Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Балашов, И. И. Богданов, О некоторых свойствах P -множеств и свойстве зажатости в выпуклых компактах, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 4, 496–505

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4093>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 18:37:24

О некоторых свойствах P -множеств и свойстве зажатости в выпуклых компактах

М. В. Балашов, И. И. Богданов

Получены новые свойства P -множеств – широкого класса выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$, который охватывает все выпуклые многогранники и строго выпуклые компакты. Показано, что пересечение P -множества с аффинным подпространством непрерывно в метрике Хаусдорфа. При этом мы не накладываем условие “непустоты внутренности”, которое предполагается в известных теоремах о непрерывности пересечения многозначных отображений. Также показано, что если график многозначного отображения есть P -множество, то это многозначное отображение непрерывно на всем своем эффективном множестве, а не только на его внутренности.

Исследованы свойства “зажатых” множеств и получены результаты, обобщающие известный результат Юнга о том, что для любого компакта в $\mathbb{R}^n$ существует шар минимального радиуса, содержащий данный компакт. При этом из компакта можно выбрать не более чем $n + 1$ точку так, что эти точки нельзя параллельно перенести на любой ненулевой вектор, чтобы они остались в шаре. Это означает, что компакт “зажат” в шаре. Нами рассматриваются задачи о зажатости компактов в произвольных выпуклых компактах, а не только в телах нормы. Показано, что для любого компакта A , зажатого в P -множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, всегда найдется зажатое в M множество $A^0 \subset A$, состоящее не более чем из $2n$ элементов. Приведен пример, демонстрирующий, что в случае произвольного выпуклого компакта $M \subset \mathbb{R}^n$ такого конечного множества $A^0 \subset A$ может не найтись.

Библиография: 5 названий.

1. Введение и основные обозначения. Зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ произвольные вектор q единичной длины и гиперплоскость $L(q) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle q, z \rangle = 0\}$, а также прямую $l(q) = \{\lambda q \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Заметим, что пространство $\mathbb{R}^n$ является прямой суммой множеств $L(q)$ и $l(q)$: $\mathbb{R}^n = L(q) \oplus l(q)$. Любая точка $z \in \mathbb{R}^n$ представима в виде $z = x + \mu q$, где $\mu \in \mathbb{R}$, $x \in L(q)$, или $z = (x, \mu)$. Пусть $P_q: \mathbb{R}^n \rightarrow L(q)$ – оператор проектирования, для любого $z \in \mathbb{R}^n$ по определению $P_q z = x$, где $z = (x, \mu)$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт. Определим функцию $f_{A,q}: P_q A \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу

$$f_{A,q}(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in A\}, \quad \text{для всех } x \in P_q A. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. Выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ называется P -множеством, если для любого единичного вектора q функция $f_{A,q}$ из (1) непрерывна на $P_q A$.

Начало исследования P -множеств положено в работах [1], [2]. В этих работах показано, что P -множества образуют замкнутый относительно основных операций (таких, как сумма и пересечение множеств, линейное преобразование) класс выпуклых компактов. Выпуклыми P -множествами являются все выпуклые компакты из $\mathbb{R}^2$, все строго выпуклые компакты, выпуклые многогранники, конечные суммы P -множеств, пересечение двух P -множеств, геометрическая разность P -множества и произвольного множества, образ P -множества при любом линейном отображении, вложение P -множества в пространство большей размерности.

Свойства P -множеств оказались полезными в некоторых задачах о непрерывности многозначных отображений [1].

Приведем пример выпуклого компакта, не являющегося P -множеством.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ множество

$$A_0 = \text{co}(\{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 1\} \cup \{(0, 0, 0)\}),$$

где co – выпуклая оболочка множества.

Если взять $q = (0, 0, 1)$, то $f_{A_0, q}$ не будет полунепрерывной сверху в точке $(0, 0) \in P_q A_0$. Отметим, что сумма $A_0 + A_1$, где A_1 – произвольный выпуклый компакт, также не является P -множеством [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть заданы компакты $A \subset M \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что A *зажат в M* , если $A + v \not\subset M$ для любого $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что A *точечно зажат в M* , если для любого единичного вектора e найдется точка $x_e \in A$ такая, что $(x_e + \mathbb{R}_+ e) \cap M = \emptyset$.

Ясно, что точечно зажатое множество является зажатым. Обратное неверно, см. пример 3.

В теореме 1 показано, что пересечение P -множества с аффинным подпространством непрерывно в метрике Хаусдорфа. Как простое следствие этого факта получен новый результат о достаточных условиях непрерывности многозначного отображения с выпуклым замкнутым графиком на всем своем эффективном множестве (а не только на его внутренности). Оказывается, для непрерывности достаточно, чтобы график был P -множеством. При этом нет никаких предположений об условии “непустой внутренности”, что характерно для имеющихся на сегодня теорем о непрерывности пересечения [3; гл. 3].

В теореме 2 дана следующая новая характеристика P -множеств. Ранее в работе [1] было доказано, что если A является P -множеством, $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – линейный оператор, а $B = TA$, то отображение $T: A \rightarrow B$ является открытым в индуцированных в A и B топологиях. Это значит, что для любой окрестности нуля $U \subset \mathbb{R}^n$ и любой точки $x \in A$ образ $T((x + U) \cap A)$ содержит подмножество вида $(Tx + V) \cap TA$, где V – некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}^m$. Отметим, что описанное выше свойство открытости не имеет места в общем случае. Действительно, если $q = (0, 0, 1)$ и $A = A_0$ из примера 1, то для линейного оператора $T = P_q$ отображение $T: A_0 \rightarrow TA_0$ не открыто. Оказывается, что свойство открытости отображения $T: A \rightarrow TA$ для любого линейного оператора T характеризует P -множества. Это означает, что если $A \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт и для любого линейного оператора T отображение $T: A \rightarrow TA$ открыто, то A есть P -множество.

Таким образом, класс P -множеств – это в точности те выпуклые компакты из $\mathbb{R}^n$, для которых указанное выше отображение открыто при любом выборе T .

Хорошо известен классический результат Юнга [4; теорема 2.6, с. 28] о том, что для любого компакта существует шар минимального радиуса, содержащий данный компакт. При этом в пересечении границы шара с данным компактом содержатся вершины симплекса и для этого симплекса шар также является шаром минимального радиуса, содержащим симплекс. Иными словами, можно выбрать из компакта не более чем $n + 1$ точку так, что эти точки нельзя параллельно перенести на любой ненулевой вектор, чтобы они остались в шаре. Таким образом, компакт “зажат” в шаре. Нами рассматриваются задачи о зажатости компактов в произвольных множествах и, в частности, в P -множествах, а не только в телах нормы. Таким образом, идет речь об обобщении результата Юнга со случая тела евклидовой нормы на произвольные множества. К этой же задаче приводят предельные случаи теоремы Каратеодори для сильно выпуклых множеств, см. [2]. При исследовании этого вопроса возникают несколько разных определений зажатости. В лемме 2 показано, что для P -множества определения зажатости и точечной зажатости эквивалентны. В лемме 3 приведены новые результаты о полунепрерывности многозначного отображения, существенно использующее свойства P -множеств. В теореме 3 и ее следствии показано, что для компакта из $\mathbb{R}^n$, точно зажато в P -множестве, всегда найдется конечное точно зажатое подмножество не более чем из $2n$ элементов. Как показано в примере 5, для произвольных вложенных выпуклых компактов это неверно, т.е. конечного подмножества может не найтись. Отметим, что просматривается серьезная аналогия между теоремой 3 и теоремой Штейница [4; теорема 3.2, с. 36], однако свести теорему 3 к последней авторам не удалось.

2. Формулировки и доказательства теорем. В работе [1] доказана лемма о том, что если $A \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, то функция $f_{A,q}$ из определения 1 полунепрерывна снизу на $P_q A$. Поэтому вопрос непрерывности функции $f_{A,q}$ сводится к проверке полунепрерывности сверху этой функции.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, $L \subset \mathbb{R}^n$ – подпространство. Пусть

- 1) либо $\dim L = n - 1$,
- 2) либо A является P -множеством.

Тогда многозначное отображение $(z \in A) \mapsto (z + L) \cap A$ непрерывно в метрике Хаусдорфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – произвольный выпуклый компакт, и пусть $\dim L = n - 1$. Рассмотрим $F(z) = (z + L) \cap A$ для всех $z \in A$. По теореме о замкнутом графике [2; теорема 2.8.1] многозначное отображение F полунепрерывно сверху в любой точке $z_0 \in A$. Это означает, что для любой последовательности $\{z_k\} \subset A$, $z_k \rightarrow z_0$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется k_ε такое, что для любого $k > k_\varepsilon$

$$F(z_k) \subset F(z_0) + B_\varepsilon(0). \quad (2)$$

Допустим, в некоторой точке $z_0 \in A$ нарушается условие полунепрерывности снизу, т.е. существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $\{z_k\} \subset A$ такие, что $\lim z_k = z_0$ и

$$F(z_0) \not\subset F(z_k) + B_{\varepsilon_0}(0). \quad (3)$$

Отсюда следует, что $z_k \notin z_0 + L$ для всех k . Условие (3) означает, что для любого k существует точка $w_k \in F(z_0)$ такая, что $w_k \notin F(z_k) + B_{\varepsilon_0}(0)$. В силу компактности

множества $F(z_0)$ можно без ограничения общности считать, что $w_k \rightarrow w_0 \in F(z_0)$ и

$$w_0 \notin F(z_k) + B_{\varepsilon_0/2}(0). \quad (4)$$

Будем считать, что $\|z_1 - w_0\| > \varepsilon_0/2$, так как в противном случае мы можем уменьшить ε_0 . Пусть φ – угол между отрезком $[w_0, z_1]$ и гиперплоскостью L . Без ограничения общности будем считать, что в полупространстве с границей $z_0 + L$, содержащем z_1 , содержатся все элементы последовательности $\{z_k\}$.

Выберем такой номер k , что расстояние от точки z_k до гиперплоскости $z_0 + L$ достаточно мало:

$$\varrho(z_k, z_0 + L) < \frac{\varepsilon_0}{2} \sin \varphi.$$

Определим точку

$$w = w_0 + \frac{z_1 - w_0}{\|z_1 - w_0\|} \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Тогда

$$\varrho(w, z_0 + L) = \frac{\varepsilon_0}{2} \sin \varphi > \varrho(z_k, z_0 + L).$$

Отсюда и из того, что $w_0 \in z_0 + L$, а точки z_k и z_1 (а значит, и w) лежат с одной стороны от гиперплоскости $z_0 + L$, следует, что точки w_0 и w лежат по разные стороны от гиперплоскости $z_k + L$. Поэтому

$$[w_0, w] \cap (z_k + L) \neq \emptyset. \quad (5)$$

Так как $w_0 \in F(z_0)$, $z_1 \in A$, то имеем $[w_0, w] \subset [w_0, z_1] \subset A$. Отсюда и из равенства $\|w_0 - w\| = \varepsilon_0/2$ следует, что $[w_0, w] \subset A \cap B_{\varepsilon_0/2}(w_0)$. Поэтому согласно (5)

$$A \cap B_{\varepsilon_0/2}(w_0) \cap (z_k + L) \neq \emptyset,$$

т.е. $w_0 \in (A \cap (z_k + L)) + B_{\varepsilon_0/2}(0)$, что противоречит включению (4).

Итак, полунепрерывность снизу многозначного отображения $F(z)$ доказана, а вместе с полунепрерывностью сверху (2) это дает непрерывность в метрике Хаусдорфа.

2) Пусть теперь $\dim L = m$, $1 \leq m \leq n$, и $A \subset \mathbb{R}^n$ является P -множеством. Так же, как и в п. 1) доказательства, полунепрерывность сверху $F(z) = (z + L) \cap A$ имеет место и вопрос стоит о полунепрерывности снизу F в произвольной точке $z_0 \in A$.

Рассуждая от противного, как и в п. 1), получаем, что существуют $\varepsilon_0 > 0$, $w_0 \in F(z_0)$ и последовательность $\{z_k\} \subset A$, $\lim z_k = z_0$, такие, что

$$w_0 \notin F(z_k) + B_{\varepsilon_0/2}(0).$$

Легко видеть, что $w_0 \neq z_0$. Пусть

$$q = \frac{z_0 - w_0}{\|z_0 - w_0\|} \in \partial B_1(0).$$

Рассмотрим функцию $f_{A,q}$ из (1). Пусть $w_0 = (x_0, \mu_0)$, $z_k = (x_k, \mu_k)$. При этом $f_{A,q}(x_0) \leq \mu_0$. Но для достаточно больших k (когда $\|z_0 - z_k\| < \varepsilon_0/4$) имеем $f_{A,q}(x_k) \geq \mu_0 + \varepsilon_0/4$, так как $(z_k + l(q)) \cap B_{\varepsilon_0/4}(w_0) \neq \emptyset$ при таких k . Отсюда следует, что функция $f_{A,q}$ не полунепрерывна сверху в точке $x_0 \in P_q A$, что противоречит определению P -множества.

Напомним, что для многозначного отображения $F: \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$ *эффективным множеством*, называется множество $\text{dom } F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \neq \emptyset\}$, *графиком* называется множество

$$\text{graph } F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid x \in \text{dom } F, y \in F(x)\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$ – многозначное отображение с выпуклым замкнутым графиком.

1) Если $n = 1$ и график F есть выпуклый компакт, то отображение F непрерывно на $\text{dom } F$.

2) Если график F является P -множеством, то отображение F непрерывно на $\text{dom } F$.

Доказательство следствия получается из теоремы 1 и того, что

$$\{x_0\} \times F(x_0) = \text{graph } F \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid x = x_0\}.$$

Отметим, что п. 1) следствия тривиален, но мы приводим его для полноты картины.

Без условия, что $\text{graph } F$ есть P -множество, утверждение следствия неверно. Действительно, пусть $q = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Пусть $\text{graph } F = A_0$, где A_0 из примера 1, $\text{dom } F = \{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1\}$, $F(x_1, x_2) = \{\lambda \mid (x_1, x_2, \lambda) \in A_0\}$. Тогда отображение F не полунепрерывно снизу в точке $(0, 0)$.

ПРИМЕР 2. Пусть выпуклые компакты A , B и C из $\mathbb{R}^n$ таковы, что $A + B = C$ и C есть P -множество. Тогда существуют непрерывные функции $a(\cdot): C \rightarrow A$ и $b(\cdot): C \rightarrow B$ такие, что для любого $c \in C$ выполнено равенство $a(c) + b(c) = c$.

Пусть $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейный оператор, $L(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Поскольку L сюръективен, для любого $c \in \mathbb{R}^n$ многозначное отображение $L^{-1}(c) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = c\}$ является непрерывным по Липшицу в метрике Хаусдорфа [3; следствие 6, гл. 3] и его значения представляют собой параллельные аффинные множества одной размерности. Поскольку C есть P -множество, таковы же A , B и $A \times B$, см. [1]. В силу теоремы 1 многозначное отображение $C \ni c \rightarrow (A \times B) \cap L^{-1}(c)$ непрерывно. Взяв центр Штейнера $s(\cdot)$ [2; гл. 2] этого отображения, получим

$$(a(c), b(c)) = s((A \times B) \cap L^{-1}(c)).$$

Отметим, что пример 2 есть частная постановка вопроса о расщеплении для селекций (splitting problem for selections). Пусть $i = 1, 2$, $F_i: X \rightarrow 2^{Y_i}$ – многозначные отображения с выпуклыми значениями и $L: Y_1 \times Y_2 \rightarrow Y$ – линейный сюръективный оператор. Задача расщепления заключается в том, чтобы для любого непрерывного селектора $f \in L(F_1 \times F_2)$ найти непрерывные селекторы $f_i \in F_i$ такие, что $f = L(f_1, f_2)$. Легко видеть, что даже в случае когда все пространства конечномерные, эта задача может не иметь решения. В случае, когда график $\text{graph } F_1 \times F_2$ многозначного отображения $F_1 \times F_2$ является P -множеством в $\mathbb{R}^n$, решение существует. Действительно,

$$(x, f_1(x), f_2(x)) = s((\text{graph } F_1 \times F_2) \cap (x, L^{-1}(f(x)))),$$

причем отображение $x \rightarrow (x, L^{-1}(f(x)))$ непрерывно в силу [3; следствие 6, гл. 3], а пересечение непрерывно в силу теоремы 1.

Постановки вопроса из примера 2 и вопроса о расщеплении для селекций сообщены нам П. В. Семеновым.

ЛЕММА 1. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт и в обозначениях определения 1 для любого вектора $q \in \partial B_1(0)$ оператор P_q проектирования на $L(q)$ является открытым отображением $P_q: A \rightarrow P_q A$. Тогда A есть P -множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем от противного. Пусть A не является P -множеством. Тогда для некоторого $q \in \partial B_1(0)$ найдется последовательность $\{x_k\} \subset P_q A$ такая, что $\lim x_k = x_0$, $\lim f_{A,q}(x_k) = \mu_0 > f(x_0)$. Пусть $z_0 = (x_0, f_{A,q}(x_0))$, $\tilde{z}_0 = (x_0, \mu_0)$,

$$z = \frac{1}{2}(\tilde{z}_0 + z_0) = \left(x_0, \frac{1}{2}(\mu_0 + f_{A,q}(x_0))\right), \quad \varepsilon = \frac{1}{4}\|\tilde{z}_0 - z_0\| = \frac{1}{4}(\mu_0 - f_{A,q}(x_0)).$$

Тогда $x_k \notin P_q(B_\varepsilon(z) \cap A)$ для всех k , что противоречит открытости P_q .

ТЕОРЕМА 2. Выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ есть P -множество тогда и только тогда, когда для любого натурального m и любого линейного отображения $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ отображение $T: A \rightarrow TA$ открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A есть P -множество, то открытость T доказана в [1].

Из леммы 1 следует, что если обратное верно для $T = P_q$, то A есть P -множество.

Далее мы рассматриваем вопрос о зажатости множеств в выпуклых компактах.

Приведем пример, показывающий неэквивалентность понятий зажатости и точечной зажатости [5].

ПРИМЕР 3. Пусть $M_1 = \text{co}(D \cup I)$ – выпуклая оболочка круга

$$D = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

и отрезка

$$I = \{(x, 0, 1) : -1 \leq x \leq 1\}.$$

Пусть

$$A_1 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 + y^8 \leq 1\}$$

– компактное подмножество в D . Тогда A_1 зажато в M_1 , но не точно зажато в нем.

Первый факт легко проверяется для любого вектора $v = (a, b, c)$, $a^2 + b^2 > 0$, выбором точки $x_v = (1, 0, 0)$ при $a \geq 0$ или $x_v = (-1, 0, 0)$ при $a < 0$. Пусть $v = (0, 0, t)$. Заметим, что как кривизна кривой $x^2 + y^2 + y^8 = 1$, так и кривизна окружности $x^2 + y^2 = 1$ в точке их касания $(1, 0, 0)$ равна 1. Кривизна же сечения множества ∂M_1 плоскостью $z = t$ равна $(1 - t)^{-1} > 1$. Поэтому при сдвиге на v точки кривой $x^2 + y^2 + y^8 = 1$, близкие к $(1, 0, 0)$, выйдут за пределы M_1 , и A_1 зажато в M_1 .

Наоборот, пусть $A^0 = \{x_1, \dots, x_n\}$ – конечное подмножество в A_1 . Легко проверяется, что для каждой точки $x \in A_1$ существует $\varepsilon_x > 0$ такое, что $x + (0, 0, \varepsilon_x) \in M_1$. Тогда, выбирая $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_n}\}$, получаем, что $A^0 + (0, 0, \varepsilon) \subset M$, т.е. точечной зажатости A_1 в M_1 нет.

ЛЕММА 2. Для P -множества $M \subset \mathbb{R}^n$ и компакта $A \subset M$ определения зажатости и точечной зажатости A в M эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем единичный вектор q и рассмотрим разложение $\mathbb{R}^n = L(q) \oplus l(q)$. Как в определении 1, введем функции $f_{M,q}: P_q M \rightarrow \mathbb{R}$ и $f_{A,q}: P_q A \rightarrow \mathbb{R}$. Как отмечалось ранее, функция $f_{A,q}$ полунепрерывна снизу на $P_q A$; функция же $f_{M,q}$ непрерывна на $P_q M \supset P_q A$, так как M – P -множество. Поэтому функция $f_{A,q} - f_{M,q}$ полунепрерывна снизу на $P_q A$ и, следовательно, принимает на нем наименьшее значение $f_{A,q}(x_0) - f_{M,q}(x_0) = \mu_0$. Если $\mu_0 > 0$, то A не зажат в M , а если $\mu_0 = 0$, то можно положить в определении точечной зажатости $x_q = (x_0, \mu_0)$.

Зафиксируем выпуклый компакт M и подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$. Для точки $a \in M$ обозначим через N_a нормальный конус (в пространстве L) к множеству $M \cap (a + L)$ в точке a , т.е.

$$N_a = \{v \in L : \forall x \in M \cap (a + L) \quad \langle v, x \rangle \leq \langle v, a \rangle\}.$$

Ясно, что $N_a \neq \{0\}$ только в точках границы M . Пусть $\tilde{N}_a = N_a \cap \partial B_1(0)$.

ЛЕММА 3. Предположим, что

- 1) либо $\dim L \geq n - 1$,
- 2) либо M – P -множество.

Тогда отображение $a \mapsto \tilde{N}_a$ полунепрерывно сверху на M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_0 \in M$, $v_0 \in L$, $\|v_0\| = 1$, $v_0 \notin \tilde{N}_{a_0}$. Покажем, что существуют такие $\delta_a > 0$, $\delta_v > 0$, что для любых $a \in B_{\delta_a}(a_0)$, $v \in B_{\delta_v}(v_0)$, $\|v\| = 1$, выполняется $v \notin \tilde{N}_a$.

Поскольку $v_0 \notin \tilde{N}_{a_0}$, существует такое $x_0 \in M \cap (a_0 + L)$, что $\cos(\widehat{x_0 - a_0, v_0}) = d > 0$. Пусть $\ell = \|x_0 - a_0\|$. Выберем тогда $\varepsilon_a = \ell d/3$. Согласно теореме 1 существует такое δ , что

$$\forall a \in B_\delta(a_0) \cap M \quad M \cap (a_0 + L) \subset M \cap (a + L) + B_{\varepsilon_a}(0)$$

(при $\dim L = n$ это утверждение очевидно). Положим $\delta_a = \min\{\varepsilon_a, \delta\}$. Тогда для любого $a \in B_{\delta_a}(a_0)$ имеем $x_0 \in M \cap (a + L) + B_{\varepsilon_a}(0)$, т.е.

$$\exists x \in M \cap (a + L) : \quad \|x - x_0\| < \varepsilon_a.$$

Заметим, что

$$\sin(\widehat{x - a, x_0 - a_0}) = \frac{\varrho(x_0 - a_0, \mathbb{R}(x - a))}{\|x_0 - a_0\|} \leq \frac{\|(x - a) - (x_0 - a_0)\|}{\|x_0 - a_0\|} \leq \frac{2\varepsilon_a}{\ell} = \frac{2d}{3}.$$

Тогда

$$(\widehat{x - a, v_0}) \leq (\widehat{x - a, x_0 - a_0}) + (\widehat{x_0 - a_0, v_0}) \leq \arcsin(2d/3) + \arccos d = \varphi(d) < \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому при всех v , $\|v\| = 1$, таких, что $(\widehat{v, v_0}) < \pi/2 - \varphi(d)$, выполняется $(\widehat{x - a, v}) < \pi/2$, т.е. $v \notin \tilde{N}_a$, что и требовалось.

Пусть теперь данное отображение не является полунепрерывным сверху в точке a_0 , т.е. существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{a_n\}$ такие, что $a_n \rightarrow a_0$, $n \rightarrow \infty$, но $\tilde{N}_{a_n} \not\subset \tilde{N}_{a_0} + B_\varepsilon(0)$ для любого n . Таким образом, существует $v_n \in \tilde{N}_{a_n} \setminus (\tilde{N}_{a_0} + B_\varepsilon(0))$.

Поскольку $\|v_n\| = 1$, последовательность $\{v_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, и мы можем предполагать $v_n \rightarrow v$, $n \rightarrow \infty$. Но тогда $\varrho(v, \tilde{N}_{a_0}) \geq \varepsilon$, и $v \notin \tilde{N}_{a_0}$, но $v_n \in \tilde{N}_{a_n}$, что невозможно по доказанному.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, $A \subset M$ – компакт, L – k -мерное векторное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что для любого единичного вектора $e \in L$ найдется точка $x_e \in A$ такая, что $(x_e + \mathbb{R}_+e) \cap M = \emptyset$. Предположим также, что

- 1) либо $n \leq 3$,
- 2) либо M – P -множество.

Тогда существует такое конечное подмножество $A^0 \subset A$, $|A^0| \leq 2k$, что для него выполняется то же условие.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вариант для $n \leq 3$ был анонсирован в [5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по k . Если $k = 1$, то $L = \mathbb{R}e$ для некоторого e , и тогда можно положить $A^0 = \{x_e, x_{-e}\}$.

Пусть $k > 1$. Тогда либо $\dim L \geq n - 1$, либо M – P -множество. Положим $D = \partial M \cap \partial A$ (очевидно, D – непустой компакт). Из леммы 3 вытекает, что $\tilde{N} = \bigcup_{a \in D} \tilde{N}_a$ – компакт, как образ компакта при полунепрерывном сверху отображении с компактными значениями в $\mathbb{R}^n$ [3; предложение 11, §1, гл. 3].

Заметим, что для любого $0 \neq e \in L$ существует такой $0 \neq b \in \tilde{N}$, что $\langle b, e \rangle \geq 0$. Действительно, поскольку выпуклые компакты $M \cap (x_e + L)$ и $[x_e, x_e + e]$ пересекаются только по x_e , то их можно разделить гиперплоскостью (в пространстве $x_e + L$); единичный нормальный вектор b этой гиперплоскости, направленный в полупространство, не пересекающее M , очевидно, удовлетворяет условию и лежит в $\tilde{N}_{x_e} \subset \tilde{N}$. Из этого следует, что $0 \in \text{co } \tilde{N}$, так как 0 и $\tilde{N}$ нельзя строго разделить.

Выберем минимальный набор $\{c_i\}_{i=1}^d \subset \tilde{N}$ такой, что $0 \in \text{co } \{c_i\}$; согласно теореме Каратеодори, $d - 1 \leq k$. Пусть $C = \text{lin}\{c_i\}$, $L^1 = C^\perp$ – ортогональное дополнение к C в пространстве L ; тогда, на самом деле, $d - 1 \leq c = \dim C$ (из минимальности набора $\{c_i\}$). Выберем для каждого c_i такую точку $a_i \in D$, что $c_i \in \tilde{N}_{a_i}$ и обозначим $A^2 = \{a_i\}_{i=1}^d$.

Согласно предположению индукции существует такое множество $A^1 \subset A$, $|A^1| \leq 2 \dim L^1 = 2(k - c)$, что для любого единичного вектора $e \in L^1$ найдется точка $x_e \in A^1$ такая, что $(x_e + \mathbb{R}_+e) \cap M = \emptyset$. Докажем, что множество $A^0 = A^1 \cup A^2$ обладает требуемыми свойствами. Рассмотрим единичный вектор $e \in L$. Если $e \in L^1$, то требуемый элемент найдется по предположению индукции. Иначе $e \notin C^\perp$, и существует такое j , что $\langle e, c_j \rangle \neq 0$. Из выбора набора $\{c_i\}$ существуют такие $\lambda_1, \dots, \lambda_d > 0$, что

$$\sum_i \lambda_i c_i = 0 \quad (6)$$

(действительно, если бы $\lambda_i = 0$, то набор не был бы минимальным). Если теперь $\langle e, c_j \rangle < 0$, то из (6) следует, что $\langle e, c_i \rangle > 0$ для некоторого i . Тогда, очевидно, $(a_i + \mathbb{R}_+e) \cap M = \emptyset$, поскольку $\langle a_i + \alpha e, c_i \rangle > \langle a_i, c_i \rangle \geq \langle x, c_i \rangle$ для любых $\alpha > 0$, $x \in M$; поэтому можно положить $x_e = a_i \in A^2$.

Осталось заметить, что

$$|A^0| \leq |A^1| + |A^2| \leq 2(k - c) + d \leq 2(k - c) + (c + 1) \leq 2k,$$

ибо $c > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы 3 видно, что условие, что M является P -множеством, можно заменить на условие полунепрерывности сверху отображения $a \mapsto \tilde{N}_a$ для любого подпространства L .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если компакт A точечно зажат в P -множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, то существует конечное точечно зажатое в M подмножество $A^0 \subset A$, $|A^0| \leq 2n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно положить $L = \mathbb{R}^n$.

ПРИМЕР 4. Оценка $2n$ точна; меньшим количеством нельзя обойтись, например, если $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \max_i |x_i| \leq 1\}$ – куб, а $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_i |x_i| \leq 1\}$ – вписанный в него октаэдр.

ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях следствия 2 в случае строгой выпуклости множества M можно выбрать подмножество $A^0 \subset A$ так, что $|A^0| \leq n + 1$.

ПРИМЕР 5 (анонсирован в [5]). Пусть $M = \text{co}(D \cup S)$ – выпуклая оболочка декартова произведения двух кругов

$$D = \{(x, y, z, t) : x^2 + y^2 \leq 1, z^2 + t^2 \leq 1\} \quad \text{и} \quad S = \{(x, y, 1, 0) : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Пусть

$$A = \{(x, y, x, y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$$

– компактное подмножество в M . Тогда A точечно зажато в M , но любое конечное подмножество A не зажато в M . (Вместо A можно рассматривать выпуклый компакт $\text{co } A$.)

Покажем, что A точечно зажато в M . Рассмотрим вектор $0 \neq v = (a, b, c, d)$. Тогда можно положить

$$x_v = \begin{cases} \frac{\text{sign}(c)}{\sqrt{c^2 + d^2}}(-d, c, -d, c), & \text{если } c \neq 0; \\ (-1, 0, -1, 0), & \text{если } c = 0 \neq d; \\ \frac{\text{sign}(a)}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-b, a, -b, a), & \text{если } c = d = 0, a \neq 0; \\ (-1, 0, -1, 0), & \text{если } v = (0, \pm 1, 0, 0). \end{cases}$$

Пусть

$$\alpha = \{(0, 0, z, t) : z, t \in \mathbb{R}^2\},$$

$\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \alpha$ – ортогональная проекция на плоскость α , тогда

$$\pi(M) = \{(z, t) : z^2 + t^2 \leq 1\}.$$

В первых двух случаях заметим, что при сдвиге вдоль вектора v точка $\pi(x_v)$ выходит за пределы круга $\pi(M)$. Пусть $c = d = 0$. Легко проверить, что для любого $\tau > 0$ точка $w = x_v + \tau v \notin D \cup S$. Проверим, что $w \notin M$. Если допустить обратное, то $w = \lambda d + (1 - \lambda)s$, где $d \in D$, $s \in S$, $\lambda \in (0, 1)$. Пусть $d = (d_1, d_2, d_3, d_4)$, $s = (s_1, s_2, 1, 0)$. Пусть $a \neq 0$. Тогда точка $\lambda(d_3, d_4) + (1 - \lambda)(1, 0)$ в плоскости α должна в силу определения x_v лежать на границе единичного круга с центром в нуле, причем в силу определения D выполнено $d_3^2 + d_4^2 \leq 1$. Это противоречит строгой выпуклости круга.

Если же $a = 0$, то аналогично получаем, что $\lambda(d_3, d_4) + (1 - \lambda)(1, 0) = (-1, 0)$, что невозможно.

Рассмотрим теперь конечное подмножество $A^0 = \{a_1, \dots, a_n\} \subset A$; пусть $a_i = (x_i, y_i, x_i, y_i)$. Пусть x_j — максимальное число среди x_i таких, что $x_i < 1$. Рассмотрим вектор $v = (1 - x_j, -y_j, 0, 0)$. Если $x_i < 1$, то непосредственным вычислением проверяется, что $\|(x_i + (1 - x_j), y_i - y_j)\| \leq 1$, и поэтому $a_i + v \in D$. Если же $x_i = 1$, то $y_i = 0$, и $a_i + v = (2 - x_j, -y_j, 1, 0) \in S$. В любом случае, $A^0 + v \subset M$, а значит, A^0 не является точечно зажатым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. В. Балашов, “О P -свойстве выпуклых компактов”, *Матем. заметки*, **71**:3 (2002), 323–333.
- [2] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, Физматлит, М., 2004.
- [3] Ж.-П. Обен, И. Экланд, *Прикладной нелинейный анализ*, Мир, М., 1988.
- [4] Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, *Теорема Хелли и ее применения*, Мир, М., 1968.
- [5] И. И. Богданов, “О свойстве зажатости в выпуклых компактах”, *Труды XLVII Научной конференции МФТИ*, часть VII, МФТИ, М., 2004, 12.

М. В. Балашов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

E-mail: balashov@mail.mipt.ru

Поступило

02.03.2005

Исправленный вариант

15.02.2007

И. И. Богданов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

E-mail: bogdanov@mccme.ru