Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Васильева, Многозначные отображения со вторым модулем непрерывности, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 5, 787–791

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4092>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 04:55:52

Многозначные отображения со вторым модулем непрерывности

А. А. Васильева

В этой работе изучаются свойства многозначных отображений со вторым модулем непрерывности и рассматривается вопрос существования липшицевой выборки. Достаточные условия существования липшицевой выборки рассматривались в [1]–[4] и других работах.

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $M_1, M_2 \subset X$. Обозначим

$$e(M_1, M_2) = \sup_{x_1 \in M_1} \inf_{x_2 \in M_2} \rho(x_1, x_2), \quad h(M_1, M_2) = \max\{e(M_1, M_2), e(M_2, M_1)\},$$

$$\text{dist}(M_1, M_2) = \inf_{x_1 \in M_1, x_2 \in M_2} \rho(x_1, x_2).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть X_1, X_2 – банаховы пространства, $A \subset X_1$ – выпуклое подмножество. Отображение $F: A \rightarrow 2^{X_2}$ удовлетворяет условию (1) (соответственно (2)), если оно имеет замкнутый график и существует возрастающая непрерывная функция $\nu: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\int_0^1 \nu(t)/t \, dt < \infty$ и для любых $x, y \in A$ выполнено

$$e\left(F(x) + F(y), 2F\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \leq \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_{X_1} \nu\left(\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_{X_1}\right) \quad (1)$$

или соответственно

$$h\left(F(x) + F(y), 2F\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \leq \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_{X_1} \nu\left(\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_{X_1}\right). \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $\int_0^1 \nu(t)/t \, dt < \infty$ эквивалентно тому, что $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(l/2^n) < \infty$ для любого $l > 0$.

Если отображение F удовлетворяет условию (1), то для любого $x \in A$ множество $F(x)$ выпукло и замкнуто. Если отображения F и G удовлетворяют условию (1) (или (2)), при этом $F + G$ имеет замкнутый график, то $F + G$ удовлетворяет (1) (соответственно (2)).

ПРИМЕР 1. Пусть $M \subset X_2$ – выпуклое замкнутое множество, $c: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ – непрерывная функция такая, что для любых $x, y \in A$ выполнено

$$\left|c(x) + c(y) - 2c\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leq \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_{X_1} \nu\left(\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_{X_1}\right).$$

Тогда отображение $F(x) = c(x)M$ удовлетворяет условию (2).

ПРИМЕР 2. Пусть отображение F имеет выпуклый замкнутый график. Тогда оно удовлетворяет условию (1) с $\nu = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F: A \rightarrow 2^{X_2}$ равномерно ограничено и удовлетворяет условию (1), $\tilde{A} \subset A$ – выпуклое подмножество, $\text{dist}(\tilde{A}, \partial A) > 0$. Тогда отображение $F|_{\tilde{A}}$ липшицево в хаусдорфовой метрике.

Если $A = [0, 1]$, $F(t) = [0, \sqrt{t}]$, то F удовлетворяет условию (1) с $\nu = 0$, но не липшицево в хаусдорфовой метрике.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00160-а).

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – банахово пространство, $A \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклый многогранник, $F: A \rightarrow 2^X$ – равномерно ограниченное отображение, удовлетворяющее условию (2). Тогда оно липшицево в хаусдорфовой метрике. Если норма в $\mathbb{R}^d$ определяется как $\|(x_1, \dots, x_d)\| = \sum_{k=1}^d |x_k|$, A – куб со стороной длины l и ограничение F на множество вершин куба липшицево с константой M , то константа Липшица отображения F не превосходит $M + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(l/2^n)$.

Условие $\int_0^1 \nu(t)/t dt < \infty$ существенно. Пусть $\nu_0(kh) \leq k\nu_0(h)$ для любых $h \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, и пусть

$$\int_0^1 \frac{\nu_0(t)}{t} dt = \infty, \quad \varphi(t) = \frac{t}{9} \int_t^1 \frac{\nu_0(s)}{s} ds.$$

Тогда отображение $F: [0, 1] \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$, $F(t) = \{\varphi(t)\}$, удовлетворяет (2) с $\nu = \nu_0$, но не является липшицевым (для $\nu_0 = 1$ это доказано в [5]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть K – d -мерный куб, $F: K \rightarrow 2^X$ удовлетворяет условию (1). Тогда существует липшицева выборка из отображения F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть l – длина стороны куба. Построим выборку f в вершинах куба произвольным образом. Выберем M так, что для любых соседних вершин x_1, x_2 выполнено $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq Ml$. Разделим каждое ребро пополам и разобьем K на 2^d равных кубов K_j . Построим f в их вершинах.

Пусть ξ – одна из вершин куба K_j , $j = 1, \dots, 2^d$. Тогда найдется такое $0 \leq k_\xi \leq d$, что ξ не принадлежит $(k_\xi - 1)$ -мерной грани и является центром k_ξ -мерной грани куба K . Если $k_\xi = 0$, то $f(\xi)$ уже определена. Пусть $k_\xi = 1$. Тогда $\xi = (x_1 + x_2)/2$, где x_1, x_2 – соседние вершины в K . Из условия (1) следует, что существует точка $y \in F(\xi)$ такая, что $\|f(x_1) + f(x_2) - 2y\| \leq l/2\nu(l/2)$. Положим $f(\xi) = y$. Пусть f построена в таких вершинах ξ , для которых $k_\xi \leq k$, при этом, если $\xi = (\xi_1 + \xi_2)/2$, где ξ_1, ξ_2 – центры параллельных $(k_\xi - 1)$ -мерных граней в K , то

$$\|f(\xi_1) + f(\xi_2) - 2f(\xi)\| \leq c_{k_\xi} \frac{l}{2} \nu\left(\frac{l}{2}\right). \quad (3)$$

Построим f в вершинах ξ , для которых $k_\xi = k + 1$. Пусть ξ является центром $(k + 1)$ -мерной грани $\tilde{K}$. Возьмем произвольные параллельные k -мерные грани $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}_2$, содержащиеся в $\tilde{K}$, и обозначим их центры соответственно x_1 и x_2 . Тогда $\xi = (x_1 + x_2)/2$. Из условия (1) следует, что существует такая точка $v \in F(\xi)$, что $\|f(x_1) + f(x_2) - 2v\| \leq l/2\nu(l/2)$. Положим $f(\xi) = v$. По построению для $\xi_1 = x_1$ и $\xi_2 = x_2$ выполнено (3) с $c_{k_\xi} = 1$. Пусть ξ_1, ξ_2 – центры двух других параллельных граней $\tilde{K}_3$ и $\tilde{K}_4$, содержащихся в $\tilde{K}$. Проверим, что для них выполнено (3). В самом деле, проведем через точки x_1, x_2, ξ_1 и ξ_2 двумерную плоскость. Ее пересечение с кубом K – это двумерный квадрат с вершинами x, y, z и w , при этом $x_1 = (x + y)/2$, $x_2 = (z + w)/2$, $\xi_1 = (y + z)/2$, $\xi_2 = (x + w)/2$. Точки x, y, z и w являются центрами граней $\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_4$, $\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_3$, $\tilde{K}_2 \cap \tilde{K}_3$ и $\tilde{K}_2 \cap \tilde{K}_4$, поэтому в силу (3) выполнено

$$\begin{aligned} \|f(x) + f(y) - 2f(x_1)\| &\leq c_k \frac{l}{2} \nu\left(\frac{l}{2}\right), & \|f(y) + f(z) - 2f(\xi_1)\| &\leq c_k \frac{l}{2} \nu\left(\frac{l}{2}\right), \\ \|f(z) + f(w) - 2f(x_2)\| &\leq c_k \frac{l}{2} \nu\left(\frac{l}{2}\right), & \|f(x) + f(w) - 2f(\xi_2)\| &\leq c_k \frac{l}{2} \nu\left(\frac{l}{2}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\|f(\xi_1) + f(\xi_2) - 2f(\xi)\| \\ &\leq \|f(\xi_1) + f(\xi_2) - f(x_1) - f(x_2)\| + \frac{l}{2} \nu\left(\frac{l}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{2} \|f(y) + f(z) + f(x) + f(w) - f(x) - f(y) - f(z) - f(w)\| \\
 &\quad + \frac{1}{2} \|f(y) + f(z) - 2f(\xi_1)\| + \frac{1}{2} \|f(x) + f(w) - 2f(\xi_2)\| \\
 &\quad + \frac{1}{2} \|f(x) + f(y) - 2f(x_1)\| + \frac{1}{2} \|f(z) + f(w) - 2f(x_2)\| + \frac{l}{2} \nu \left(\frac{l}{2} \right) \\
 &\stackrel{(4)}{\leq} 2c_k \frac{l}{2} \nu \left(\frac{l}{2} \right) + \frac{l}{2} \nu \left(\frac{l}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Значит, выполнено (3) с $c_{k+1} = 2c_k + 1$. Так как $c_1 = 1$, то $c_k = 2^k - 1$.

Пусть ξ, η – две произвольных соседних вершины в кубе K_j . Тогда одна из них является центром некоторой k -мерной грани $\tilde{K}$, а другая – центром $(k-1)$ -мерной грани, содержащейся в $\tilde{K}$. Пусть ξ – это центр $\tilde{K}$, а η – центр грани $\tilde{K}_\eta \subset \tilde{K}$. Тогда $\xi = (\eta + \zeta)/2$, где ζ – центр $(k-1)$ -мерной грани $\tilde{K}_\zeta \subset \tilde{K}$, параллельной $\tilde{K}_\eta$. Оценим $\|f(\xi) - f(\eta)\|$. Если $k = 1$, то

$$\begin{aligned}
 \|f(\xi) - f(\eta)\| &\leq \left\| \frac{f(\eta) + f(\zeta)}{2} - f(\eta) \right\| + \left\| \frac{f(\eta) + f(\zeta)}{2} - f(\xi) \right\| \\
 &\leq \frac{1}{2} \|f(\eta) - f(\zeta)\| + \frac{l}{4} \nu \left(\frac{l}{2} \right) \leq M \frac{l}{2} + \frac{l}{4} \nu \left(\frac{l}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Пусть для $k = k_0 - 1$ доказана оценка

$$\|f(\xi) - f(\eta)\| \leq M \frac{l}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} c_i \frac{l}{2} \nu \left(\frac{l}{2} \right) + \frac{1}{2} c_k \frac{l}{2} \nu \left(\frac{l}{2} \right).$$

Докажем, что аналогичная оценка выполнена для $k = k_0$. В самом деле, точка η является серединой отрезка $[\eta_1, \eta_2]$, где η_i – центры $(k-2)$ -мерных параллельных граней $\tilde{K}_{\eta,i} \subset \tilde{K}_\eta$. Положим $\zeta_i = \eta_i + \zeta - \eta$, $\xi_i = (\eta_i + \zeta_i)/2$, $\tilde{K}_{\zeta,i} = \tilde{K}_{\eta,i} + \zeta - \eta$. Пусть $\tilde{K}_i - (k_0 - 1)$ -мерная грань, образованная $\tilde{K}_{\eta,i}$ и отрезком $[\eta_i, \zeta_i]$, где $i = 1, 2$. Тогда $\tilde{K}_{\eta,i}$ и $\tilde{K}_{\zeta,i}$ – параллельные $(k_0 - 2)$ -мерные грани, содержащиеся в $\tilde{K}_i$, и η_i, ζ_i являются их центрами. В силу (3)

$$\|f(\eta_1) + f(\eta_2) - 2f(\eta)\| \leq c_{k_0-1} \frac{l}{2} \nu \left(\frac{l}{2} \right), \quad \|f(\zeta_1) + f(\zeta_2) - 2f(\zeta)\| \leq c_{k_0-1} \frac{l}{2} \nu \left(\frac{l}{2} \right). \quad (5)$$

По предположению индукции

$$\begin{aligned}
 \|f(\xi_i) - f(\eta_i)\| &\leq M \frac{l}{2} + \sum_{i=1}^{k_0-2} c_i \frac{l}{2} \nu \left(\frac{l}{2} \right) + \frac{1}{2} c_{k_0-1} \frac{l}{2} \nu \left(\frac{l}{2} \right), \\
 \|f(\xi_i) - f(\zeta_i)\| &\leq M \frac{l}{2} + \sum_{i=1}^{k_0-2} c_i \frac{l}{2} \nu \left(\frac{l}{2} \right) + \frac{1}{2} c_{k_0-1} \frac{l}{2} \nu \left(\frac{l}{2} \right).
 \end{aligned} \quad (6)$$

Значит,

$$\begin{aligned}
 \|f(\xi) - f(\eta)\| &\leq \frac{1}{2} \|f(\eta) - f(\zeta)\| + \frac{1}{2} \|f(\eta) + f(\zeta) - 2f(\xi)\| \\
 &\leq \frac{1}{4} \|f(\eta_1) + f(\eta_2) - f(\zeta_1) - f(\zeta_2)\| + \frac{1}{4} \|f(\eta_1) + f(\eta_2) - 2f(\eta)\| \\
 &\quad + \frac{1}{4} \|f(\zeta_1) + f(\zeta_2) - 2f(\zeta)\| + \frac{1}{2} c_{k_0} \frac{l}{2} \nu \left(\frac{l}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(5)}{\leq} \frac{1}{4} \|f(\eta_1) - f(\xi_1)\| + \frac{1}{4} \|f(\xi_1) - f(\zeta_1)\| + \frac{1}{4} \|f(\eta_2) - f(\xi_2)\| \\
&\quad + \frac{1}{4} \|f(\xi_2) - f(\zeta_2)\| + \frac{1}{2} c_{k_0-1} \frac{l}{2} \nu\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{1}{2} c_{k_0} \frac{l}{2} \nu\left(\frac{l}{2}\right) \\
&\stackrel{(6)}{\leq} M \frac{l}{2} + \sum_{i=1}^{k_0-2} c_i \frac{l}{2} \nu\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{1}{2} c_{k_0-1} \frac{l}{2} \nu\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{1}{2} c_{k_0-1} \frac{l}{2} \nu\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{1}{2} c_{k_0} \frac{l}{2} \nu\left(\frac{l}{2}\right) \\
&\leq M \frac{l}{2} + \sum_{i=1}^{k_0-1} c_i \frac{l}{2} \nu\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{1}{2} c_{k_0} \frac{l}{2} \nu\left(\frac{l}{2}\right).
\end{aligned}$$

Таким образом, если ξ и η – соседние вершины куба K_j , то

$$\|f(\xi) - f(\eta)\| \leq M_1 \frac{l}{2}, \quad \text{где } M_1 = M + \sum_{i=1}^{d-1} c_i \nu\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{1}{2} c_d \nu\left(\frac{l}{2}\right) \leq M + 2^{d+1} \nu\left(\frac{l}{2}\right)$$

(так как $c_k = 2^k - 1$, $1 \leq k \leq d$). Пусть K разбит на $2^{(n-1)d}$ равных кубов K_j^{n-1} , в вершинах которых построена выборка f , при этом если ξ, η – соседние вершины, то

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leq M_{n-1} \frac{l}{2^{n-1}}, \quad \text{где } M_{n-1} \leq M + 2^{d+1} \sum_{k=1}^{n-1} \nu\left(\frac{l}{2^k}\right).$$

Каждый куб K_j^{n-1} разбиваем на 2^d равных кубов K_j^n и определяем в их вершинах функцию $f_{K_j^n}$. При этом из построения следует, что $f_{K_j^n}$ можно выбрать так, что если K_j^n и K_i^n пересекаются по некоторой грани $\tilde{K}$, то $f_{K_j^n}|_{\tilde{K}} = f_{K_i^n}|_{\tilde{K}}$, так что функция $f(x) := f_{K_j^n}(x)$, $x \in K_j^n$, определена корректно. Если ξ, η – соседние вершины K_j^n , то

$$\|f(\xi) - f(\eta)\| \leq M_n \frac{l}{2^n}, \quad \text{где } M_n \leq M_{n-1} + 2^{d+1} \nu\left(\frac{l}{2^n}\right) \leq M + 2^{d+1} \sum_{k=1}^n \nu\left(\frac{l}{2^k}\right).$$

Пусть K имеет стороны, параллельные координатным осям, а в $\mathbb{R}^d$ задана норма $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$, $x = (x_1, \dots, x_d)$. Тогда f липшицева с константой $M + 2^{d+1} \sum_{n=1}^{\infty} \nu(l/2^n)$. Продолжаем f по непрерывности на весь куб K . Так как отображение F имеет замкнутый график, то f является выборкой из F . Так как все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны, то f будет липшицевой относительно любой другой нормы в $\mathbb{R}^d$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклый компакт, $F: A \rightarrow 2^X$ – равномерно ограниченное отображение, удовлетворяющее условию (2). Пусть $A = \bigcup_{i=1}^N A_i$, где A_i выпуклы, открыты в A и

$$L_i(\overline{A_i}) = \{(x_1, \dots, x_d) : 0 \leq x_j \leq 1, 1 \leq j \leq d-1; 0 \leq x_d \leq f_i(x_1, \dots, x_{d-1})\},$$

где L_i – композиция гомотетии, поворота и сдвига в $\mathbb{R}^d$, $f_i: [0, 1]^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная строго положительная функция такая, что выполнено

$$\left| f_i(x) + f_i(y) - 2f_i\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \leq \|x - y\|_{\mathbb{R}^d} \nu\left(\|x - y\|_{\mathbb{R}^d}\right),$$

где ν – такая же, как в определении условия (2). Тогда F липшицево в хаусдорфовой метрике и существует липшицева выборка из F .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Shvartsman, *Geom. Funct. Anal.*, **11**:4 (2001), 840–868. [2] J.-P. Aubin, A. Cellina, *Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **264**, Springer-Verlag, Berlin, 1984. [3] J. Lindenstrauss, *Michigan Math. J.*, **11**:3 (1964), 263–287. [4] В. В. Чистяков, *Матем. заметки*, **71**:4 (2002), 611–632. [5] В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, М., 1977.

А. А. Васильева

Московский государственный

университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: vasilyeva_nastya@inbox.ru

Поступило

28.05.2007