогда (G, H) – пара Фробениуса, т.е. $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$.*

Напомним, что *регулярным элементом бесконечной группы* называется любой ее элемент с конечным централизатором.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть G – простая бесконечная группа, все собственные подгруппы которой слойно конечны, H – ее бесконечная максимальная подгруппа, а –*

неединичный элемент из H и X – непустое множество всех максимальных локально конечных подгрупп из G , не совпадающих с H и содержащих элемент a . Тогда

- 1) каждая подгруппа $M \in X$ конечна и является группой Фробениуса с инвариантным множителем $H_M = M \cap H$ и ядром F_M ;
- 2) ядра F_M и F_K любых двух различных подгрупп M и K из X пересекаются по единичной подгруппе;
- 3) для любой a -инвариантной неединичной подгруппы F из ядра F_M , где $M \in X$, справедливо включение $N_G(F) \leq M$;
- 4) все неединичные элементы, содержащиеся в ядрах подгрупп из X , почти регулярны в G .

Неизвестно, существуют ли простые квазислойно конечные группы четного периода, т.е. содержащие инволюции. В этом смысле следующая теорема из [8] носит условный характер.

ТЕОРЕМА 6. Если простая квазислойно конечная группа G содержит инволюцию i , то $C_G(i) = H$ – бесконечная максимальная подгруппа группы G , инволюция в H единственна, все инволюции в G сопряжены, силовские 2-подгруппы в G сопряжены и являются либо (локально) циклическими, либо конечными (обобщенными) группами кватернионов.

Напомним, что множество X (конечных) подгрупп группы G с нетривиальным пересечением T называется веером X с основанием T [6]. Веер называется конечным или бесконечным в зависимости от конечности или бесконечности множества X . Произвольное подмножество $Y \subseteq X$ называется подвеером веера X . Бесконечный веер X с основанием T называется почти правильным, если основание любого бесконечного подвеера из X совпадает с T ; бесконечный почти правильный веер X с основанием T называется правильным, если $T \notin X$ и для любой подгруппы $V \leq T$ такой, что $|N_G(V) \cap \Sigma(X)| < \infty$, имеет место включение $N_G(V) \cap \Sigma(X) \leq T$. В данном случае $\Sigma(X)$ – теоретико-множественное объединение подгрупп веера X (его амальгама).

Строение бесконечного веера конечных подгрупп в простой квазислойно конечной группе изучено в [8]. Нам понадобится эта теорема из [8].

ТЕОРЕМА 7. Пусть X – бесконечный веер всех максимальных подгрупп простой квазислойно конечной группы G , содержащих неединичный элемент a , и T – основание этого веера. Тогда справедливо одно из двух утверждений:

- 1) веер X содержит точно одну бесконечную подгруппу H группы G , $T < H$ и каждая конечная подгруппа $M \in X$ есть конечная группа Фробениуса с инвариантным множителем $M \cap H$, при этом ядра любых двух конечных подгрупп веера X имеют тривиальное пересечение;
- 2) все подгруппы веера X конечны, и существует разбиение $X = Y \cup X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ веера X на конечный или пустой веер Y и конечное число n правильных вееров X_i с основаниями T_i , при этом каждая подгруппа $H \in X_i$ есть группа Фробениуса с инвариантным множителем T_i ($i = 1, \dots, n$) и ядра любых двух подгрупп из веера $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ пересекаются тривиально.

Теорема 7 дополняется в настоящей работе следующим результатом.

ТЕОРЕМА 8. Если бесконечная простая квазислойно конечная группа G содержит пару конечных максимальных подгрупп с нетривиальным пересечением T , не являющихся группами Фробениуса, то G есть подгруппа группы автоморфизмов бесконечного однородного локально конечного графа, транзитивно действующая на множестве его вершин.

Наши исследования завершают результаты о парах порождающих простых квазислойно конечных групп, которые с помощью теоремы 1 легко экстраполировать на произвольные не черниковские квазислойно конечные группы.

ТЕОРЕМА 9. Для любой пары неединичных элементов a, b бесконечной простой квазислойно конечной группы G , хотя бы один из которых не является инволюцией, найдется бесконечно много элементов b^g таких, что $G = \langle a, b^g \rangle$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Бесконечная простая квазислойно конечная группа является монстром 1-го, 2-го и 3-го рода. В частности, для квазислойно конечных групп положительно решаются вопросы 13.53 и 14.83 из Коуровской тетради [13].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие вытекает непосредственно из теоремы 9, формулировок вопросов 13.53, 14.83 и определений монстров (см. вопросы 6.63, 6.64, 14.83 из Коуровской тетради [13]).

Напомним, что выражение “почти для всех” означает “для всех, кроме, быть может, конечного числа”. Следующая теорема усиливает утверждение теоремы 9 для некоторых пар порождающих простой квазислойно конечной группы.

ТЕОРЕМА 10. Пусть G – бесконечная простая группа, все собственные подгруппы которой слойно конечны, a, b – ее неединичные элементы и $H \geq C_G(a)$, $M \geq C_G(b)$ – максимальные подгруппы в G . Тогда

- 1) если $|H| = \infty$, $|M| = \infty$ и $M \notin H^G$, то $G = \langle a, c \rangle$ для каждого $c \in b^G$;
- 2) если $|H| < \infty$, $|M| = \infty$, то $G = \langle a, c \rangle$ почти для всех $c \in b^G$;
- 3) если $|a| = |b|$ – простое число и подгруппы $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ не сопряжены в G , то $G = \langle a, c \rangle$ почти для всех $c \in b^G$;
- 4) если $|H| < \infty$, $|a|, |b|$ – различные простые числа и $C_G(a)$ не содержит элементов из b^G , то $G = \langle a, c \rangle$ почти для всех $c \in b^G$;
- 5) если $|a| = 2$, $|b| \neq 2$ и $b^a = b^{-1}$, то $G = \langle b, c \rangle$ почти для всех элементов $c \in G$, инвертируемых инволюцией a .

Нам понадобятся несколько известных результатов, в основном признаков непростоты групп с некоторыми заданными системами конечных фробениусовых подгрупп. На них мы будем ссылаться как на предложения с соответствующими номерами.

Следующее предложение легко вытекает из свойств конечных групп Фробениуса (см., например, [14], [15]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть L – конечная группа Фробениуса с ядром F и неинвариантным множителем (дополнением) H . Тогда

- 1) порядки ядра F и дополнения H взаимно просты;
- 2) если $1 \neq K < L$ и (L, K) – пара Фробениуса, то $K \in H^L$;
- 3) F – нильпотентная группа ступени $\leq f(|H|)$;
- 4) если H содержит инволюцию i , то она единственна в H , F – абелева группа и i инвертирует F ;

- 5) если порядок H нечетен, то все элементы простых порядков из H порождают в ней циклическую подгруппу;
- 6) если $L = \langle a, b \rangle$, $a, b \in L \setminus F$, и порядки элементов a и b – простые числа, то либо H – циклическая группа, либо $H \simeq SL_2(3)$, либо $H \simeq SL_2(5)$;
- 7) если $L = \langle a, b \rangle$ и $b \in F$, то $L = \langle a, a^b \rangle$ и подгруппы H и $\langle a \rangle$ сопряжены в L .

Частным случаем основной теоремы из [16] является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть (G, H) – пара Фробениуса, $a \in H$ – элемент простого порядка $p > 2$ и все подгруппы $\langle a, a^g \rangle$, где $g \in G \setminus H$, конечны. Тогда $G = F \rtimes H$, в частности, G не проста.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (основная теорема из [17]). Пусть G – бесконечная группа, H – ее собственная подгруппа, a – ее элемент простого порядка $p > 2$ и почти для всех элементов a^g , где $g \in G \setminus H$, подгруппа $\langle a, a^g \rangle$ является конечной группой Фробениуса с инвариантным множителем $\langle a \rangle$. Тогда либо $|a^G| < \infty$, либо $G = F \rtimes N_G(\langle a \rangle)$ и $F \rtimes \langle a \rangle$ – группа Фробениуса с инвариантным множителем $\langle a \rangle$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 [18, теорема 3]. Пусть (G, H) – пара Фробениуса, $i \in H$ – инволюция и для некоторого неединичного элемента $a \in G$ конечного порядка, большего 2, и всех элементов $g \in G \setminus H$ подгруппы $\langle i, a^g \rangle$ конечны. Тогда $H = C_G(i)$, i – единственная инволюция в H и или $G = F \rtimes H$, где F – периодическая абелева подгруппа без инволюций, или $\langle a^G \rangle$ – периодическая абелева подгруппа без инволюций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 [18, теорема 4]. Пусть (G, H) – пара Фробениуса, H – локально конечная подгруппа, $a \in H$, $b \in G$ – элементы простых порядков p, q соответственно, $pq > 4$, и выполняются следующие условия:

- 1) для любого элемента $g \in G$ подгруппа $L_g = \langle a, b^g \rangle$ конечна;
- 2) ядра любых двух различных максимальных локально конечных фробениусовых подгрупп из G с дополнением $\langle a \rangle$ пересекаются по единичной подгруппе.

Тогда либо $b^G \cap H = \emptyset$ и $\langle a \rangle \cap \langle b^G \rangle = 1$, либо с точностью до обозначения $b \in H$ объединение ядер всех фробениусовых подгрупп группы G с инвариантным множителем $\langle a \rangle$ есть нормальная подгруппа F группы G и $G = F \rtimes H$.

Следующее предложение выводится непосредственно из теоремы 7 (см. также [8, теорема 2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть X – бесконечный веер конечных подгрупп простой квазилольно конечной группы G , содержащих неединичный почти регулярный элемент a . Тогда существует разбиение $X = Y \cup X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ веера X на конечный или пустой веер Y и конечное число n правильных вееров X_i с основаниями T_i . При этом каждая подгруппа $H \in X_i$ есть группа Фробениуса с инвариантным множителем T_i ($i = 1, \dots, n$).

2. Доказательство теорем 2, 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Итак, пусть $\{G_i\}_{i \in I}$ – конечное или счетное множество неединичных конечных или слойно конечных групп G_i без инволюций, $|I| \geq 2$, n_0 – достаточно большое нечетное число и X – свободная амальгама групп G_i .

Ввиду теоремы 35.1 из [9] амальгама X вложима в квазислойно конечную простую группу $G = G(\infty)$ [9], в которой всякая собственная подгруппа является или циклической группой порядка, делящего n_0 , или содержится в подгруппе, сопряженной с некоторой из групп G_i . Кроме того, как утверждается в доказательстве теоремы 35.1 из [9], существует такая группа $G = G(\infty)$, копредставление которой можно построить по правилу из [9, п. 34.3, с. 346–348], ввиду [9, лемма 34.14] удовлетворяющему условию R для копредставлений в свободном произведении F групп G_i . Поэтому в силу леммы 34.2 и следствия 25.1 из [9] градуированное копредставление данной группы $G = F/N$ асферично. По теореме 31.1 из [9] в этом случае мультипликатор Шура группы G – группа $N/[N, F]$ – является свободной абелевой группой счетного ранга. Пусть Z – произвольная конечная или слойно конечная абелева группа. В силу изложенного выше существует гомоморфизм группы $N/[N, F]$ на группу Z [19]. Пусть M – полный прообраз в N ядра этого гомоморфизма. Очевидно, что подгруппа M нормальна в F , $N/M = Z(F/M)$, $N/M \simeq Z$ и $(F/M)/(N/M) \simeq G$. Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Пусть G – бесконечная простая квазислойно конечная группа, H и M – ее максимальные конечные подгруппы, имеющие нетривиальное пересечение T и не являющиеся группами Фробениуса. Поскольку M не группа Фробениуса, то в $M \setminus H$ найдется элемент x такой, что пересечение $T^x \cap T \neq 1$. Ввиду максимальной H в G $N_G(H) = H$ и $H^x \neq H$. Так как $H \cap H^x \neq 1$, то в качестве M можно взять подгруппу H^x . Таким образом, считаем, что M сопряжена с H . Построим на множестве $X = \{H^g \mid g \in G\}$ граф Γ , соединяя ребрами те подгруппы из X , которые имеют нетривиальное пересечение. Граф Γ мы называем *сетью*. Понятно, что G изоморфно вложима в $\text{Aut}(\Gamma)$ в силу естественного действия сопряжением. Также очевидно, что G действует на Γ транзитивно.

Докажем, что сеть Γ является регулярным локально конечным графом. Рассмотрим множество S подгрупп H^g , где $g \in G$, каждая из которых не совпадает с H , но имеет с ней нетривиальное пересечение. Допустим, что множество S бесконечно. В силу конечности подгруппы H найдется такой элемент $h \in H$, который содержится в бесконечном множестве Y подгрупп из S . Но в этом случае Y – бесконечный веер подгрупп вида H^g . Ввиду теоремы 7 и предложения 6 почти все подгруппы такого веера должны быть группами Фробениуса. Получили противоречие с выбором подгруппы H . Следовательно, в S входит лишь конечное число подгрупп H^g , $g \in G$, и в силу того, что группа G действует транзитивно на X , Γ является локально конечным регулярным графом степени $|S| < \infty$ [20].

Покажем, что граф Γ связан и бесконечен. Пусть Γ_H – связная компонента графа Γ , содержащая подгруппу H . Очевидно, что группа G как группа подстановок множества Γ действует импримитивно на Γ и Γ_H – один из блоков импримитивности группы G . Поскольку для каждого элемента $h \in H$ имеем $H^h = H$, то $h \in N_G(\Gamma_H)$ и $H \subseteq N_G(\Gamma_H)$. Аналогично $H^x \subseteq N_G(\Gamma_H)$ для любой подгруппы $H^x \in S$. Ввиду максимальной H и H^x в G $\langle H, H^x \rangle = G$. А значит, $N_G(\Gamma_H) = G$, $\Gamma = \Gamma_H$ и Γ является связным и, очевидно, бесконечным графом. Теорема доказана.

3. Доказательство теорем 9, 10. Нам понадобятся несколько достаточных условий бесконечности централизатора неединичного элемента a в простой квазислойно-конечной группе G .

ЛЕММА 1. Пусть G – простая квазислойно конечная группа и a – ее неединичный элемент. При выполнении хотя бы одного из следующих ниже условий

централизатор $C_G(a)$ бесконечен.

- 1) Элемент a содержится в собственной бесконечной подгруппе группы G .
- 2) Элемент a перестановочен с неединичным элементом из G , централизатор которого бесконечен в G .
- 3) Элемент a перестановочен с инволюцией из G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Элемент a содержится в собственной бесконечной подгруппе H группы G , которая слойно конечна по условию. Следовательно, $|H : C_H(a)| < \infty$, $|C_H(a)| = \infty$ и $|C_G(a)| = \infty$.

2) Пусть $1 \neq b \in G$, $ab = ba$ и $|C_G(b)| = \infty$. Тогда $a \in C_G(b)$ и $|C_G(a)| = \infty$ по утверждению 1) леммы.

3) По теореме 6 централизатор каждой инволюции из G бесконечен и $|C_G(a)| = \infty$ по утверждению 2) леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если неединичный элемент a группы G содержится в бесконечном множестве X ее конечных нильпотентных групп, то его централизатор $C_G(a)$ бесконечен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если множество различных центров $Z(H)$ подгрупп $H \in X$ бесконечно, то $C_G(a)$ – бесконечная подгруппа ввиду очевидных включений $Z(H) \leq C_G(a)$.

Если множество центров $Z(H)$, где $H \in X$, конечно, то среди них найдется центр Z , совпадающий с центрами $Z(H)$ для подгрупп H бесконечного подмножества $Y \subseteq X$. В этом случае бесконечна подгруппа $T = C_G(Z)$. Поскольку $a \in T$, то $C_G(a)$ бесконечен по лемме 1. Лемма доказана.

Для произвольного неединичного элемента $x \in G$ обозначим через N_x объединение ядер всех конечных фробениусовых подгрупп из G , инвариантный множитель которых совпадает с $\langle x \rangle$.

ЛЕММА 3. Пусть элемент a почти регулярен в G и $1 \neq b \in N_a$. Тогда имеют место неравенства $|C_G(b)| < \infty$ и $|N_a \cap b^G| < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $|C_G(b)| = \infty$ и H – максимальная подгруппа из G , содержащая $C_G(b)$ (ее существование доказано в [7, лемма 1.3]). По условиям леммы $L = \langle a, b \rangle$ – группа Фробениуса с ядром, содержащим элемент b . Ввиду регулярности элемента a и утверждения 1) леммы 1 $a \notin H$. Но тогда по теореме 5 L – группа Фробениуса с инвариантным множителем $L \cap H$, содержащим элемент b , что противоречит предположению 1. Следовательно, $|C_G(b)| < \infty$.

Докажем второе неравенство. Предположим, что бесконечно много подгрупп $L_g = \langle a, b^g \rangle$, где g пробегает некоторое бесконечное подмножество $Y \subseteq G$, являются конечными группами Фробениуса и содержат элемент b^g в своем ядре F_g . Тогда элемент b содержится в пересечении ядер $gF_g g^{-1}$ групп Фробениуса $gL_g g^{-1}$ с инвариантными множителями $\langle gag^{-1} \rangle$, где $g \in Y$. Если множество ядер $gF_g g^{-1}$, где $g \in Y$, бесконечно, то централизатор $C_G(b)$ бесконечен по лемме 2. Однако это противоречит доказанному неравенству $|C_G(b)| < \infty$. Следовательно, множество указанных ядер конечно. Тогда для элементов g некоторого бесконечного подмножества $Z \subseteq Y$ все ядра $gF_g g^{-1}$ совпадают и равны некоторой подгруппе F . В этом случае $gag^{-1} \in N_G(F)$ для каждого $g \in Z$ и ввиду бесконечности Z и конечности $C_G(a)$ заключаем, что подгруппа $N_G(F)$ бесконечна. Но тогда и подгруппа $C_G(b)$ бесконечна (лемма 1), снова противоречие. Следовательно, $|N_a \cap b^G| < \infty$ и лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Предположим, что теорема 9 неверна, т.е. в некоторой простой квазислойно конечной группе G найдутся неединичные элементы a и b с $|a| \cdot |b| > 4$ такие, что почти для всех элементов $c \in b^G$ подгруппы $\langle a, c \rangle$ конечны. Леммы 4–11 будут доказываться при этом предположении.

ЛЕММА 4. $C_G(a)$ – конечная подгруппа, порядок элемента a нечетен и можно считать, что $|a| = p$ – простое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что подгруппа $C_G(a)$ бесконечна. По лемме 1.3 из [7] подгруппа $C_G(a)$ содержится в некоторой максимальной подгруппе H группы G . Пусть X – множество элементов $c \in b^G$, для которых подгруппа $\langle a, c \rangle$ бесконечна. Понятно, что X – конечное множество и для любого элемента $x \in X$ выполняется $\langle a, x \rangle = G$ и $x \notin H$. Также очевидно, что $C_G(a) \leq N_G(X)$. По условиям X – конечное множество, а подгруппа $C_G(a)$ бесконечна. Отсюда заключаем, что индекс подгруппы $C_G(a) \cap C_G(x)$ в $C_G(a)$ конечен и $H \cap H^x \neq 1$ при $x \in X$. Однако по следствию 1 (G, H) – пара Фробениуса. Полученное противоречие означает, что X – пустое множество и, значит, в G конечны все подгруппы вида $\langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$.

Так как для любых неединичных элементов $r \in \langle a \rangle$, $s \in \langle b \rangle$ все подгруппы $\langle r, s^g \rangle$ также конечны, то для доказательства теоремы и в том числе данной леммы достаточно ограничиться рассмотрением следующих случаев:

- 1) $|a| = 2$, $|b| \geq 3$;
- 2) $|a| \geq 3$, $|b| = 2$;
- 3) $|a| = |b| = p$, p – нечетное простое число;
- 4) $|a| = p$, $|b| = q$, где p и q – различные простые числа.

По следствию 1 (G, H) – пара Фробениуса. Ввиду простоты группы G и предложения 4 первый из перечисленных случаев невозможен.

Ввиду доказанной выше конечности всех подгрупп вида $\langle a, b^g \rangle$ все подгруппы вида $\langle b, a^g \rangle$ также конечны. Поэтому второй случай с учетом теоремы 6, следствия 1 и предложения 4 невозможен аналогично первому.

Пусть $|a| = |b| = p$, p – нечетное простое число. Ввиду бесконечности максимальной подгруппы $H \geq C_G(a)$ и теоремы 5 для любого элемента $b^g \in G \setminus H$ ($g \in G$) $L_g = \langle a, b^g \rangle$ – конечная группа Фробениуса. По предложению 1 подгруппы $\langle a \rangle$, $\langle b^g \rangle$ сопряжены в L_g и без ограничения общности можно считать, что $a = b$. Поскольку (G, H) – пара Фробениуса, то для группы G , ее собственной подгруппы H и элемента a выполняются все условия предложения 2. По предложению 2 G не проста. Следовательно, рассматриваемый случай не может иметь места.

Пусть, наконец, $|a| = p$, $|b| = q$, где p и q – различные простые числа, которые ввиду рассмотренных ранее случаев 1), 2) можно считать отличными от 2. Снова по следствию 1 (G, H) – пара Фробениуса и, применяя теорему 5 к паре (G, H) и подгруппам $L_g = \langle a, b^g \rangle$ ($b^g \in b^G \setminus H$), которые все конечны по доказанному выше, убеждаемся, что выполняются все условия предложения 5. По предложению 5 G не проста, окончательное противоречие. Следовательно, централизатор $C_G(a)$ конечен.

Ввиду леммы 1 $|a|$ – нечетное число, которое можно считать простым ввиду того, что если теорема верна для простых $|a|$, то она тем более справедлива и для составных значений $|a|$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. $C_G(b)$ – конечная подгруппа и можно считать, что $|b| = q$ – нечетное простое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, если теорема верна для простых $|b|$, то она тем более справедлива и для составных значений $|b|$. Поэтому с учетом рассмотренного в доказательстве леммы 4 случая $|b| = 2$ в дальнейшем будем считать, что $|b| = q$ – простое нечетное число. Итак, $|a| = p$ (лемма 4), $|b| = q$, где p и q – необязательно различные нечетные простые числа.

Предположим, что $|C_G(b)| = \infty$, и пусть M – максимальная подгруппа, содержащая $C_G(b)$, существование которой гарантировано леммой 1.3 из [8]. Рассмотрим веер X всех максимальных подгрупп группы G , содержащих элемент a . Ввиду конечности $C_G(a)$ и леммы 1 X состоит из конечных подгрупп. Поскольку класс b^G , очевидно, бесконечен и почти весь содержится в амальгаме $\Sigma(X)$ веера X , то веер X бесконечен. По теореме 7 X состоит из конечных фробениусовых подгрупп L с инвариантными множителями H_L , содержащими элемент a . Пусть $b^g \in L$. По теореме 5 L – группа Фробениуса с дополнением $L \cap M^g$ и по предложению 1 $H_L = (L \cap M^g)^x$ для некоторого элемента $x \in L$. Но тогда $a \in M^{gx}$ и $C_G(a)$ бесконечен по лемме 1, что противоречит лемме 4. Следовательно, $|C_G(b)| < \infty$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Почти для всех элементов вида b^g подгруппы $M_g = \langle a^g, b \rangle$ конечны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойств группы G подгруппы M_g могут быть либо конечными, либо совпадать с G . Если для некоторого элемента $g \in G$ имеет место равенство $M_g = \langle b, a^g \rangle = G$, то $G = \langle b, a^g \rangle^{g^{-1}} = \langle a, b^{g^{-1}} \rangle = L_{g^{-1}}$. Ввиду конечности $C_G(b)$ (лемма 5) и предположения о конечности подгрупп $L = \langle a, b^x \rangle$ почти для всех элементов $b^x \in b^G$ равенство $G = L_{g^{-1}}$ может выполняться лишь для конечного множества Y элементов $g \in G$. Следовательно, для $g \in G \setminus Y$ выполняется $M_g \neq G$, т.е. почти для всех элементов $a^g \in a^G$ подгруппы $M_g = \langle b, a^g \rangle$ конечны. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *В случае $p = q$ теорема верна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p = q$. Рассмотрим веер X_a всех конечных подгрупп $L_g = \langle a, b^g \rangle$, $g \in G$. В силу принятых предположений веер X_a бесконечен. Ввиду теоремы 7 и предложения 6 почти все подгруппы $L_g = \langle a, a^g \rangle \in X_a$ являются конечными группами Фробениуса с дополнениями H_g , содержащими элемент a . Если бы дополнение H_g в L_g имело четный порядок, то ввиду единственности инволюции в H_g (предложение 1), теоремы 6 и леммы 1 мы получили бы $|C_G(a)| = \infty$, вопреки лемме 4. Следовательно, дополнения H_g фробениусовых подгрупп $L_g \in X_a$ имеют нечетный порядок. Ввиду их порожденности двумя элементами одного и того же простого порядка p заключаем, что $H_g = \langle a \rangle$ и подгруппы $\langle a \rangle$, $\langle b^g \rangle$ сопряжены в L_g (предложение 1). Отсюда заключаем, что почти для каждого элемента a^g , где $g \in G$, $L_g = \langle a, a^g \rangle$ есть конечная группа Фробениуса с инвариантным множителем $\langle a \rangle$. По предложению 3 $G = F \rtimes N_G(\langle a \rangle)$. Однако это противоречит простоте группы G . Следовательно, при $|a| = |b|$ теорема верна и лемма доказана.

Итак, далее считаем, что $|a| = p \neq q = |b|$. Напомним, что $N_a(N_b)$ – множество всех элементов из ядер конечных групп Фробениуса из G с инвариантным множителем $\langle a \rangle$ ($\langle b \rangle$).

ЛЕММА 8. *Почти для каждого элемента $b^g \in b^G$ подгруппа $L_g = \langle a, b^g \rangle$ является группой Фробениуса с циклическим дополнением порядка pq , множества N_a и N_b бесконечны, и можно считать, что $ab = ba$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим веер X_a конечных подгрупп $L_g = \langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$. В силу бесконечности класса b^G веер X_a бесконечен. Ввиду леммы 4 и предложения 6 почти каждая подгруппа L_g из X_a есть группа Фробениуса с дополнением H_g , содержащим элемент a . По лемме 3 элемент b^g не содержится в ядрах почти всех подгрупп L_g . Из предложения 1 и лемм 1, 4 следует, что инвариантный множитель каждой из фробениусовых подгрупп L_g имеет нечетный порядок. Снова применяя предложение 1, заключаем, что почти для всех $g \in G$ инвариантные множители H_g фробениусовых подгрупп $L_g \in X_a$ – циклические группы порядка pq . В частности, элемент a перестановочен с некоторым элементом из $H_g \cap b^G$, и без ограничения общности можно считать, что $ab = ba$.

Далее, ввиду теоремы 7 ядра F_g фробениусовых подгрупп L_g содержатся в ядрах соответствующих максимальных конечных фробениусовых подгрупп, которые попарно пересекаются по единичной подгруппе, а множество их возможных дополнений, содержащих элемент a , конечно. Отсюда в силу бесконечности веера X_a заключаем, что множество различных ядер F_g фробениусовых подгрупп $L_g \in X_a$ бесконечно и поэтому N_a – бесконечное множество. Этот факт можно получить и другим путем. Если множество N_b конечно, то и число различных ядер F_g , где $L_g \in X_a$, конечно. Но тогда для некоторого ядра $F = F_g$ пересечение $N_G(F) \cap b^G$ бесконечно и по утверждению 1) леммы 1 $C_G(b)$ – бесконечная группа, что противоречит лемме 5.

Далее, ввиду леммы 6 заключаем, что рассматриваемая ситуация симметрична относительно элементов a и b . Поэтому и N_b – бесконечное множество. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. *Имеет место неравенство $|N_a \setminus N_b| < \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду свойств конечных групп Фробениуса [14], [15] элемент вида bc , где $c \in N_b$, сопряжен с элементом b в подгруппе $\langle b, c \rangle$, и в силу леммы 8 только для конечного числа элементов $c \in N_b$ подгруппы

$$L^+ = \langle a, bc \rangle, \quad L^- = \langle a, b^{-1}c \rangle$$

не являются группами Фробениуса с циклическим инвариантным множителем порядка pq . Поскольку конечное число таких “нехороших” элементов не влияет на утверждение доказываемой леммы, то без ограничения общности мы можем считать, что N_b уже не содержит таких элементов.

По лемме 8 $b \in C_G(a)$ и, значит, $a^c \in L^+ \cap L^-$. Из предложения 1 следует, что подгруппы $\langle a \rangle$ и $\langle a^c \rangle$ сопряжены в L^+ и L^- с помощью некоторого элемента $c_a \in N_a$, при этом в силу утверждения 6) предложения 1 элемент c_a принадлежит пересечению ядер фробениусовых подгрупп L^+ и L^- . Отсюда также выводим, что $c = rc_a$, где $r \in N_G(\langle a \rangle)$.

Пусть Z – веер всех максимальных подгрупп из G , содержащих элемент a . Ввиду лемм 4, 1 Z состоит только из конечных подгрупп. Так как амальгама $\Sigma(Z)$ веера Z почти полностью содержит бесконечный класс b^G , то веер Z бесконечен. По теореме 7 получаем разбиение $Z = Z_1 \cup Z_2$, где Z_1 – конечный веер, а Z_2 бесконечен и все подгруппы из Z_2 являются группами Фробениуса с инвариантным множителем, содержащим элемент a . При этом ядра любых двух подгрупп из Z_2 пересекаются тривиально. Ввиду лемм 1, 4 элемент a не перестановочен ни с одной инволюцией группы G . Учитывая предложение 1, приходим к выводу, что содержащие элемент a дополнения всех фробениусовых подгрупп из Z_2 суть некоторые подгруппы из $R = N_G(\langle a \rangle)$. Нетрудно убедиться, что свойство тривиальности попарных пересечений ядер подгрупп из Z_2 можно

значительно усилить, а именно: $Z_2 = Z_0 \cup Z_3$, где Z_0 – пустой или конечный веер, а ядро любой подгруппы H из Z_3 не имеет общих неединичных элементов с любой подгруппой $M \in Z$, отличной от H .

Ввиду леммы 4 $R = N_G(\langle a \rangle)$ – конечная подгруппа. Учитывая вышесказанное, приходим к выводу, что только для конечного числа элементов $c = rc_a \in N_b$ элементы c_a не содержатся в подгруппах из веера Z_3 . Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что уже все элементы вида c_a содержатся в подгруппах из Z_3 и, следовательно, в ядрах этих фробениусовых подгрупп. Пусть H – подгруппа из Z_3 , содержащая элемент c_a , и F – ее ядро. Из свойств веера Z_3 вытекает, что подгруппы L^+ и L^- содержатся в H . Действительно, L^+ содержится в некоторой максимальной подгруппе M , и так как $a \in L^+$, то $M \in Z$. Поскольку $c_a \in F \cap L^+$, то $M = H$ и $L^+ \leq H$. Аналогично, $L^- \leq H$.

Итак, $bc, b^{-1}c \in H$, $b^2 = bc(b^{-1}c)^{-1} \in H$, и так как порядок элемента b нечетен (лемма 5), то $b \in H$ и $c \in H$. Поскольку $ab = ba$ (лемма 8), то элемент b содержится в инвариантном множителе группы H . Отсюда заключаем, что $c \in F$ и $r = cc_a^{-1} \in F$. Но $C_F(a) = 1$; следовательно, $r = 1$ и $c = c_a \in N_a$. Таким образом, множество $N_b \setminus N_a$ не более чем конечно, и лемма доказана.

На бесконечных подмножествах группы G введем отношение $\sim$: $X \sim Y$ в том и только том случае, если $|X \setminus Y| < \infty$ и $|Y \setminus X| < \infty$. Нетрудно убедиться, что $\sim$ есть отношение эквивалентности.

ЛЕММА 10. *Имеем $N_a \sim N_b$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 6 рассматриваемая нами ситуация симметрична относительно элементов a и b . Так, поменяв местами элементы a , b и повторив рассуждения лемм 8, 9, докажем, что множество $N_a \setminus N_b$ конечно. С учетом леммы 9 это означает, что $N_a \sim N_b$. Лемма доказана.

По лемме 4 $C_G(a)$ – конечная группа и, следовательно, она содержит конечное число n различных циклических подгрупп $\langle b_1 \rangle, \dots, \langle b_n \rangle$, сопряженных в G с подгруппой $\langle b \rangle$.

ЛЕММА 11. *Подгруппа $B = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ циклическая, т.е. $n = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова рассмотрим веер X_a конечных подгрупп $L_g = \langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$. Ввиду леммы 8 $X_a = Y \cup X$, где Y – конечный веер, а веер X бесконечен и состоит из фробениусовых подгрупп с циклическими дополнениями порядка pq . Поскольку в качестве элемента b мы можем выбрать любой элемент из элементов $b_1, \dots, b_n$, то в соответствии с леммой 8 (и теоремой 7) получаем разбиение веера $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ на бесконечные вееры $X_1, \dots, X_n$ с основаниями $\langle ab_i \rangle$. Применяя лемму 10, получаем

$$N_a \sim N_{b_1}, \dots, N_a \sim N_{b_n}, \quad N_{b_i} \sim N_{b_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Отсюда выводим, что для множества $N = N_a \cap N_{b_1} \cap \dots \cap N_{b_n}$ выполняется $N \sim N_a$ и множество $N_a \setminus N$ конечно.

Пусть Z – веер всех максимальных по включению фробениусовых подгрупп из G с инвариантным множителем $\langle a \rangle$. Ввиду теоремы 7 $Z = Z_1 \cup Z_2$, где Z_1 – конечный веер, Z_2 – бесконечный веер и ядро каждой подгруппы $H \in Z_2$ имеет тривиальное пересечение с ядром любой отличной от H подгруппы из Z_2 . Очевидно, что все элементы из N содержатся в ядрах подгрупп из Z . Выбросив из Z_2 подгруппы, ядра которых имеют неединичные пересечения хотя бы с одной из подгрупп веера Z_1 , мы получим веер Z_3 ,

ядра подгрупп H которого имеют единичное пересечение с любой подгруппой $M \in Z$, отличной от H . Нетрудно убедиться, что веер $Z \setminus Z_3$ конечен.

Обозначим через N_0 множество элементов из ядер подгрупп веера Z_3 . Ввиду выше-доказанного $N_0 \sim N$.

Пусть c – произвольный элемент из N_0 и H_c – подгруппа из Z_3 , содержащая элемент c , а F_c – ее ядро. Поскольку $N_0 \subseteq N_a \cap N_{b_i}$ ($1 \leq i \leq n$), то подгруппы $\langle b_i c \rangle$ сопряжены в G с подгруппой $\langle b \rangle$ и $L_c = \langle a, b_i c \rangle$ – конечная группа Фробениуса с циклическим неинвариантным множителем порядка pq . По свойствам конечных групп Фробениуса элемент c содержится в подгруппе L_c (предложение 1). Значит, L_c – группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle ab_i \rangle$ и ядром R_c , содержащим элемент c . В силу свойств множества Z_3 заключаем, что $R_c \leq F_c$ и $b_i \in N_G(F_c)$ ($i = 1, \dots, n$).

Пусть C – подгруппа, порожденная элементами $a, b_1, \dots, b_n$. Как доказано выше, подгруппа C нормализует каждую подгруппу F_c , где $c \in N_0$. Поэтому каждая из подгрупп $F_c \rtimes C = K_c$, где $c \in N_0$, конечна и они составляют бесконечный веер W с основанием D , содержащим подгруппу C . Ввиду теоремы 7 почти все подгруппы $K_c \in W$ являются группами Фробениуса с неинвариантным множителем C и ядром F_c . Используя конечность подгруппы $C_G(a)$, утверждение 3) леммы 1 и предложение 1, заключаем, что C не содержит инволюций. Теперь из свойств неинвариантного множителя в конечной группе Фробениуса (предложение 1) вытекает, что $B = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \leq K_c$ – циклическая группа простого порядка q . Поэтому $B = \langle b \rangle$ и $n = 1$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 9. Применяя леммы 10, 11, заключаем, что почти все элементы класса b^G содержатся в множестве $\langle b \rangle \cdot N_0$, где $N_0 = N_a \cap N_b$. Понятно, что для любого элемента $c \in N_0$ подгруппа $\langle b, c \rangle$ конечна. Поэтому почти для всех элементов b^g подгруппы $\langle b, b^g \rangle$ конечны и являются группами Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle b \rangle$. Поскольку $|b^G| = \infty$, то отсюда и из предложения 2 следует равенство $G = F \rtimes N_G(\langle b \rangle)$, что противоречит простоте группы G . Полученное противоречие означает, что теорема 9 верна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. 1) Пусть выполняются условия утверждения 1) теоремы, и предположим, что $L = \langle a, c \rangle \neq G$ для некоторого элемента $c \in b^G$. Тогда L – конечная группа и ввиду теоремы 4 и условий утверждения 1 $L \cap H \neq L \cap M \neq 1$. По теореме 5 L – группа Фробениуса и $L \cap H$, $L \cap M$ – ее дополнения. Но тогда по предложению 1 $L \cap H = L \cap M^x$ для некоторого элемента $x \in L$ и $H \cap M^x \neq 1$ вопреки теореме 4 и условиям утверждения. Следовательно, $G = \langle a, c \rangle$ для любого элемента $c \in b^G$.

2) Пусть $L_c = \langle a, c \rangle \neq G$ для бесконечного числа элементов $c \in b^G$. Тогда эти подгруппы L_c являются конечными группами Фробениуса с дополнениями $L \cap M = \langle c \rangle$ (теорема 5), а ввиду предложения 1 их ядра F_c попарно различны и нильпотентны. Но тогда по лемме 2 централизатор $C_G(a)$ бесконечен, противоречие. Значит, доказываемое утверждение верно.

3) Снова допустим, что $L_c = \langle a, c \rangle \neq G$ для бесконечного числа элементов $c \in b^G$. Тогда ввиду предложения 6 конечные подгруппы L_c почти все являются группами Фробениуса с дополнениями, содержащими элемент a . Применяя предложение 1, заключаем, что подгруппы $\langle a \rangle$ и $\langle c \rangle$ сопряжены в L_c вопреки условиям. Утверждение доказано.

4) Предполагая, что доказываемое утверждение неверно, рассмотрим бесконечный веер X конечных подгрупп $L_c = \langle a, c \rangle \neq G$, где $c \in b^G$. Поскольку любая собствен-

ная подгруппа K в G слойно конечна, то она может включать в себя не более чем конечное число подгрупп из X . Учитывая предложение 6, заключаем, что почти каждая подгруппа L_c из X есть группа Фробениуса с дополнением T_c , содержащим элемент a . Из предложения 1, леммы 1 и конечности $C_G(a)$ следует, что порядок T_c нечетен. Поэтому если элемент c не лежит в ядре фробениусовой группы L_c , то по предложению 1 $b^G \cap C_G(a)$ не пусто вопреки условиям утверждения. Следовательно, каждый элемент c из фробениусовой группы L_c содержится в ее ядре. Но тогда получаем противоречие с леммой 3. Итак, утверждение верно.

5) Если $K = \langle b, c \rangle$, то $i \in N_G(K)$ и ввиду теорем 6, 5 и предложения 1 $K \rtimes \langle i \rangle$ – группа Фробениуса с абелевым ядром K . Согласно теореме 5 это может выполняться только для конечного числа элементов $c \in N_a$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Черников С. Н. К теории бесконечных p -групп // Докл. АН СССР. 1945. Т. 50. № 1. С. 71–74.
- [2] Черников С. Н. Бесконечные слойно конечные группы // Матем. сб. 1948. Т. 22. № 64. С. 101–133.
- [3] Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980.
- [4] Горчаков Ю. М. Группы с конечными классами сопряженных элементов. М.: Наука, 1978.
- [5] Сенашов В. И. Слойно конечные группы. Новосибирск: ВО Наука, 1993.
- [6] Созутов А. И. О существовании в группе f -локальных подгрупп // Алгебра и логика. 1997. Т. 36. № 5. С. 573–598.
- [7] Созутов А. И., Шахова С. И. О квазислойно конечных группах // Вест. Крас. архит.-строит. акад. Вып. 1. Сб. науч. тр. Красноярск, 1999. С. 77–83.
- [8] Созутов А. И., Шахова С. И. О строении квазислойно конечных групп // Вест. Крас. архит.-строит. акад. Вып. 1. Сб. науч. тр. Красноярск, 2000. С. 69–76.
- [9] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
- [10] Шунков В. П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11. № 4. С. 470–493.
- [11] Шунков В. П. О достаточных признаках существования в группе бесконечных локально конечных подгрупп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. № 6. С. 716–737.
- [12] Лоссов К. И. Достаточные условия вложимости амальгамы в периодическую группу // Тезисы сообщений 19-й Всесоюзной алгебраической конференции. Ч. 1. Львов, 1987. С. 163.
- [13] Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. Изд-е 14-е. Новосибирск, 1999.
- [14] Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М. Конечные расплеваемые группы. М.: Наука, 1968.
- [15] Старостин А. И. О группах Фробениуса // Укр. матем. ж. 1971. Т. 23. № 5. С. 629–639.
- [16] Созутов А. И., Шунков В. П. Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Матем. сб. 1976. Т. 100. № 4. С. 495–506.
- [17] Созутов А. И., Шунков В. П. О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами // Алгебра и логика. 1977. Т. 16. № 6. С. 711–735.
- [18] Созутов А. И. О некоторых признаках простоты групп с инволюциями // Алгебра и логика. (в печати).
- [19] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
- [20] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.