Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, А. И. Шафаревич, Представления быстроубывающих функций каноническим оператором Маслова, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 5, 792–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4090>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 11:05:29

Представления быстроубывающих функций каноническим оператором Маслова

С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, А. И. Шафаревич

1. Основной результат. Пусть μ – малый положительный параметр, а $V(y)$, $y \in \mathbb{R}^2$, – гладкая функция, убывающая на бесконечности как $1/|y|^k$, $k \geq 2$, причем производные $\partial V/\partial y_j$ убывают как $1/|y|^{k+1}$. Функция $V(x/\mu)$ локализована в окрестности нуля. Обозначим через $\tilde{V}(p)$ ее преобразование Фурье:

$$\tilde{V}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_y^n} e^{-i\langle p, y \rangle} V(y) dy. \quad (1)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – вещественное скалярное произведение. Тогда справедлива формула

$$V\left(\frac{x}{\mu}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_p^n} e^{(i/\mu)\langle p, x \rangle} \tilde{V}(p) dp. \quad (2)$$

Функция $V(x/\mu)$ быстро убывает при $\mu \rightarrow +0$ вне малой окрестности точки $x = 0$. Имея в виду изучение асимптотических решений задачи Коши с начальными данными вида (2) для уравнений в частных производных выражение в правой части можно записать в виде канонического оператора Маслова [1] $K_{\Lambda_\delta}^\mu$ на лагранжевом многообразии (плоскости) $\Lambda_\delta = \{p = \alpha, x = 0, \alpha \in \mathbb{R}^n\}$, действующим на функцию $\tilde{V}(\alpha)$ (на Λ_δ):

$$V\left(\frac{x}{\mu}\right) = \left(\frac{\mu}{i}\right)^{n/2} K_{\Lambda_\delta}^\mu[\tilde{V}(\alpha)]. \quad (3)$$

Мы полагаем здесь и всюду ниже $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$. Последнее равенство легко следует из определения канонического оператора с учетом того, что

- (а) на Λ^2 действие $\int \langle p, dx \rangle = 0$;
- (б) все точки на Λ_δ фокальные и бесконечно вырождены, так что Λ_δ покрывается одной фокальной картой $x = 0$ с координатами $(p_1, \dots, p_n)$;
- (с) якобиан $\det \partial p / \partial \alpha|_{\Lambda_\delta} \equiv 1$.

Функция $V(x/\mu)/\mu^n$ определяет некоторую δ -образную последовательность: при $\mu \rightarrow +0$ функция $V(x/\mu)/\mu^n \rightarrow \delta(x) \int_{\mathbb{R}^n} V(y) dy$, где $\delta(x)$ – функции Дирака, и правая часть в (3) есть интегральное представление для δ -образной последовательности. По этой причине лагранжево многообразие Λ_δ в представлении (3) такое же, как в формуле для одного из представлений δ -функции через канонический оператор Маслова [1]. Такое представление хорошо работает при изучении локализованных решений в случае, когда символ (гамильтониан) H изучаемого дифференциального уравнения – гладкая функция, например, в случае уравнения Шрёдингера: тогда $H = p^2/2 + v(x)$. В случае, когда гамильтониан H – негладкая функция (например, для волнового уравнения $H = |p|c(x)$), представление (3) оказывается не очень эффективным с точки зрения получения простых асимптотических формул [2], [3].

В этой заметке мы даем новое представление функции $V(x/\mu)$ с помощью канонического оператора Маслова в виде, отличном от (3) и существенно более эффективным при

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00968) и соглашения о сотрудничестве между ИПМех РАН и Университетом “La Sapienza”.

изучении решений задачи Коши с локализованными начальными данными для (систем) гиперболических уравнений [4]. Наш центральный результат состоит в наблюдении, согласно которому функция $V(x/\mu)$ может быть представлена в виде интеграла по вспомогательной переменной ρ от канонического оператора Маслова с “квазиклассическим” параметром $h = \mu/\rho$, определенном на лагранжевом многообразии, отличном от Λ_δ и действующим на функцию f , связанную с $\tilde{V}$. Ограничиваясь для большей наглядности случаем $n = 2$, мы покажем, что

$$V\left(\frac{x}{\mu}\right) = \sqrt{\frac{\mu C_0}{2\pi}} e^{-i\pi/4} \int_0^\infty K_{\Lambda_0^2}^{\mu/\rho} \sqrt{\rho} \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi)) d\rho + O(\mu). \quad (4)$$

Здесь

$$\mathbf{n}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix},$$

лагранжево многообразии

$$\Lambda_0^2 = \{p = \mathbf{n}(\psi), x = C_0 \mathbf{n}(\psi) \alpha\}, \quad (5)$$

C_0 – произвольная положительная константа, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{S} = [0, 2\pi)$ – координаты на Λ_0^2 , а $K_{\Lambda_0^2}^h$ – канонический оператор Маслова с формой площади $d\alpha \wedge d\psi$ и отмеченной точкой, лежащей на окружности $\alpha = 0$. С точки зрения перехода $V(x/\mu)$ при $\mu \rightarrow +0$ к δ -функции представление (4) соответствует переходу к полярным координатам в интеграле (2). Заметим также, что многообразие Λ_0^2 хорошо известно в теории псевдодифференциальных операторов и их применения к задачам о распространении особенностей [5].

Более полно результат, касающийся (4), мы приведем ниже в виде теоремы 1. Для доказательства (4) предварительно напомним определения объектов, относящихся к каноническому оператору.

2. Лагранжево многообразие Λ_0^2 , его свойства и функции на нем.

2.1. Инвариантность. Ясно, что Λ_0^2 – двумерное лагранжево многообразие, диффеоморфное цилиндру. Отметим, что оно может быть получено сдвигом окружности $S^1 = \{p = \mathbf{n}(\psi), x = 0\}$ вдоль траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом $\mathcal{H} = |p|C_0$: $\Lambda_0^2 = \bigcup_{-\infty < \alpha < \infty} g_{\mathcal{H}}^\alpha S^1$. Здесь, как обычно, $g_{\mathcal{H}}^t$ обозначает фазовый поток соответствующей гамильтоновой системы $\dot{x} = p/|p|C_0$, $\dot{p} = 0$, $p|_{t=0} = \mathbf{n}(\psi)$, $x|_{t=0} = 0$. Координата α играет роль времени t , т.е. для каждой точки $(\psi, \alpha) \in \Lambda_0^2$ $g_{\mathcal{H}}^t(\psi, \alpha) = (\psi, \alpha + t)$.

2.2. Цикл особенностей проекции на плоскость $p = 0$ и класс Маслова. Проекция многообразия Λ_0^2 на плоскость $p = 0$ устроена следующим образом. Над каждой точкой плоскости, кроме нуля, расположено две точки цилиндра Λ_0^2 , причем дифференциал проекции в этих точках отличен от нуля. Над нулем висит окружность $\alpha = 0$, в точках которой ранг дифференциала падает на единицу; это – цикл особенностей. Ясно, что поскольку любой цикл на Λ_0^2 можно сдвинуть так, что он не будет пересекать цикл особенностей, класс Маслова многообразия Λ_0^2 равен нулю (другими словами, индекс Маслова любой замкнутой кривой равен нулю).

2.3. Форма действия. Поскольку базисный цикл на Λ_0^2 можно выбрать лежащим в плоскости $x = 0$, интеграл от формы действия $\langle p, dx \rangle$ по любой замкнутой кривой равен нулю и эта форма точна: $\langle p, dx \rangle = d(C_0 \alpha)$. Положим $\int \langle p, dx \rangle = C_0 \alpha$.

2.4. Канонические карты. Выберем канонические карты на Λ_0^2 следующим образом. Каждая карта гомеоморфна полосе и представляет собой декартово произведение прямой $\alpha \in \mathbb{R}$ на дугу окружности. Карта Ω_1 соответствует дуге $-\pi/4 - \zeta < \psi < \pi/4 + \zeta$, карта Ω_2 – дуге $\pi/4 - \zeta < \psi < 3\pi/4 + \zeta$, карта Ω_3 – дуге $3\pi/4 - \zeta < \psi < 5\pi/4 + \zeta$ и, наконец, карта

Ω_4 – дуге $5\pi/4 - \zeta < \psi < 7\pi/4 + \zeta$. Здесь и далее ζ – достаточно малое положительное число. В качестве канонических координат в картах Ω_1, Ω_3 выберем x_1, p_2 , а в картах Ω_2, Ω_4 – x_2, p_1 .

2.5. Форма площади. Форма площади в канонических координатах есть

$$d\alpha \wedge d\psi = \frac{1}{C_0 \sin^2 \psi} dp_1 \wedge dx_2 = \frac{1}{C_0 \cos^2 \psi} dx_1 \wedge dp_2 = \frac{1}{C_0 \alpha} dx_1 \wedge dx_2.$$

2.6. Разбиение единицы. Обозначим через $\mathbf{e}_j$ разбиение единицы, подчиненное покрытию Ω_j ; это – четыре функции на Λ_0^2 , обладающие свойствами $\text{supp } \mathbf{e}_j(\psi) \in \Omega_j^I$, $\sum_j \mathbf{e}_j = 1$. Нам также понадобится срезающая функция $\mathbf{e}_0(\alpha)$, $\mathbf{e}_0(\alpha) = 1$ при $|\alpha| < \delta/2$, и $\mathbf{e}_0(\alpha) = 0$ при $|\alpha| > \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало.

2.7. Функция источника. Функция $V(y)$ порождает функцию на Λ_0^2 следующего вида:

$$f(\rho, \psi) = \sqrt{\rho} \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi)). \quad (6)$$

Произведение $f(\rho, \psi) \mathbf{e}_0(\alpha)$ определяет финитную функцию на Λ_0^2 .

2.8. Частичное $\hbar$ -преобразование Фурье. Напомним, что в конструкции канонического оператора участвуют операторы преобразования Фурье по части переменных:

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}_{p_1 \rightarrow x_1}^{-\hbar} \chi(p_1, x_2)](x_1, x_2) &= \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(p_1, x_2) e^{ip_1 x_1/\hbar} dp_1, \\ [\mathcal{F}_{p_2 \rightarrow x_2}^{-\hbar} \chi(x_1, p_2)](x_1, x_2) &= \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x_1, p_2) e^{ip_2 x_2/\hbar} dp_2, \quad \sqrt{i} = e^{i\pi/4} \end{aligned}$$

3. Канонический оператор Маслова на Λ_0^2 и основная теорема. Согласно [1] канонический оператор определен следующей формулой:

$$\begin{aligned} K_{\Lambda_0^2}^h[f] &\equiv \sum_{j=1,3} \mathcal{F}_{p_2 \rightarrow x_2}^{-\hbar} \left\{ \frac{\exp(i(\int \langle p, dx \rangle - x_2 p_2)(\psi, \alpha)/\hbar)}{\sqrt{|\partial(x_1, p_2)/\partial(\alpha, \psi)|}} \right. \\ &\quad \times f(\rho, \psi) \mathbf{e}_j(\psi) |_{\psi=\psi_j(x_1, p_2), \alpha=\alpha_j(x_1, p_2)} \Big\} \\ &+ \sum_{j=2,4} \mathcal{F}_{p_1 \rightarrow x_1}^{-\hbar} \left\{ \frac{\exp(i(\int \langle p, dx \rangle - x_1 p_1)(\psi, \alpha)/\hbar)}{\sqrt{|\partial(p_1, x_2)/\partial(\alpha, \psi)|}} \right. \\ &\quad \times f(\rho, \psi) \mathbf{e}_j(\psi) |_{\psi=\psi_j(p_1, x_2), \alpha=\alpha_j(p_1, x_2)} \Big\} \\ &\equiv \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2\pi\hbar C_0}} \left\{ \sum_{j=1,3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i(C_0 \alpha \cos^2 \psi + x_2 p_2)/\hbar)}{|\cos \psi|} \right. \\ &\quad \times f(\rho, \psi) \mathbf{e}_j(\psi) |_{\psi=\psi_j(x_1, p_2), \alpha=\alpha_j(x_1, p_2)} dp_2 \\ &\quad + \sum_{j=2,4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i(C_0 \alpha \sin^2 \psi + x_1 p_1)/\hbar)}{|\sin \psi|} \\ &\quad \times f(\rho, \psi) \mathbf{e}_j(\psi) |_{\psi=\psi_j(p_1, x_2), \alpha=\alpha_j(p_1, x_2)} dp_1 \Big\}. \end{aligned}$$

Сделаем в интегралах замену переменных по формулам $p_2 = \sin \psi$, $p_1 = \cos \psi$. С учетом знаков синуса и косинуса в соответствующих картах получим

$$\begin{aligned} K_{\Lambda_0^2}^h[f] &= \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2\pi h C_0}} \left\{ \sum_{j=1,3} \int_0^{2\pi} \exp \frac{i(C_0 \alpha \cos^2 \psi + x_2 \sin \psi)}{h} f(\rho, \psi) \mathbf{e}_j(\psi) |_{\alpha=\alpha_j(x_1, \sin \psi)} d\psi \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=2,4} \int_0^{2\pi} \exp \frac{i(C_0 \alpha \sin^2 \psi + x_1 \cos \psi)}{h} f(\rho, \psi) \mathbf{e}_j(\psi) |_{\alpha=\alpha_j(\cos \psi, x_2)} d\psi \right\} \\ &= \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2\pi h C_0}} \int_0^{2\pi} \exp \frac{i(x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi)}{h} f(\rho, \psi) \sum_{j=1}^4 \mathbf{e}_j(\psi) d\psi \\ &= \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2\pi h C_0}} \int_0^{2\pi} \exp \frac{i(x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi)}{h} f(\rho, \psi) d\psi. \end{aligned}$$

Полагая $h = \mu/\rho$ и используя (6), получаем

$$\begin{aligned} K_{\Lambda_0^2}^{\rho/\mu}[f] &= \frac{\sqrt{i}\rho}{\sqrt{2\pi\mu C_0}} \int_0^{2\pi} \exp \frac{i\rho\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle}{\mu} \tilde{V}(\rho\mathbf{n}(\psi)) d\psi, \\ \int_0^\infty K_{\Lambda_0^2}^{\rho/\mu}[f] d\rho &= \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2\pi\mu C_0}} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp \frac{i\rho\langle x, \mathbf{n}(\psi) \rangle}{\mu} \tilde{V}(\rho\mathbf{n}(\psi)) d\psi d\rho = \frac{\sqrt{2\pi i}}{\sqrt{\mu C_0}} V\left(\frac{x}{\mu}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть Λ_0^2 – лагранжево многообразие (5) и $f(\rho, \psi)$ определено в (6). Тогда справедливо равенство (4).

4. Локализация функции на Λ_0^2 . Функция $V(x/\mu)$ локализована вблизи начала координат. Используя это обстоятельство, можно ограничиться рассмотрением не всего многообразия Λ_0^2 , а только окрестности кривой $\Gamma_0 = \{p = \mathbf{n}(\psi), x = 0, \psi \in \mathbb{S}^1\}$. Другими словами, функцию $f(\rho, \psi)$ можно заменить на финитную функцию $f(\rho, \psi)\mathbf{e}(|\alpha|)$ на Λ_0^2 , где

$$\mathbf{e}(z) = \begin{cases} 1, & 0 \leq z \leq \delta/2, \\ 0, & z \geq \delta. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $V(y)$ убывает быстрее любой степени $|y|^{-k}$ при $|y| \rightarrow \infty$, $k \geq 2$. Тогда

$$V\left(\frac{x}{\mu}\right) = \sqrt{\frac{\mu C_0}{2\pi i}} \int_0^\infty K_{\Lambda_0^2}^h[f(\rho, \psi)\mathbf{e}(|\alpha|)]|_{h=\mu/\rho} d\rho + O(\mu^2). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим f в виде $f = f\mathbf{e} + f(1 - \mathbf{e})$ и оценим вклад от второго слагаемого в формулу (4). Заметим, что носитель функции $1 - \mathbf{e}$ не пересекается с циклом особенностей Λ_0^2 , поэтому результат применения канонического оператора к этой функции mod $O(\mu)$ совпадает с функцией

$$\sqrt{\frac{\mu C_0}{2\pi i}} \frac{1}{|x|} \int_0^\infty \left(e^{i\rho|x|/\mu} \tilde{V}\left(\rho \frac{x}{|x|}\right) + e^{i\rho|x|/\mu} \tilde{V}\left(-\rho \frac{x}{|x|}\right) \right) \sqrt{\rho} (1 - \mathbf{e}(|\alpha|)) d\rho.$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из очевидной оценки

$$\int_0^\infty e^{i\rho/\mu} u(\rho) \sqrt{\rho} d\rho = \frac{\mu}{i} \int_0^\infty u(\rho) \sqrt{\rho} d(e^{i\rho/\mu}) = -\frac{\mu}{i} \int_0^\infty e^{i\rho/\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} (u(\rho) \sqrt{\rho}) d\rho = O(\mu),$$

справедливой для любой быстро убывающей функции $u(\rho)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.П. Маслов, М.В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976. [2] В.П. Маслов, М.В. Федорюк, *Матем. заметки*, **45**:5 (1989), 50–62. [3] С.Ю. Доброхотов, П.Н. Жевандров, В.П. Маслов, А.И. Шафаревич, *Матем. заметки*, **49**:4 (1991), 31–46. [4] С.Ю. Доброхотов, С.Я. Секерж-Зенькович, Б. Тироцци, Т.Я. Тудоровский, *Докл. РАН*, **409**:2 (2006), 171–175. [5] F. Treves, *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, vol. 1: Pseudodifferential operators. vol. 2: Fourier integral operators, The University Series in Mathematics, Plenum Press, New York–London, 1980.

С. Ю. Доброхотов

Институт проблем механики РАН

E-mail: dobr@ipmnet.ru

Поступило

12.06.2005

Б. Тироцци

Университет “La Sapienza”, Рим

E-mail: b.tirozzi@libero.it

А. И. Шафаревич

Институт проблем механики РАН

E-mail: shafar@mech.math.msu.su