Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Рубанов, Хроматические числа трехмерных графов расстояний, не содержащих тетраэдров, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 5, 797–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4091>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:28:01

Хроматические числа трехмерных графов расстояний, не содержащих тетраэдров

О. И. Рубанов

1. Введение и формулировка результата. Под *графом расстояний* $G = (V, E)$ мы подразумеваем произвольный граф, множество вершин V которого лежит в метрическом пространстве (X, ρ) (например, в евклидовом пространстве $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2)$); при этом множество ребер E состоит из всех пар вершин, удаленных друг от друга на определенное расстояние. Одной из классических проблем, связанных с графами расстояний, является проблема нахождения так называемого *хроматического числа* $\chi((X, \rho), \mathcal{A})$ пространства (X, ρ) с набором *запрещенных расстояний* $\mathcal{A}$ (см. [1], [2]), которое определяется как минимальное количество цветов, необходимое для такой раскраски точек пространства, что точки, находящиеся на любом расстоянии $a \in \mathcal{A}$, покрашены в разные цвета.

Хорошо известно, что выполнено неравенство $\chi((\mathbb{R}^2, |\cdot|_2), \{1\}) \geq 4$, однако проблема получения лучшей нижней оценки или доказательства того, что $\chi((\mathbb{R}^2, |\cdot|_2), \{1\}) = 4$, до сих пор остается открытой.

В 1976 г. Эрдеш в [3] сформулировал задачу отыскания графа расстояний без треугольников (или, в более общей постановке, без циклов длины $\leq k$) с хроматическим числом 4 на плоскости (все существовавшие на тот момент примеры содержали треугольники). Эта задача была решена уже три года спустя Уормалдом в [4], конструкция которого содержала 6448 вершин и не содержала циклов длины 3 (но содержала циклы длины 4). В 1996 г. в [5] О’Доннелл и Хохберг построили граф без 3-циклов на 23 вершинах и граф без 3- и 4-циклов на 45 вершинах.

Естественным обобщением этой задачи является задача построения n -мерных графов расстояний, имеющих “большое” хроматическое число и не содержащих клик “большого” размера. Под “большим” хроматическим числом мы подразумеваем хроматическое число, близкое к наилучшим известным нижним оценкам величины $\chi((\mathbb{R}^n, |\cdot|_2), \{1\})$. Отметим, что наилучшая нижняя оценка в размерности 3 на сегодняшний день принадлежит Нечуштану: $\chi((\mathbb{R}^3, |\cdot|_2), \{1\}) \geq 6$ (см. [6]), а предыдущая оценка $\chi((\mathbb{R}^3, |\cdot|_2), \{1\}) \geq 5$ оставалась неулучшенной на протяжении более пятидесяти лет (см. [7]). При $n \rightarrow \infty$ наилучшая оценка имеет вид $\chi((\mathbb{R}^n, |\cdot|_2), \{1\}) \geq (1.239 \dots + o(1))^n$ (см. [8]).

В настоящей работе будет доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *В пространстве $\mathbb{R}^3$ существует граф расстояний, имеющий хроматическое число 5 и не содержащий тетраэдров.*

Доказательство теоремы абсолютно конструктивно, и мы вкратце изложим его в следующем разделе.

2. Доказательство теоремы 1. Для построения конструкции, которая будет описана ниже, нам потребуется так называемое *Мозеровское веретено*. Это граф, который состоит из двух пар равносторонних треугольников. Треугольники в каждой паре имеют одну общую сторону, образуя так называемую “*иглу*”. Две “*иглы*” расположены таким образом, что один “*конец*” каждой иглы совпадает с “*концом*” другой, а вторые “*концы*” удалены на расстояние 1 друг от друга. Мозеровское веретено изображено на рис. 1. Очевидно, что хроматическое число Мозеровского веретена равно 4.

Приступим непосредственно к построению графа расстояний, удовлетворяющего условию теоремы. Введем в пространстве декартову систему координат, зафиксируем плос-

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00383).

Рис. 1

кость $z = 0$. Отметим точку A с координатами $(-1/2, 0, 0)$, точку B с координатами $(1/2, 0, 0)$ и точку N с координатами $(0, 1/2, 0)$. Затем отметим точку A' , удаленную на расстояние $\sqrt{3}/2$ от точек A и N , и точку B' , удаленную на расстояние $\sqrt{3}/2$ от точек B и N . И, наконец, отметим на оси ординат точку T , симметричную точке N относительно прямой $A'B'$. Несложно проверить, что

$$A' = \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, 0\right), \quad B' = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, 0\right), \quad T = \left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right).$$

Далее, построим пары точек A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , которые удалены от плоскости $z = 0$ на расстояние $1/2$ и проекциями которых являются соответственно точки A' и B' . Тогда

$$A_1 = \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{1}{2}\right), \quad A_2 = \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}\right),$$
$$B_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{1}{2}\right), \quad B_2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

Заметим, что точки A_1 и A_2 удалены от точек A , T и N на расстояние 1, а точки B_1 и B_2 удалены от точек B , T и N на расстояние 1.

Рис. 2

Рис. 3

Кроме того, построим точку S , удаленную от точек A , B и N на расстояние 1. Без ограничения общности можем считать, что $S = (0, 0, \sqrt{3}/2)$. Пусть $S' = (0, 0, 0)$ – это проекция точки S на плоскость $z = 0$. Отметим также, что $|ST| = \sqrt{2}$ ($|\cdot| = |\cdot|_2$). На рис. 2 и 3 изображены проекции описанного графа на плоскости $z = 0$ и $y = 0$.

Заметим, что вершины A, B, A_1, A_2, B_1, B_2 и N образуют Мозеровское веретено (две “иглы”: A, A_1, A_2, N и B, B_1, B_2, N ; $|AB| = 1$). Также отметим, что точка S удалена на расстояние 1 от точек A, B и N , а точка T удалена на расстояние 1 от точек A_1, A_2, B_1 и B_2 . Таким образом, каждая точка Мозеровского веретена соединена ребром либо с S , либо с T .

Перейдем к завершающему этапу построения. Вначале построим правильную четырехугольную пирамиду со стороной 1. Она изображена на рис. 4.

Рис. 4

До полного графа на пяти вершинах четырехугольной пирамиде “не хватает” двух ребер (A_1A_3 и A_2A_4). Построим на парах вершин A_1, A_3 и A_2, A_4 описанную выше конструкцию. Один экземпляр этой конструкции будет построен на вершинах A_1 и A_3 , и этим вершинам будут соответствовать вершины S и T конструкции. Второй экземпляр мы построим, соответственно, на вершинах A_2 и A_4 . Это построение возможно, поскольку $|A_1A_3| = |A_2A_4| = |ST| = \sqrt{2}$. Теперь искомый граф расстояний G окончательно построен, осталось лишь доказать, что его хроматическое число не меньше пяти и что он не содержит тетраэдров.

Докажем вначале, что хроматическое число построенного графа не меньше пяти. Действительно, предположим, что нам удалось покрасить вершины графа в четыре цвета. Тогда, очевидно, что хотя бы в одной из пар вершин A_1, A_3 и A_2, A_4 обе вершины имеют один и тот же цвет (скажем, “красный”). Пусть, без ограничения общности, это пара вершин A_1, A_3 . Рассмотрим теперь Мозеровское веретено, которое соответствовало этой паре одноцветных вершин. Заметим, что каждая вершина этого веретена соединена ребром с одной из вершин A_1, A_3 , поэтому ни одна вершина веретена не может быть покрашена в красный цвет. Таким образом, Мозеровское веретено покрашено в три оставшихся цвета. Но, как мы знаем, хроматическое число Мозеровского веретена равно четырем. Противоречие. Значит, хроматическое число графа G не меньше пяти.

Осталось отметить, что этот граф не содержит тетраэдров. На доказательстве этого факта мы подробно останавливаться не будем, скажем лишь, что отсутствие в графе G тетраэдров достигается вращением добавляемых Мозеровских веретен относительно осей, проходящих через пары точек A_1, A_3 и A_2, A_4 , и небольшим перебором.

Теорема доказана. Добавим, что полученный граф имеет 19 вершин и 44 ребра.

3. Несколько дополнительных замечаний. Следуя приведенному выше доказательству, мы можем доказать еще одну теорему.

ТЕОРЕМА 2. В пространстве $\mathbb{R}^n$ существует граф расстояний, имеющий хроматическое число $n + 2$ и не содержащий n -мерных симплексов.

В настоящей краткой заметке мы не приводим доказательство этой теоремы. Заметим лишь, что конструкция будет аналогична той, которая была построена в предыдущем разделе, но вместо Мозеровского веретена будет использоваться его $(n - 1)$ -мерный аналог – граф Райского (см. [7]).

Применив вероятностный метод, можно обнаружить, что при $n \rightarrow \infty$ существуют графы расстояний, имеющие экспоненциально большое хроматическое число и не содержащие симплексов размерности $\geq \varphi(n)$ с некоторым $\varphi(n) = o(n)$. В определенном смысле, это более сильный результат, однако построенный в теореме 2 пример имеет ряд преимуществ: он полностью конструктивен, содержит малое число вершин (а именно, $5n + 4$) и может давать уточнение вероятностного результата при малых n .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Райгородский, *УМН*, **56:1** (2001), 107–146. [2] A. Soifer, *Geombinatorics*, **1:3** (1991), 13–15. [3] P. Erdős, *Unsolved Problems*, Proc. Fifth Brit. Comb. Conf. (Univ. Aberdeen, Aberdeen, 1975), Util. Math. Publ., Winnipeg, 1976. [4] N. Wormald, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **28:1** (1979), 1–8. [5] R. Hochberg, P. O'Donnell, *Geombinatorics*, **5:4** (1996), 137–141. [6] O. Nechushtan, *Discrete Math.*, **256:1–2** (2002), 499–507. [7] Д. Е. Райский, *Матем. заметки*, **7** (1970), 319–323. [8] А. М. Райгородский, *УМН*, **55:2** (2000), 147–148.

О. И. Рубанов

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: leg@pisem.net

Поступило

14.05.2007