Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Е. Базилевич, Гиперпространство тах-плюс выпуклых компактных множеств, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 5, 658–666

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4094>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:50:15

Гиперпространство тах-плюс выпуклых компактных множеств

Л. Е. Базилевич

Рассматривается гиперпространство $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ тах-плюс выпуклых компактных подмножеств в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Основной результат: это гиперпространство является стягиваемым многообразием, моделированным на гильбертовом кубе Q . Показано также, что отображение проектирования $\text{трсс}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{трсс}(\mathbb{R}^m)$, $n \geq m$, является открытым. Кроме того, доказано, что гиперпространство $\text{трсс}(I^{\omega_1})$ тихоновского куба I^{ω_1} гомеоморфно I^{ω_1} .

Библиография: 19 названий.

1. Введение. Топология гиперпространств компактных и замкнутых выпуклых множеств в топологических линейных пространствах исследовалась многими авторами. Классический результат Надлера, Квинна и Ставрокаса [1] утверждает, что гиперпространство компактных выпуклых множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, является стягиваемым Q -многообразием. Напомним, что Q -многообразием называется многообразие, моделированное на гильбертовом кубе $Q = [0, 1]^\omega$. Упомянутый результат, являющийся аналогом теоремы Вэста–Кертиса–Шори о гиперпространстве континуумов Пеано [2], находит разнообразные приложения к выпуклой геометрии. В частности, он позволяет доказать, что гиперпространство всех компактных строго выпуклых тел гомеоморфно сепарабельному гильбертовому пространству ℓ^2 (см. [3]).

Пусть $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Для каждых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ обозначим через $x \oplus y$ покоординатный максимум векторов x и y , а через $\lambda \odot x$ обозначим вектор, полученный из вектора x добавлением числа λ к каждой его координате. Подмножество A пространства $\mathbb{R}^n$ называется *тах-плюс выпуклым*, если $\alpha \odot a \oplus \beta \odot b \in A$ для всех $a, b \in A$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$ с $\alpha \oplus \beta = 0$. Понятие тах-плюс выпуклости (или тропической выпуклости, в другой терминологии) является аналогом выпуклости в идемпотентной математике, в основе которой лежит замена числовых полей идемпотентными полу полями и полукольцами (см., например, [4]). Краткий обзор мотиваций рассмотрения понятия тах-плюс выпуклого множества можно найти, например, в [5] (см. также [6]). Представляется, что тах-плюс выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$ связаны с мерами Маслова [7] таким же образом, как выпуклые множества с вероятностными мерами. Родственное понятие $\mathbb{B}$ -выпуклого множества рассмотрено в [8] (см. также [9]).

Обозначим через $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ гиперпространство всех непустых компактных тах-плюс выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что каждое тах-плюс выпуклое компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ является, в частности, подполурешеткой в $\mathbb{R}^n$ по отношению

к операции $\oplus$. В частности, $\max A \in A$ для каждого $\max$ -плюс выпуклого компактного подмножества A в $\mathbb{R}^n$.

Целью настоящей работы является доказательство аналога вышеупомянутого результата Надлера–Квинна–Ставрокаса для $\max$ -плюс выпуклых множеств. Именно, доказано, что гиперпространство компактных $\max$ -плюс выпуклых множеств $\text{trss}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, является стягиваемым Q -многообразием $Q \setminus \{*\}$.

Можно естественно расширить понятие $\max$ -плюс выпуклого множества на произвольные степени $\mathbb{R}^\tau$ вещественной прямой. Операции $(a, b) \mapsto a \oplus b: \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau \rightarrow \mathbb{R}^\tau$ и $(\alpha, a) \mapsto \alpha \odot a: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\tau \rightarrow \mathbb{R}^\tau$ определены покомпонентно. Подмножество A в $\mathbb{R}^\tau$ называется *$\max$ -плюс выпуклым*, если $\alpha \odot a \oplus \beta \odot b \in A$ для всех $a, b \in A$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$, для которых $\alpha \oplus \beta = 0$. Очевидно, что тихоновский куб I^τ (через I обозначается отрезок $[0, 1]$) является $\max$ -плюс выпуклым множеством.

В [10] показано, что гиперпространство тихоновского куба $\text{ss}(I^{\omega_1})$ гомеоморфно I^{ω_1} . Мы устанавливаем аналогичный факт для гиперпространства $\text{trss}(I^{\omega_1})$.

2. Предварительные сведения. Все отображения предполагаются непрерывными. Для $a \in \mathbb{R}^n$, мы пишем $a = (a_1, \dots, a_n)$. Пространство $\mathbb{R}^n$ наделяется L_∞ -метрикой d , $d(a, b) = \max_i |a_i - b_i|$. На множестве $\mathbb{R}_{\max}$ рассматривается метрика ϱ , $\varrho(x, y) = |e^x - e^y|$ (соглашение: $e^{-\infty} = 0$).

Через $\text{exr } X$ обозначается множество всех непустых компактных подмножеств метрического пространства (X, d) . Мы наделяем $\text{exr } X$ метрикой Хаусдорфа d_H :

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}$$

(здесь и впоследствии $O_r(C)$ обозначает r -окрестность множества $C \in \text{exr } X$; также через $\overline{O}_r(C)$ мы обозначаем замкнутую r -окрестность множества C). Полученное метрическое пространство называется гиперпространством пространства X . Через $\mathcal{O}_r(C)$ мы обозначаем r -окрестность точки C в $\text{exr } X$ по отношению к метрике d_H .

Легко доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 2.1. Пусть $A, B, C \in \text{exr}(\mathbb{R}^n)$. Тогда выполнены свойства

- (1) $d_H(A, B) = d_H(\alpha \odot A, \alpha \odot B)$;
- (2) $d_H(\alpha \odot A, \beta \odot A) = |\alpha - \beta|$;
- (3) $d_H(A \oplus C, B \oplus C) \leq d_H(A, B)$;
- (4) $d_H(A, \alpha \odot B) \leq d_H(A, B) + |\alpha|$.

Если X – топологическое линейное пространство, то через $\text{ss}(X)$ мы обозначаем множество всех непустых компактных подмножеств в X .

Через ANR мы обозначаем класс абсолютных окрестностных ретрактов для класса метрических пространств. Мы будем использовать следующую теорему, принадлежащую Торуньки [11; теорема 5.2.12].

ТЕОРЕМА 2.2. Если сепарабельное метрическое пространство обладает базой $\mathcal{B}$ со свойством, что каждое конечное пересечение элементов семейства $\mathcal{B}$ стягиваемо, то оно является ANRом.

Говорим, что метрическое пространство X удовлетворяет свойству дизъюнктивной аппроксимации (DAP), если для каждой непрерывной функции $\varepsilon: X \rightarrow (0, \infty)$ существуют непрерывные отображения $f_1, f_2: X \rightarrow X$ такие, что $d(f_i(x), (x)) < \varepsilon(x)$ для каждого $x \in X$, $i = 1, 2$, и $f_1(X) \cap f_2(X) = \emptyset$.

Следующий результат является характеризационной теоремой для Q -многообразий.

ТЕОРЕМА 2.3 (Торуньчик [12]). *Локально компактное ANR-пространство X является Q -многообразием, если и только если X удовлетворяет DAP.*

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *тривиальным Q -расслоением* если оно гомеоморфно проектированию $Y \times M \rightarrow Y$ на первый сомножитель, где M – Q -многообразие.

Говорим, что отображение $f: X \rightarrow Y$ компактных метрических пространств удовлетворяет *послойному условию дизъюнктивной аппроксимации*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют отображения $g_1, g_2: X \rightarrow X$ такие, что

- (1) $fg_1 = fg_2 = f$;
- (2) $d(1_X, g_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2$;
- (3) $g_1(X) \cap g_2(X) = \emptyset$.

Напомним, что отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *мягким* [13], если для каждой коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array} \quad (1)$$

такой, что A – замкнутое подпространство паракомпактного пространства Z , существует отображение $\Phi: Z \rightarrow X$ такое, что $f\Phi = \psi$ и $\Phi|_A = \varphi$.

Следующая характеризационная теорема для тривиальных Q -расслоений доказана в [14].

ТЕОРЕМА 2.4. *Отображение $f: X \rightarrow Y$ компактных метрических ANR-пространств является тривиальным Q -расслоением, если f мягко и удовлетворяет послойному условию дизъюнктивной аппроксимации.*

Следующее понятие введено в [8]. Под *s -структурой* на топологическом пространстве X понимаем предписывание каждому непустому конечному множеству A пространства X стягиваемого подпространства $F(A)$ в X , причем $F(A) \subset F(A')$, как только $A \subset A'$. Пара (X, F) , где F является s -структурой на X , называется *s -пространством*. Подмножество E пространства X называется *F -множеством*, если $F(A) \subset E$ для каждого конечного $A \subset E$. Метрическое пространство (X, d) называется *метрическим л.с.-пространством*, если все открытые шары являются F -множествами и все открытые r -окрестности F -множеств также являются F -множествами.

Следующая теорема является обобщением теоремы Майкла [15] о селекции; см. [9] по поводу доказательства. Напомним, что многозначное отображение $F: X \rightarrow Y$ топологических пространств называется *полу непрерывным снизу*, если для каждого открытого множества U пространства Y , множество $\{x \in X \mid F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ открыто в X . *Селекцией* многозначного отображения $F: X \rightarrow Y$ называется (однозначное) отображение $f: X \rightarrow Y$ такое, что $f(x) \in F(x)$ для каждого $x \in X$.

ТЕОРЕМА 2.5. *Пусть (X, d, F) – полное метрическое л.с.-пространство. Тогда каждое полу непрерывное снизу многозначное отображение $T: Y \rightarrow X$ паракомпактного пространства Y , значения которого являются непустыми замкнутыми F -множествами, обладает непрерывной селекцией.*

3. Основные результаты. Пусть $A, B \in \text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$ такие, что $\alpha \oplus \beta = 0$. Положим

$$\alpha \odot A \oplus \beta \odot B = \{\alpha \odot a \oplus \beta \odot b \mid a \in A, b \in B\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Множество $C = \alpha \odot A \oplus \beta \odot B$ принадлежит пространству $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_1, c_2 \in C$, $c_1 = \alpha \odot a_1 \oplus \beta \odot b_1$, $c_2 = \alpha \odot a_2 \oplus \beta \odot b_2$. Тогда для произвольных $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}_{\max}$ таких, что $\alpha_1 \oplus \beta_1 = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1 \odot c_1 \oplus \beta_1 \odot c_2 &= \alpha_1 \odot (\alpha \odot a_1 \oplus \beta \odot b_1) \oplus \beta_1 \odot (\alpha \odot a_2 \oplus \beta \odot b_2) \\ &= \alpha \odot (\alpha_1 \odot a_1 \oplus \beta_1 \odot a_2) \oplus \beta \odot (\alpha_1 \odot b_1 \oplus \beta \odot b_2) \in C. \end{aligned}$$

Подмножество $\mathcal{A}$ пространства $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ называется *выпуклым*, если для любых $A, B \in \mathcal{A}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$ таких, что $\alpha \oplus \beta = 0$, имеем $\alpha \odot A \oplus \beta \odot B \in \mathcal{A}$. Ясно, что пересечение каждого непустого семейства выпуклых подмножеств в пространстве $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ является выпуклым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Каждое выпуклое подмножество пространства $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ стягиваемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}$ – выпуклое подмножество в $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ и $A_0 \in \mathcal{A}$. Определим отображение $F: \mathcal{A} \times [-\infty, 0] \rightarrow \mathcal{A}$ формулой

$$F(A, \alpha) = A \oplus \alpha \odot A_0, \quad (A, \alpha) \in \mathcal{A} \times [-\infty, 0].$$

Также определим отображение $G: \mathcal{A} \times [-\infty, 0] \rightarrow \mathcal{A}$ формулой

$$G(A, \alpha) = \alpha \odot A \oplus A_0, \quad (A, \alpha) \in \mathcal{A} \times [-\infty, 0].$$

Склеивая отображения F и G , определим отображение $H: \mathcal{A} \times [-\infty, \infty] \rightarrow \mathcal{A}$ формулой

$$H(A, t) = \begin{cases} F(A, t), & \text{если } t \in [-\infty, 0], \\ G(A, -t), & \text{если } t \in [0, \infty]. \end{cases}$$

Такое определение отображения H корректно, поскольку

$$F(A, 0) = A \oplus 0 \odot A_0 = A \oplus A_0 = 0 \odot A \oplus A_0 = G(A, 0).$$

Мы наделяем расширенную числовую прямую $[-\infty, \infty]$ топологией, индуцированной порядком.

Покажем, что отображение H является непрерывным. Сначала покажем, что непрерывно отображение G .

Пусть $(A, \alpha) \in \mathcal{A} \times (-\infty, 0]$, $B = G(A, \alpha)$ и $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует $\eta > 0$ такое, что для всех $(A', \alpha') \in \mathcal{A} \times (-\infty, 0]$, удовлетворяющих условиям $d_H(A, A') < \eta$, $|\alpha - \alpha'| < \eta$, имеем $d_H(G(A', \alpha'), B) < \varepsilon$.

Пусть $\eta = \varepsilon/2$. Для $a' \in A'$ найдем $a \in A$ такое, что $d(a, a') < \eta$. Тогда существует i такое, что

$$d(\alpha \odot a \oplus b, \alpha' \odot a' \oplus b) = |\max\{\alpha + a_i, b_i\}, \max\{\alpha' + a'_i, b_i\}| < \varepsilon.$$

Мы доказали, что $G(A', \alpha') \in O_\varepsilon(B)$.

Пусть теперь $(A, -\infty) \in \mathcal{A} \times [-\infty, 0]$. Достаточно заметить, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ такое, что значение $G(A', \alpha)$ постоянно для каждого $A' \in \text{трсс}(\mathbb{R}^n)$, $d_H(A, A') < \varepsilon$ и $\alpha \in [-\infty, \alpha_0]$.

Аналогично устанавливаем непрерывность отображения F и, как следствие, отображения H . Последнее отображение является гомотопией, связывающей тождественное и постоянное отображение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $A, B, C \in \text{трсс}(\mathbb{R}^n)$, $d_H(A, C) < \varepsilon$, $d_H(B, C) < \varepsilon$. Тогда для каждого $\alpha \in [-\infty, 0]$ имеем $d_H(\alpha \odot A \oplus B, C) < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c \in C$; тогда существуют $a \in A$ и $b \in B$ такие, что $d(a, c) < \varepsilon$, $d(b, c) < \varepsilon$. Тогда $\alpha \odot a \oplus b \in \alpha \odot A \oplus B$ и нам остается показать, что $d(\alpha \odot a \oplus b, c) < \varepsilon$.

В самом деле, существует $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ такое, что

$$d(\alpha \odot a \oplus b, c) = |\max\{\alpha + a_i, b_i\} - c_i|.$$

Если $\max\{\alpha + a_i, b_i\} = b_i$, то $|b_i - c_i| < \varepsilon$, что и требовалось. Если $\max\{\alpha + a_i, b_i\} = \alpha + a_i$, то $b_i \leq \alpha + a_i \leq a_i$. Поскольку $|b_i - c_i| < \varepsilon$ и $|a_i - c_i| < \varepsilon$, мы заключаем, что $|\alpha + a_i - c_i| < \varepsilon$.

Таким образом, мы доказали, что $C \subset O_\varepsilon(\alpha \odot A \oplus B)$. Покажем теперь, что $\alpha \odot A \oplus B \subset O_\varepsilon(C)$. Для $\alpha \odot a \oplus b \in \alpha \odot A \oplus B$ найдем $c', c'' \in C$ такие, что $d(a, c') < \varepsilon$ и $d(b, c'') < \varepsilon$. Существует $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ такое, что $d(\alpha \odot a \oplus b, c) = |\alpha \odot a_i \oplus b_i - \alpha \odot c'_i \oplus c''_i| < \varepsilon$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Каждый открытый шар в $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ по отношению к метрике Хаусдорфа d_H является выпуклым множеством.

ЛЕММА 3.5. Пусть $A \in \text{трсс}(\mathbb{R}^n)$, $r \geq 0$. Тогда $\overline{O}_r(A) \in \text{трсс}(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in \overline{O}_r(A)$, $\gamma \in (-\infty, 0)$. Покажем, что $a \oplus \gamma \odot b \in O_r(A)$. Существуют $a', b' \in A$ такие, что $d(a, a') \leq r$, $d(b, b') \leq r$. Тогда $a' \oplus \gamma \odot b' \in A$. Имеем

$$d(a \oplus \gamma \odot b, a' \oplus \gamma \odot b') = \max_i |\max\{a_i, \gamma + b_i\} - \max\{a'_i, \gamma + b'_i\}| \leq r.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пространство $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ является ANRом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B} = \{\mathcal{O}_r(A) \mid A \in \text{трсс}(\mathbb{R}^n), r > 0\}$. Из следствия 3.4 вытекает, что семейство $\mathcal{B}$ является базой в пространстве $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$, и удовлетворяет условиям теоремы Торуньчика.

Следующая теорема является основным результатом этого раздела.

ТЕОРЕМА 3.7. Пространство $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, гомеоморфно $Q \setminus \{*\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что пространство $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет DAP. Пусть $\varepsilon: \text{трсс}(\mathbb{R}^n) \rightarrow (0, \infty)$ – непрерывная функция. Определим отображение $f_1: \text{трсс}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ формулой $f_1(A) = \overline{O}_{\varepsilon(A)/2}(A)$. Легко видеть, что отображение f_1 непрерывно и $d(f_1(A), A) \leq \varepsilon(A)/2 < \varepsilon(A)$.

Пусть $f_2(A) = A \cup \{\lambda \odot \max A \mid \lambda \in [0, \varepsilon(A)/3]\}$. Тогда f_2 – непрерывное отображение, $d(f_1(A), A) < \varepsilon(A)$, и из простых геометрических рассуждений вытекает, что

$$f_1(\text{трсс}(\mathbb{R}^n)) \cap f_2(\text{трсс}(\mathbb{R}^n)) = \emptyset$$

(в самом деле, для каждого $A \in f_1(\text{трсс}(\mathbb{R}^n))$ каждая окрестность точки $\max A$ является n -мерной, в то время как для каждого $A \in f_2(\text{трсс}(\mathbb{R}^n))$ точка $\max A$ обладает одномерной окрестностью).

Из только что доказанного, предложения 3.6 и характеризационной теоремы То-рунчика (теорема 2.3) вытекает, что пространство $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ является Q -многообразием.

Согласно результату Чепмэна [16] достаточно доказать, что существует собственная гомотопия $H: \text{трсс}(\mathbb{R}^n) \times [1, \infty) \rightarrow \text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ (напомним, что отображение называется *собственным*, если прообраз каждого компакта компактен). Эта гомотопия определяется формулой $H(A, t) = \overline{O}_t(A)$.

Аналогично доказывается следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.8. *Пространство $\text{трсс}(I^n)$, $n \geq 2$, гомеоморфно Q .*

4. Проектирования мах-плюс выпуклых множеств. Пусть $\text{pr}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$, – отображение проектирования. Легко видеть, что образ при этом отображении (т.е. проекция) каждого мах-плюс выпуклого множества является мах-плюс выпуклым множеством. Отсюда следует, что отображение проектирования индуцирует отображение $\text{трсс}(\text{pr}): \text{трсс}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{трсс}(\mathbb{R}^m)$.

Геометрия аналогично определяемого отображения в случае обычной выпуклости хорошо известна. Это отображение мягко в смысле Щепина [13].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Отображение $\text{трсс}(\text{pr}): \text{трсс}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{трсс}(\mathbb{R}^m)$ является открытым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольное $B \in \text{трсс}(\mathbb{R}^n)$. Пусть последовательность $\{A_i\}$, где $A_i \in \text{трсс}(\mathbb{R}^m)$, стремится к $A = \text{pr}(B) \in \text{трсс}(\mathbb{R}^m)$. Покажем, что существует последовательность $\{B_i\}$, где $B_i \in \text{трсс}(\mathbb{R}^n)$, стремящаяся к B .

Выберем произвольное i , и пусть $d_H(A_i, A) = \varepsilon$. Тогда $A_i \subset \text{pr}(O_\varepsilon(B))$ (это следует из свойства 1). Положим $B_i = \{(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \in O_\varepsilon(B) \mid (x_1, \dots, x_m) \in A_m\}$ и покажем, что это множество мах-плюс выпукло. Пусть $a, a' \in A_m$ и $b, b' \in B_i \subset O_\varepsilon(B)$ – их произвольные прообразы соответственно. Имеем $[b, b'] \subset O_\varepsilon(B)$ и $\text{pr}([b, b']) = [a, a'] \subset A_i$. Поэтому $[b, b'] \in B_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Отображение $\text{трсс}(\text{pr}): \text{трсс}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{трсс}(\mathbb{R}^m)$ является мягким.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим s -структуру F на $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ следующим образом. Для конечного подмножества $\{A_1, \dots, A_k\}$ пространства $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$, положим

$$F(\{A_1, \dots, A_k\}) = \left\{ \bigoplus_{i=1}^k \lambda_i \odot A_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\max}, \bigoplus_{i=1}^k \lambda_i = 0 \right\}.$$

То, что каждый r -шар в $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ является F -множеством, следует из предложений 3.2 и 3.3.

Применим теорему 2.5. Пусть в диаграмме (1) $X = \text{трсс}(\mathbb{R}^n)$, $Y = \text{трсс}(\mathbb{R}^m)$, $f = \text{трсс}(\text{pr})$, и A есть замкнутое подмножество паракомпактного пространства Z . Определим многозначное отображение $\Phi: Z \rightarrow X$ следующим образом:

$$\Phi(z) = \begin{cases} \{\varphi(z)\}, & \text{если } z \in A, \\ f^{-1}(\psi(z)), & \text{если } z \in Z \setminus A. \end{cases}$$

Так как A замкнутое и отображение f открыто, по предложению 4.1 отображение Φ полунепрерывно снизу.

Заметим также, что каждый прообраз $f^{-1}(A)$ является F -множеством. По теореме 2.5 отображение Φ обладает непрерывной селекцией $g: Z \rightarrow X$. Легко видеть, что $gf = \psi$ и $g|A = \varphi$. Это означает, что отображение f мягко.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Отображение $\text{трсс}(\text{pr}): \text{трсс}(I^n) \rightarrow \text{трсс}(I^m)$ является мягким.*

ТЕОРЕМА 4.4. *При $n \geq m + 2$ отображение $\text{трсс}(\text{pr}): \text{трсс}(I^n) \rightarrow \text{трсс}(I^m)$ является тривиальным Q -расслоением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим характеризационную теорему Торунчика для тривиальных Q -расслоений. Нам остается показать, что отображение $\text{трсс}(\text{pr})$ удовлетворяет свойству послонной дизъюнктивной аппроксимации.

Условимся, что отображение $\text{pr}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ является проекцией на начальные m координат. Для каждого $r > 0$ пусть $K_r = \{(0, \dots, 0, t, \dots, t) \mid t \in [0, r]\}$ (число нулей равно m). Обозначим через $h_r: I^n \rightarrow I^n$ отображение $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m, rx_{m+1}, \dots, rx_n)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Определим отображения $g_1, g_2: \text{трсс}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$g_1(A) = \overline{O}_{\varepsilon/2}(A) \cap (\text{pr}^{-1}(\text{pr}(A))), \quad g_2(A) = h_{1-(\varepsilon/2)}(A) \cup (\max h_{1-(\varepsilon/2)}(A) + K_{\varepsilon/2}).$$

Легко видеть, что отображения g_1 и g_2 удовлетворяют условиям определения FDAP. В частности, $g_1(\text{трсс}(\mathbb{R}^n)) \cap g_2(\text{трсс}(\mathbb{R}^n)) = \emptyset$, поскольку каждое множество $g_2(\text{трсс}(\mathbb{R}^n))$ содержит дугу с непустой внутренностью, в то время как это свойство не имеет места ни для какого множества $g_1(\text{трсс}(\mathbb{R}^n))$.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. *Пространство $\text{трсс}(Q)$ гомеоморфно Q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим Q как обратный предел $\varprojlim \{I^n, \text{pr}_{mn}\}$. Поскольку пространство $\text{трсс}(Q)$ гомеоморфно $\varprojlim \{\text{трсс}(I^n), \text{трсс}(\text{pr}_{mn})\}$, результат следует из теоремы 4.4.

Доказательство следующего результата аналогично доказательству теоремы 4.4.

ТЕОРЕМА 4.6. *Пусть $\text{pr}: Q \times Q \rightarrow Q$ обозначает проектирование на первый сомножитель. Тогда отображение $\text{трсс}(\text{pr}): \text{трсс}(Q \times Q) \rightarrow \text{трсс}(Q)$, $n \geq m + 2$, является тривиальным Q -расслоением (и, следовательно, гомеоморфно отображению pr).*

5. Наметризуемый случай. Следующая теорема является основным результатом этого раздела.

ТЕОРЕМА 5.1. *Гиперпространство тах-плюс выпуклых подмножеств в тихоновском кубе I^{ω_1} гомеоморфно I^{ω_1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим I^{ω_1} как предел обратного спектра $\mathcal{S} = \{I^\alpha, p_{\alpha\beta}; \omega_1\}$, где через $p_{\alpha\beta}$ обозначено проектирование I^α на I^β , $\beta \leq \alpha < \omega_1$. Покажем вначале, что $\text{трсс}(I^{\omega_1}) = \varprojlim \text{трсс}(\mathcal{S})$, где $\text{трсс}(\mathcal{S}) = \{\text{трсс}(I^\alpha), \text{трсс}(p_{\alpha\beta}); \omega_1\}$. Достаточно доказать, что для каждого $(A_\gamma)_{\gamma < \omega_1} \in \varprojlim \text{трсс}(\mathcal{S})$ существует $A \in \text{трсс}(I^{\omega_1})$

такое, что $p_\gamma(A) = A_\gamma$ для каждого $\gamma < \omega_1$ (через $p_\gamma: I^{\omega_1} \rightarrow I^\gamma$ обозначаем проектирование). Известно (см. [17]), что существует замкнутое подмножество A пространства I^{ω_1} такое, что $p_\gamma(A) = A_\gamma$ для каждого $\gamma < \omega_1$. Докажем, что множество A является тах-плюс выпуклым.

Пусть $a = (a_\gamma)_{\gamma < \omega_1}, b = (b_\gamma)_{\gamma < \omega_1} \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$ и $\alpha \oplus \beta = 0$. Для каждого $\gamma < \omega_1$ пусть $a^{(\gamma)} = (a_{\gamma'})_{\gamma' < \gamma}, b^{(\gamma)} = (b_{\gamma'})_{\gamma' < \gamma}$. Поскольку $a^{(\gamma)}, b^{(\gamma)} \in A_\gamma$ и множество A_γ тах-плюс выпукло, имеем

$$c^{(\gamma)} = (c_{\gamma'})_{\gamma' < \gamma} = \alpha \odot a^{(\gamma)} \oplus \beta \odot b^{(\gamma)} \in A.$$

Тогда, очевидно, $c = (c_\gamma)_{\gamma < \omega_1} = \alpha \odot a \oplus \beta \odot b \in A$.

Применяя теорему 4.4, видим, что $\text{трсс}(I^{\omega_1}) = \varprojlim \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}; \omega_1\}$, где каждое X_α гомеоморфно Q и для каждого $\beta < \alpha < \omega_1$ отображение $f_{\alpha\beta}$ гомеоморфно проектированию $\text{rg}: Q \times Q \rightarrow Q$. Мы заключаем, что пространство $\text{трсс}(I^{\omega_1})$ гомеоморфно I^{ω_1} .

6. Замечания. Монтехано [18] рассматривал гиперпространство $\text{сс}(U)$ компактных выпуклых подмножеств, лежащих в области U в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$. Он доказал, что $\text{сс}(U)$ гомеоморфно Q -многообразию $U \times Q \times [0, 1)$.

ВОПРОС 6.1. Является ли гиперпространство $\text{трсс}(U)$ всех компактных тах-плюс выпуклых подмножеств области U в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфным $U \times Q \times [0, 1)$?

По определению тах-плюс выпуклые конечные полиэдры – это в точности тах-плюс выпуклые оболочки конечных множеств, т.е. множества вида $\bigoplus_{i=1}^k \alpha_i \odot x_i$, где $\{x_1, \dots, x_k\}$ – заданное конечное подмножество в $\mathbb{R}^n$, и $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}_{\max}, \bigoplus_{i=1}^k \alpha_i = 0$.

ВОПРОС 6.2. Является ли гиперпространство тах-плюс выпуклых конечных полиэдров в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, гомеоморфным пространству

$$\sigma = \{(x_i)_{i=1}^\infty \in Q \mid x_i = 0 \text{ для всех, кроме конечного числа } i\}?$$

Отметим, что топологическая характеристика пары (Q, σ) приведена в [19].

Множество $A \in \text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ называется *невыврожденным*, если оно не содержит открытого в A множества размерности меньше n .

Напомним, что *псевдовнутренностью* гильбертова куба $Q = [0, 1]^\omega$ называется множество $s = (0, 1)^\omega$.

ВОПРОС 6.3. Является ли гиперпространство невыврожденных тах-плюс выпуклых подмножеств в $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$ псевдовнутренностью в $\text{трсс}(\mathbb{R}^n)$?

Автор благодарна рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. B. Nadler, Jr., J. Quinn, N. M. Stavrakas, “Hyperspace of compact convex sets”, *Pacific J. Math.*, **83**:2 (1979), 441–462.
- [2] D. W. Curtis, R. M. Schori, “Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes”, *Fund. Math.*, **101**:1 (1978), 19–38.
- [3] L. E. Bazylevych, “On the hyperspace of strictly convex bodies”, *Матем. студії, Праці Львів. матем. тов.*, **2**, Львів. матем. тов., Львів, 1993, 83–86.
- [4] *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics*, Contemp. Math., **377**, eds. G. L. Litvinov, V. P. Maslov, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

- [5] S. Gaubert, R. Katz, “The Minkowski theorem for max-plus convex sets”, *Linear Algebra Appl.*, **421**:2–3 (2007), 356–369.
- [6] S. Gaubert, R. Katz, “Max-plus convex geometry”, *Relations and Kleene Algebra in Computer Science*, Lecture Notes in Comput. Sci., **4136**, ed. R. A. Schmidt, Springer, Berlin, 2006, 192–206.
- [7] Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, Г. Б. Шпиз, “Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход”, *Матем. заметки.*, **69**:5 (2001), 758–797.
- [8] C. D. Horvath, “Contractibility and generalized convexity”, *J. Math. Anal. Appl.*, **156**:2 (1991), 341–357.
- [9] C. D. Horvath, “Extension and selection theorems in topological spaces with a generalized convexity structure”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), **2**:2 (1993), 253–269.
- [10] М. Зарічний, С. Іванов, “Гіперпростори компактних опуклих множин тихоновського куба”, *Укр. матем. журн.*, **53**:5 (2001), 698–701.
- [11] J. van Mill, *Infinite-Dimensional Topology. Prerequisites and Introduction*, North-Holland Math. Library, **43**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1989.
- [12] H. Toruńczyk, “On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q -manifolds”, *Fund. Math.*, **106**:1 (1980), 31–40.
- [13] Е. В. Щепин, “Функторы и несчетные степени компактов”, *УМН*, **36**:3 (1981), 3–62.
- [14] H. Toruńczyk, J. West, *Fibrations and bundles with Hilbert cube manifold fibers*, Mem. Amer. Math. Soc., **80**, no. 406, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [15] E. Michael, “Continuous selections. I”, *Ann. of Math.* (2), **63**:2 (1956), 361–382.
- [16] T. A. Chapman, “On some applications of infinite-dimensional manifolds to the theory of shape”, *Fund. Math.*, **76**:3 (1972), 181–193.
- [17] С. Сирота, “Спектральное представление пространств замкнутых подмножеств бикompактов”, *Докл. АН СССР*, **181** (1968), 1069–1072.
- [18] L. Montejano, “The hyperspace of compact convex subsets of an open subset of R^n ”, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, **35**:11–12 (1987), 793–799.
- [19] C. Bessaga, A. Pełczyński, *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*, Monografie Matematyczne, **58**, PWN – Polish Sci. Publ., Warsaw, 1975.

Л. Е. Базилевич

Национальный университет “Львовская политехника”

Поступило

23.04.2007