Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев, Об автоморфизмах обобщенного восьмиугольника порядка $(2, 4)$, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 4, 516–526

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4096>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:41:27

Об автоморфизмах обобщенного восьмиугольника порядка $(2, 4)$

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев

Найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов обобщенного восьмиугольника порядка $(2, 4)$. Доказано, что вершинно симметричный обобщенный восьмиугольник порядка $(2, 4)$ является классическим.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , т.е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ – граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (соответственно через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (соответственно смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (соответственно λ -подграфом). Если Γ – граф диаметра d и $i \leq d$, то через Γ_i обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ , в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ .

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени k* , если степень любой вершины a из Γ равна k .

Система инцидентности $(X, \mathcal{L})$, где X – множество точек и $\mathcal{L}$ – множество прямых, называется *почти $2n$ -угольником порядка (s, t)* , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке), диаметр графа коллинеарности равен n и для любой пары $(a, L) \in (X, \mathcal{L})$ на прямой L найдется единственная точка, ближайшая к a в графе коллинеарности. Почти $2n$ -угольник называется *обобщенным $2n$ -угольником*, если любые две точки u, w , находящиеся на расстоянии, меньшем n , лежат в единственном геодезическом пути, идущем от u к w . Обобщенный $2n$ -угольник порядка (s, t) называется *толстым*, если $s > 1$ и $t > 1$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (соответственно через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (соответственно $\Gamma_{i-1}(u)$) с $\Gamma(w)$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$* , если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00009) и фонда РФФИ-ГФЕН Китая (грант № 08-01-92200).

зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 – это степень графа, $c_1 = 1$. Дистанционно регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным*.

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если для любого $i \in \{0, \dots, d\}$ и для любых двух пар вершин (u, w) и (y, z) с $d(u, w) = d(y, z) = i$ найдется автоморфизм g графа Γ такой, что $(u^g, w^g) = (y, z)$.

Для автоморфизма g графа Γ через $\text{Fix}(g)$ обозначается подграф, индуцированный на множестве всех вершин графа Γ , неподвижных относительно g .

Для изучения возможных порядков и подграфов неподвижных точек автоморфизмов дистанционно регулярных графов Γ . Хигмен предложил оригинальный метод, использующий теорию характеров конечных групп. Этот метод изложен в монографии Камерона [1], причем он применялся только к изучению инволютивных автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(3250, 57, 0, 1)$. Позднее, в работах [2]–[4] изучались автоморфизмы сильно регулярных графов с малыми числами пересечений. В данной работе изучаются автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{10, 8, 8, 8; 1, 1, 1, 5\}$ на 1755 вершинах. Этот граф имеет спектр $\{10^1, 5^{351}, 1^{650}, -3^{675}, -5^{78}\}$, является точечным графом обобщенного восьмиугольника $\text{GO}(2, 4)$ (см. [5; гл. 6]) и не содержит n -циклов для $4 \leq n \leq 8$. Обобщенный многоугольник порядка (s, t) называется *толстым*, если $s > 1$ и $t > 1$. Известно существование толстого обобщенного восьмиугольника (с точностью до двойственности) только для $(s, t) = (q, q^2)$, $q = 2^{2n-1}$. При этом $\text{GO}(q, q^2)$ отвечает билдингу группы ${}^2F_4(q)$.

В случае $q = 2$ вершинами графа Γ являются центральные инволюции группы ${}^2F_4(2)'$, и две центральные инволюции u, w смежны тогда и только тогда, когда uw также является центральной инволюцией группы ${}^2F_4(2)'$. Легко понять, что $d(u, w) = 2$ тогда и только тогда, когда uw является нецентральной инволюцией группы ${}^2F_4(2)'$; $d(u, w) = 3$ тогда и только тогда, когда $|uw| = 4$ (и в этом случае $(uw)^2$ является нецентральной инволюцией группы ${}^2F_4(2)'$); $d(u, w) = 4$ тогда и только тогда, когда $|uw| = 5$.

ТЕОРЕМА. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{10, 8, 8, 8; 1, 1, 1, 5\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g – элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда верно одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 3$ или 13 , и Ω – пустой граф;
- (2) $p = 5$ и Ω состоит из 5ω вершин, любые две из которых находятся на расстоянии 4 в Γ ;
- (3) $p = 2$, $|\Omega|$ нечетно и
 - (i) либо в Ω найдется треугольник $\{x, y, z\}$ такой, что Ω является объединением шаров радиуса 1 с центрами в $\{x, y, z\}$;
 - (ii) либо в Ω найдется вершина b такая, что $[b] \subset \Omega$, Ω содержится в шаре радиуса 2 с центром b и найдутся такие две несмежные вершины $a, c \in [b]$, что $\Omega(a)$ и $\Omega(c)$ не содержатся в $b^\perp$.

С помощью классификации конечных простых групп получено

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{10, 8, 8, 8; 1, 1, 1, 5\}$, и группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на

множестве вершин графа Γ . Тогда Γ – точечный граф классического обобщенного восьмиугольника группы Титса ${}^2F_4(2)'$.

2. Автоморфизмы $GO(2, 4)$. Цель этого пункта – доказательство вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства теоремы.

ЛЕММА 2.1. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{10, 8, 8, 8; 1, 1, 1, 5\}$. Тогда для ненулевых чисел пересечения графа Γ верны равенства

- (1) $p_{11}^1 = 1, p_{21}^1 = p_{22}^1 = 8, p_{23}^1 = p_{33}^1 = 64, p_{34}^1 = p_{44}^1 = 512;$
- (2) $p_{11}^2 = p_{12}^2 = 1, p_{22}^2 = 6, p_{23}^2 = p_{24}^2 = 8, p_{33}^2 = 304, p_{24}^2 = 64, p_{34}^2 = 320, p_{44}^2 = 640;$
- (3) $p_{12}^3 = p_{22}^3 = p_{13}^3 = 1, p_{14}^3 = 8, p_{23}^3 = 38, p_{33}^3 = 200, p_{24}^3 = 40, p_{34}^3 = 400, p_{44}^3 = 576;$
- (4) $p_{13}^4 = p_{14}^4 = p_{22}^4 = 5, p_{23}^4 = 25, p_{24}^4 = 50, p_{33}^4 = 250, p_{34}^4 = 360, p_{44}^4 = 608.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что для вершин u, w , находящихся на расстоянии l , через p_{ij}^l обозначается число вершин z с $d(u, z) = i$ и $d(z, w) = j$. Заметим, что $p_{12}^2 = a_2, p_{13}^3 = a_3$. По лемме 4.1.7 из [5] получим

$$p_{j+1h}^i = \frac{(p_{jh-1}^i b_{h-1} + p_{jh}^i (a_h - a_j) + p_{jh+1}^i c_{h+1} - p_{j-1h}^i b_{j-1})}{c_{j+1}};$$

в частности,

$$\begin{aligned} p_{ii-1}^1 &= \frac{c_i k_i}{k}, & p_{ii}^1 &= \frac{a_i k_i}{k}, & p_{ii+1}^1 &= \frac{b_i k_i}{k}, \\ p_{i-22}^i &= \frac{c_{i-1} c_i}{\mu}, & p_{i+12}^i &= \frac{b_{i-1} b_i}{\mu}, & p_{i-1i+1}^2 &= \frac{k_i c_i b_i}{k b_1}, \\ p_{i2}^{i-1} &= \frac{b_{i-1} (a_i + a_{i-1} - a_1)}{\mu}, & p_{i2}^{i+1} &= \frac{c_{i+1} (a_i + a_{i+1} - a_1)}{\mu}. \end{aligned}$$

С помощью этих формул находим числа пересечения.

ЛЕММА 2.2. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{10, 8, 8, 8; 1, 1, 1, 5\}$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) 3-путь $\{a, b, c, d\}$ является геодезическим тогда и только тогда, когда $a \neq d$, a несмежна с c и b несмежна с d ;
- (2) 4-путь $\{a, b, c, d, e\}$ является геодезическим тогда и только тогда, когда a несмежна с c и e , b несмежна с d и c несмежна с e .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость обоих утверждений очевидна. Докажем сначала достаточность (1). Пусть $a \neq d$, a несмежна с c , b несмежна с d , но 3-путь $\{a, b, c, d\}$ не является геодезическим. Тогда $d(a, d) \leq 2$. Если вершины a, d смежны, то $\{a, b, c, d\}$ является 4-циклом, а если вершины a, d несмежны и $e \in [a] \cap [d]$, то $\{a, b, c, d, e\}$ является 5-циклом. Противоречие со свойствами обобщенного восьмиугольника. Утверждение (1) доказано.

Докажем достаточность (2). Пусть a несмежна с c и e , b несмежна с d , c несмежна с e , но 4-путь $\{a, b, c, d, e\}$ не является геодезическим. Тогда $d(a, d) \leq 3$. Если $d(a, e) = 2$, то для вершины $f \in [a] \cap [e]$ путь $\{a, b, c, d, e, f\}$ является 6-циклом. Если $d(a, e) = 3$, то для пути $\{a, u, w, e\}$ вершины u, w не принадлежат $\{a, b, c, d, e\}$ и путь $\{a, b, c, d, e, w, u\}$ является 7-циклом. Противоречие со свойствами обобщенного восьмиугольника. Лемма доказана.

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [1]. При этом графу Γ диаметра d на n вершинах отвечает симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X – множество вершин графа, R_0 – отношение равенства на X и для $i \leq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X , в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i – матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ – единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для подходящих неотрицательных целых p_{ij}^l .

Пусть P_i – матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l . Тогда собственные значения $k = p_1(0), \dots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \dots, m_d$. Заметим, что матрица P_j является значением некоторого рационального многочлена от P_1 , поэтому упорядочение собственных значений матрицы P_1 задает порядок на множестве собственных значений матрицы P_j . Матрицы P и Q , у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются *первой* и *второй матрицей собственных значений схемы* и связаны равенством $PQ = QP = |X|I$, где I – единичная матрица порядка $d + 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть u_j и w_j – левый и правый собственные векторы матрицы P_1 , отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $n/\langle u_j, w_j \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. теорему 17.12 из [6].

Фактически, из доказательства теоремы 17.12 следует, что w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q .

Подстановочное представление группы $G = \text{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. Пространство $\mathbb{C}^n$ является ортогональной прямой суммой собственных G -инвариантных подпространств $W_0 \oplus \dots \oplus W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ . Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A_1 , поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть χ_i – характер представления ψ_{W_i} . Тогда (см. § 3.7 [1]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = n^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ – число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ – число рациональное, то $\chi_i(g)$ – целое число.

Пусть до конца параграфа Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{10, 8, 8, 8; 1, 1, 1, 5\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $g \in G$, χ_1 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 351, χ_2 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 650, χ_3 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 675 и χ_4 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 78. Тогда

$$\chi_1(g) = \frac{64\alpha_0(g) + 32\alpha_1(g) + 8\alpha_2(g) - \alpha_4(g)}{5 \cdot 64},$$

$$\begin{aligned}\chi_2(g) &= \frac{35\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - 5\alpha_2(g) - \alpha_3(g)}{96} + \frac{325}{32}, \\ \chi_3(g) &= \frac{24\alpha_0(g) - 8\alpha_1(g) - \alpha_4(g)}{64} + \frac{135}{8}, \\ \chi_4(g) &= \frac{5\alpha_0(g) - 3\alpha_1(g) + \alpha_2(g) - \alpha_3(g)}{120} + \frac{39}{8}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 351 & \frac{351}{2} & \frac{351}{8} & 0 & -\frac{351}{64} \\ 650 & 65 & -\frac{325}{4} & -\frac{65}{8} & \frac{325}{32} \\ 675 & -\frac{405}{2} & \frac{135}{8} & \frac{135}{8} & -\frac{675}{64} \\ 78 & -39 & \frac{39}{2} & -\frac{39}{4} & \frac{39}{8} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\chi_1(g) = \frac{1}{1755} \left(351\alpha_0(g) + \frac{351\alpha_1(g)}{2} + \frac{351\alpha_2(g)}{8} - \frac{351\alpha_4(g)}{64} \right).$$

Приведа к общему знаменателю, получим

$$\chi_1(g) = \frac{64\alpha_0(g) + 32\alpha_1(g) + 8\alpha_2(g) - \alpha_4(g)}{5 \cdot 64}.$$

Аналогично,

$$\chi_2(g) = \frac{1}{1755} \left(650\alpha_0(g) + 65\alpha_1(g) + \frac{325\alpha_2(g)}{4} - \frac{65\alpha_3(g)}{8} + \frac{325\alpha_4(g)}{32} \right).$$

Подставляя $\alpha_4(g) = 1755 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) - \alpha_3(g)$, получим

$$\chi_2(g) = \frac{35\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - 5\alpha_2(g) - \alpha_3(g)}{96} + \frac{325}{32}.$$

Имеем

$$\chi_3(g) = \frac{1}{1755} \left(675\alpha_0(g) - \frac{405\alpha_1(g)}{2} + \frac{135\alpha_2(g)}{8} + \frac{135\alpha_3(g)}{8} - \frac{675\alpha_4(g)}{64} \right).$$

Подставляя $\alpha_2(g) + \alpha_3(g) = 1755 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_4(g)$, получим

$$\chi_3(g) = \frac{24\alpha_0(g) - 8\alpha_1(g) - \alpha_4(g)}{64} + \frac{135}{8}.$$

Наконец,

$$\chi_4(g) = \frac{1}{1755} \left(78\alpha_0(g) - 39\alpha_1(g) + \frac{39\alpha_2(g)}{2} - \frac{39\alpha_3(g)}{4} + \frac{39\alpha_4(g)}{8} \right).$$

Подставляя $\alpha_4(g) = 1755 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) - \alpha_3(g)$, получим

$$\chi_4(g) = \frac{5\alpha_0(g) - 3\alpha_1(g) + \alpha_2(g) - \alpha_3(g)}{120} + \frac{39}{8}.$$

ЛЕММА 2.4. Пусть g – автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\text{Fix}(g)$ – пустой граф. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 3$ и либо $\alpha_1(g) = 99$, $\alpha_3(g) = 1368$ и $\alpha_4(g) = 288$, либо $\alpha_1(g) = 27$, $\alpha_3(g) = 99 = \alpha_4(g) = 864$;
- (2) $p = 13$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $1755 = 3^3 \cdot 5 \cdot 13$, то $p = 3, 5$ или 13 .

Пусть $p = 3$. Заметим, что $\alpha_2(g) = 0$, иначе для вершин y, w таких, что $d(y, y^g) = 2$, $w \in [y] \cap [y^g]$, индуцированный подграф $\{y, w, y^g, w^g, y^{g^2}, w^{g^2}\}$ является шестиугольником, противоречие. Заметим, что $\alpha_i(g)$ делится на 3.

Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_4(g) = 96r$ и $\alpha_1(g) = 3r + 30s$. Поэтому $\alpha_3(g) = 1755 - 99r - 30s$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $3(3r + 30s) - (1755 - 99r - 30s) + 15$ делится на 96, поэтому $r + 2s - 1$ делится на 8.

Если подграф $\{y, y^g, y^{g^2}\}$ является треугольником, то для $w \in [y] - \{y^g, y^{g^2}\}$ получим $d(w, w^g) = 3$, поэтому $\alpha_3(g) \geq 8\alpha_1(g)$. Отсюда $41r + 90s \leq 585$. Так как $\alpha_1(g) \geq 0$, то $r + 10s \geq 0$, а так как $0 \leq \alpha_4(g) \leq 1755$, то $0 \leq r \leq 18$.

Если $d(w, w^g) = 3$ и геодезические пути между w, w^g и w, w^{g^2} не имеют общих вершин, то $\{w, w^g, w^{g^2}\}$ содержится в единственном девятиугольнике и $\alpha_3(g) - 8\alpha_1(g) = 1755 - 123r - 270s$ делится на 9. Поэтому r делится на 3 и $r \in \{3, 9, 15\}$.

Пусть $r = 3$. Тогда $0 \leq s \leq 5$ и $r + 2s - 1$ делится на 8, поэтому $s = 3$, $\alpha_4(g) = 288$, $\alpha_1(g) = 99$ и $\alpha_3(g) = 1368$.

Пусть $r = 9$. Тогда $0 \leq s \leq 2$ и $r + 2s - 1$ делится на 8, поэтому $s = 0$, $\alpha_4(g) = 864$, $\alpha_1(g) = 27$ и $\alpha_3(g) = 864$.

Пусть $r = 15$. Тогда $-1 \leq s \leq -1$ и $r + 2s - 1$ не делится на 8.

Пусть $p = 5$. Тогда $\alpha_i(g)$ делится на 5 и $\alpha_0(g) = \alpha_1(g) = 0$. Из целочисленности $\chi_3(g)$ следует, что $\alpha_4(g) = 40r$ и $5(r - 3)$ делится на 8. Поэтому $r = 8r' + 3$ нечетно. Из целочисленности $\chi_4(g)$ следует, что $\alpha_3(g) = 5u$, $s - u$ делится на 3 и $(s - u)/3 - 1$ делится на 8. Поэтому $s - u = 3(8y + 1)$. Далее,

$$\sum \alpha_i(g) = 5s + 5u + 40r = 1755,$$

$s + u = 351 - 8r = 2u + 24y + 3$ и $u = 174 - 12y - 4r$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $(5s + u)/3 - 1 = 2u + 40y + 4$ делится на 32. Итак, $u + 20y + 2 = 176 + 8y - 4r$ делится на 16, противоречие с тем, что r нечетно.

Пусть $p = 13$. Тогда $\alpha_i(g)$ делится на 13.

ЛЕММА 2.5. Если Ω содержит вершину a и p нечетно, то $p = 5$ и Ω состоит из 5ω вершин, любые две из которых находятся на расстоянии 4 в Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p > 5$, то $[a] \subset \Omega$ и по связности Γ получим $\Gamma = \Omega$, противоречие.

Пусть $p = 5$. Тогда $|\Omega|$ делится на 5 и либо a изолирована в Ω , либо $[a] \subset \Omega$. В последнем случае $[b] \subset \Omega$ для любой вершины $b \in [a]$ и по связности Γ получим $\Gamma = \Omega$, противоречие.

Пусть a, b – различные вершины из Ω . Если $d(a, b) = 2$, то Ω содержит вершину из $[a] \cap [b]$, а если $d(a, b) = 3$, то Ω содержит вершину из $[a] \cap \Gamma_2(b)$, так как $p_{12}^3 = 1$. В любом случае имеем противоречие. Значит, Ω состоит из 5ω вершин, любые две из которых находятся на расстоянии 4 в Γ .

Пусть $u \notin \Omega$. Как и выше, $\alpha_1(g) = 0$, $\alpha_4(g) = 40r$, $\alpha_2(g) = 5s$ и $\alpha_3(g) = 5t$. Поэтому $\chi_3(g) = (15\omega - r + 135)/8$ и $\omega + r + 1$ делится на 8. Далее, $\chi_1(g) = (8\omega + s - r)/8$ и $r - s$ делится на 8. Так как $\chi_4(g) = (5\omega + s - t)/24 + 39/8$, то $t + \omega - s$ — нечетное число, кратное 3. Наконец, $\chi_2(g) = (175\omega - 25s - 5t)/96 + 325/32$.

Пусть $p = 3$. Тогда $|\Omega|$ делится на 3 и $|\Omega(a)| \in \{4, 10\}$. Заметим, что $\alpha_1(g) = 0$, иначе для некоторой вершины u подграф $\{u, u^g, u^{g^2}\}$ является треугольником, содержащим единственную ближайшую к a вершину, противоречие.

Покажем, что Ω не содержит вершин степени 10. Пусть $|\Omega(a)| = 10$. Тогда $|\Omega(b)| = 10$ для любой вершины $b \in \Omega \cap \Gamma_4(a)$. Действительно, все 5 вершин из $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ попадают в Ω , поэтому все 5 вершин из $\Gamma_3(a) \cap [b]$ попадают в Ω и $[b] \subset \Omega$. Теперь $[c] \subset \Omega$ для любой вершины $c \in [a]$. В самом деле, $p_{34}^1 = 512$, поэтому $\Gamma_3(c) \cap \Gamma_4(a)$ содержит вершину b из Ω . Далее, $[b]$ содержит 4 вершины из $\Gamma_4(a) \cap \Gamma_4(c)$ и по доказанному $[c] \subset \Omega$. Таким образом, $\Gamma_2(a) \subset \Omega$ и по связности графа имеем $\Gamma \subset \Omega$, противоречие.

Теперь граф Ω связан и является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{4, 2, 2, 2; 1, 1, 1, 2\}$, т.е. Ω является единственным обобщенным восьмиугольником порядка $(2, 1)$ на 45 вершинах.

Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $8\alpha_2(g) - \alpha_4(g)$ делится на $5 \cdot 64$, из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $5\alpha_2(g) + \alpha_3(g) - 24$ делится на 96. Из целочисленности $\chi_3(g)$ следует, что $\alpha_4(g) + 16$ делится на 64. С другой стороны, из целочисленности $\chi_4(g)$ следует, что $\alpha_2(g) - \alpha_3(g) - 30$ делится на 120, $\alpha_2(g) = 20x + 16y + 9$ и $\alpha_3(g) = 16y - 100x - 21$, противоречие с тем, что

$$\alpha_4(g) = 1710 - (\alpha_2(g) + \alpha_3(g)) = 1722 + 80x - 32y$$

не делится на 4. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.6. *Если Ω содержит вершину a и $p = 2$, то $|\Omega|$ нечетно и выполняется одно из следующих утверждений:*

- (1) *в Ω найдется треугольник $\{x, y, z\}$ такой, что Ω является объединением шаров радиуса 1 с центрами в $\{x, y, z\}$;*
- (2) *в Ω найдется вершина b такая, что $[b] \subset \Omega$, Ω содержится в шаре радиуса 2 с центром b , и найдутся такие две несмежные вершины $a, c \in [b]$, что $\Omega(a)$ и $\Omega(c)$ не содержатся в $b^\perp$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p = 2$. Тогда $|\Omega|$ нечетно. Заметим, что $\alpha_3(g) = 8\alpha_1(g)$. Докажем утверждение

(*) если $a, b \in \Omega$ и $d(a, b) = 4$, то степени вершин a, b в графе Ω равны.

Пусть $a, b \in \Omega$ и $d(a, b) = 4$. Так как $p_{22}^4 = 5$, то для любого ребра из $[a]$ найдется геодезический путь между a, b , содержащий вершину, инцидентную этому ребру. Если указанная вершина лежит в Ω , то смежная с b вершина из этого пути также лежит в Ω . Поэтому степени вершин a, b в графе Ω равны. Утверждение (*) доказано.

Допустим, что $a \in \Omega$ и Ω не пересекает $\Gamma_4(a)$. Если $d \in \Gamma_3(a) \cap \Omega$, то степень d в Ω равна 2. Далее, единственный геодезический путь $\{a, b, c, d\}$ от a к d содержится в Ω , причем степени b, c в Ω не меньше 4. Теперь, Ω содержит треугольник $\{c, d, d'\}$ и d' имеет степень 2 в Ω . Покажем, что Ω не пересекает $\Gamma_4(c)$. Иначе, для $e \in \Omega \cap \Gamma_4(c)$

можно считать, что $d(d, e) = 3$ и $d(d', e) = 4$. Противоречие с тем, что вершина из $\Omega(d) \cap \Gamma_2(a)$ попадает в $\{c, d'\}$.

Покажем, что $\Gamma_3(b)$ не пересекает Ω . Пусть $z \in \Gamma_3(b) \cap \Omega$ и $\{b, x, y, z\}$ – геодезический путь. Допустим сначала, что $x \notin \{a, c\}$. Тогда путь $\{a, b, x, y, z\}$ не является геодезическим и ввиду леммы 2.2 вершины a, x смежны. Симметрично, вершины c, x смежны, противоречие. Без ограничения общности, $a = x$. Тогда по лемме 2.2 имеем $d(c, z) = 4$, противоречие. Таким образом, шар радиуса 2 с центром b содержит Ω . Поэтому для любой вершины $x \in \Omega(b)$ подграф Ω не пересекает $\Gamma_4(d)$.

Пусть для некоторой вершины $x \in \Omega - \{b\}$ шар радиуса 2 с центром x содержит Ω . Если $d(b, x) = 2$, $e \in [b] \cap [x]$, то $\Omega \subset e^\perp$ (любая вершина из $\Omega(b) - e^\perp$ находится на расстоянии 3 от x).

Пусть $\Omega \subseteq e^\perp$ и $|\Omega| = 1 + 2t$. Тогда $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = (10 - 2t) + 16t$, $\alpha_3(g) = 8\alpha_1(g)$,

$$\alpha_4(g) = 1755 - (1 + 2t) - (10 + 14t) - 8\alpha_1(g) = 1744 - 16t - 8\alpha_1(g).$$

Далее,

$$\chi_1(g) = \frac{64(1 + 2t) + 24\alpha_1(g) + 8(10 + 14t) - (1744 - 16t - 8\alpha_1(g))}{5 \cdot 64} = -5 + \frac{8t + \alpha_1(g)}{10}.$$

Целочисленность остальных характеров не дает новых ограничений. Минимум $\alpha_4(g)$ достигается в случае $t = 5$, $\alpha_1(g) = 80$, $\alpha_3(g) = 640$ и $\alpha_4(g) = 1024$. Противоречие с тем, что любая вершина u , находящаяся на расстоянии 4 от u^g , находится на расстоянии 2 от неподвижной точки (и $\alpha_4(g) \leq 800$).

Если вершины b, x смежны, $x' \in [b] \cap [x]$, то Ω содержится в объединении шаров радиуса 1 с центрами в $\{b, x, x'\}$. В этом случае в Ω найдется треугольник $\{x, y, z\}$ такой, что Ω содержится в объединении шаров радиуса 1 с центрами в $\{x, y, z\}$.

Допустим, что некоторая вершина u из $[x]$ не лежит в Ω . Тогда для любой вершины $w \in \Gamma_2(u) \cap \Gamma_3(x)$ имеем $w \notin \Omega$ и w находится на расстоянии, не большем 2 от некоторой вершины a из Ω . Тогда можно считать, что $a \in [y]$ и $d(w, y) = 3$, противоречие. Итак, в рассматриваемом случае выполняется утверждение (1).

Пусть для единственной вершины $b \in \Omega$ шар радиуса 2 с центром b содержит Ω . Покажем, что в этом случае выполняется утверждение (2).

Заметим сначала, что $[b] \subset \Omega$. В противном случае некоторая вершина u из $[b]$ не лежит в Ω . Тогда для любой вершины $w \in \Gamma_2(u) \cap \Gamma_3(b)$ имеем $w \notin \Omega$ и w находится на расстоянии, не большем 2, от некоторой вершины a из Ω . Если $a \in [b]$, то тройка вершин a, b, u лежит в 6-цикле из Γ . Если $a \in \Gamma_2(b)$, то тройка вершин a, b, u лежит в 7-цикле из Γ . В любом случае имеем противоречие.

Если в Ω нет таких двух несмежных вершин $a, c \in [b]$, что $\Omega(a)$ и $\Omega(c)$ не содержатся в $b^\perp$, то Ω содержится в шаре радиуса 2 с центром в некоторой вершине из $[b]$. Итак, в рассматриваемом случае утверждение (2) выполняется.

Пусть для любой вершины x из Ω подграф $\Gamma_4(x)$ пересекает Ω . Заметим, что Ω – связный граф. Теперь для регулярности Ω достаточно доказать, что степени смежных вершин из Ω совпадают. Пусть $\{a, b, c\}$ – треугольник из Ω и $z \in \Gamma_4(a) \cap \Omega$. Без ограничения общности, $d(b, z) = 3$ и по утверждению (*) степени вершин a, c в Ω совпадают. Теперь для $y \in \Gamma_4(b) \cap \Omega$ одна из вершин a, c попадает в $\Gamma_4(y)$ и ее степень совпадает со степенью b в Ω .

Из регулярности следует, что Ω – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{4, 2, 2, 2; 1, 1, 1, 2\}$, т.е. Ω является единственным обобщенным восьмиугольником порядка $(2, 1)$ на 45 вершинах. В этом случае $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 6 \cdot 45$,

$$\chi_2(g) = \frac{35 \cdot 45 - 5 \cdot 6 \cdot 45}{96} + \frac{325}{32} = \frac{400}{32},$$

противоречие. Лемма доказана.

3. Характеризация вершинно транзитивного обобщенного восьмиугольника порядка $(2, 4)$. В этом пункте предполагается, что Γ – точечный граф обобщенного восьмиугольника порядка $(2, 4)$. Тогда Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{10, 8, 8, 8; 1, 1, 1, 5\}$. Пусть G – группа автоморфизмов графа Γ . Из лемм 2.4–2.6 следует, что $|G|$ делит $2^{\beta}3^35^{\gamma}13$.

ЛЕММА 3.1. Пусть группа G содержит элемент f порядка $13p$, где p – простое число, $p < 13$, $g = f^{13}$ и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $p = 5$, $|\Omega| = 65$, для $\Gamma' = \Gamma - \cup_{a \in \Omega} a^{\perp}$ и для множества $\mathcal{L}$, состоящего из $\langle g \rangle$ -орбит на Γ' , пара $(\Omega, \mathcal{L})$ является 2-схемой с параметрами $v = 65$, $b = 208$, $r = 16$, $k = 5$, $\lambda = 1$, где точка инцидентна блоку тогда и только тогда, когда расстояние между ними в графе Γ равно 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G содержит элемент f порядка $13p$, где p – простое число, $p < 13$. Положим $g = f^{13}$ и $\Omega = \text{Fix}(g)$.

Пусть $p = 2$. По лемме 2.6 подграф Ω либо является объединением шаров радиуса 1 с центрами в вершинах некоторого треугольника, либо содержится в шаре радиуса 2 с центром в некоторой вершине. В любом случае f^p фиксирует вершину из Ω . Противоречие с леммой 2.5.

Пусть $p = 3$. По лемме 2.5 $\alpha_1(g)$ равно 99 или 27. Противоречие с тем, что $\alpha_1(g)$ не делится на 13.

Пусть $p = 5$. Ввиду леммы 2.5 подграф Ω состоит из 5ω вершин, попарно находящихся на расстоянии 4 в Γ . Поэтому ω делится на 13.

Из доказательства леммы 2.5 следует, что $\alpha_0(g) = 65\omega'$, $\alpha_1(g) = 0$, $\alpha_4(g) = 520r'$, $\alpha_2(g) = 65s'$, $\alpha_3(g) = 65t'$, $13(\omega' + r') + 1$ делится на 8, $r' - s'$ делится на 8 и $t' + \omega' - s'$ – нечетное число, кратное 3. Перебор значений r' от 0 до 3 дает решения

$$(r', s', t', \omega') \in \{(0, 24, 0, 3), (0, 0, t', 27 - t'), (1, 17, 0, 2), (2, 10, 0, 1)\}.$$

Так как окрестность вершины из Ω содержит 10 вершин u таких, что $d(u, u^g) = 2$, то $s' \geq 10\omega'$ и остается единственное решение $(r', s', t', \omega') = (2, 10, 0, 1)$. Пусть $\Gamma' = \Gamma - \cup_{a \in \Omega} a^{\perp}$ и $\mathcal{L}$ состоит из $\langle g \rangle$ -орбит на Γ' . Так как $1755 = 65 + 65 \cdot 10 + 65 \cdot 80/5$, то каждая вершина из Γ' находится на расстоянии 2 точно от 5 вершин из Ω , поэтому система инцидентности $(\Omega, \mathcal{L})$, в которой точка a инцидентна прямой L , если $d(a, l) = 2$ для некоторой (а поэтому и для каждой) вершины l из L , является 2-схемой с параметрами $v = 65$, $b = 208$, $r = 16$, $k = 5$, $\lambda = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вопрос о существовании обобщенного восьмиугольника с автоморфизмом порядка 65 остается открытым.

ЛЕММА 3.2. Пусть P – силовская 5-подгруппа из G . Тогда $|P|$ делит 25 и в случае $|P| = 25$ имеем $\alpha_0(g) = 5$, $\alpha_2(g) = 150$, $\alpha_3(g) = 400$, $\alpha_4(g) = 1200$ для любого неединичного элемента $g \in P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что 25 делит $|P|$. Пусть g – элемент порядка 5 из $Z(P)$, $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $P/\langle g \rangle$ действует без неподвижных точек на Ω . Иначе некоторая вершина a из Ω фиксируется подгруппой P_0 порядка 25 из P и P_0 действует полурегулярно на множестве из пяти максимальных клик графа $[a]$, противоречие. Если 125 делит $|P|$, то $|\Omega|$ делится на 25.

Далее, $\alpha_i(g)$ делится на 25 для $i > 0$ и

$$1755 = \alpha_0(g) + \sum_{i>1} \alpha_i(g),$$

поэтому $\alpha_0(g)$ не делится на 25. В частности, 125 не делит $|P|$.

Пусть $|P| = 25$ и $|\Omega| = 5\omega$ сравнимо с 5 по модулю 25. Так как Γ не содержит 5-циклов, то $\alpha_1(g) = 0$. Из целочисленности

$$\chi_3(g) = \frac{24\alpha_0(g) - 8\alpha_1(g) - \alpha_4(g)}{64} + \frac{135}{8}$$

следует, что $\alpha_4(g)$ делится на 8, поэтому $\alpha_4(g) = 200r$, $0 < r \leq 8$, $\chi_3(g) = 5(\omega - 5r + 27)/8$ и $\omega + 3r + 3$ делится на 8. Далее, $\alpha_2(g) = 25s$ и $\alpha_3(g) = 25t$. Поэтому $\chi_1(g) = (5\omega + 25s/8 - 25r/8)/5$ и $r - s$ делится на 8. Так как $\chi_4(g) = (5\omega + 5s - 5t)/24 + 39/8$, то $5(\omega + s - t) - 3$ делится на 24, поэтому $\omega + s - t = 15 + 24x$ для некоторого целого числа x . Так как $\alpha_2(g) \geq 10\alpha_0(g)$, то $\alpha_0(g) \leq 140$.

Перебирая r от 1 до 8, для $(\alpha_0(g), \alpha_2(g), \alpha_3(g), \alpha_4(g))$ получим следующие возможности:

$$(5, 150, 400, 1200), \quad (55, 500, 400, 800), \quad (105, 250, 1000, 400), \quad (105, 850, 400, 400).$$

Но в трех последних случаях имеем $\alpha_2(g) < 10\alpha_0(g)$.

До конца этого пункта будем предполагать, что группа G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ . Зафиксируем вершину a графа Γ и через G_a обозначим стабилизатор вершины a в группе G . Тогда $|G_a|$ делит $2\beta 5$ и $|G : G_a| = 3^3 5 \cdot 13$.

ЛЕММА 3.3. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) *цокль H группы G является простой группой и действует примитивно на множестве вершин графа Γ ;*
- (2) *$|H : H_a| = 3^3 \cdot 5 \cdot 13$ и $|H_a|$ делит $2\beta 5$;*
- (3) *G не содержит регулярных подгрупп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как дистанционно регулярный граф диаметра, большего 2, с группой автоморфизмов, импримитивно действующей на множестве вершин графа, является двудольным или антиподальным, то G примитивно действует на множестве вершин графа Γ . Так как $v = 1755$ не является степенью простого числа, то цокль H группы G является простой группой. Снова H действует примитивно на множестве вершин графа Γ . Поэтому $|H_a|$ делит $2\beta 5$ и $|H : H_a| = 3^3 5 \cdot 13$.

Пусть U – регулярная подгруппа из G . Тогда $|U| = 3^3 5 \cdot 13$. Пусть P – силовская 5-подгруппа из U . Так как порядок группы $\text{GL}(3, 3)$ не делится на 5, то P централизует силовскую 3-подгруппу из U . Аналогично, P централизует силовскую 13-подгруппу из U . Противоречие с тем, что для неединичного элемента g из P число $\alpha_0(g)$ делится на $5 \cdot 27 \cdot 13$. Лемма доказана.

Из леммы 3.3 следует, что Γ не является графом Кэли.

ЛЕММА 3.4. *Группа H изоморфна группе Титса ${}^2F_4(2)'$ и Γ – обобщенный восьмиугольник, отвечающий билдингу группы ${}^2F_4(2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду классификации конечных простых групп H является знакопеременной группой, группой Шевалле над конечным полем или спорадической группой.

Если H является знакопеременной группой A_n или спорадической группой, то $H = A_n$, $n \leq 6$, противоречие с тем, что 13 делит $|H|$. Значит, H – группа Шевалле над полем порядка $q = p^n$. Так как H не делится на 7, то $p \neq 7$ и H не делится на $p^6 - 1$. Отсюда H изоморфна одной из групп: $A_n(q)$, ${}^2A_n(q)$, где $n \leq 4$, $B_2(q)$, ${}^2B_2(q)$, $C_2(q)$, $D_3(q)$, ${}^2D_3(q)$, ${}^2G_2(q)'$, ${}^2F_4(q)'$.

Рассмотрим сначала случай нечетного q . Если $n \geq 2$, то $q = 3$ и $H = A_2(3)$, противоречие с тем, что $|A_2(3)|$ не делится на 5. Если $n = 1$, то $H = A_1(q)$ и $q = 13$ или $q = 27$, противоречие с тем, что $|H|$ не делится на 5.

Пусть q четно. Если $n = 1$, то $q^2 - 1$ делится на $3^3 \cdot 5 \cdot 13$ и делит $3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$, противоречие.

Так как $|H|$ не делится на 7, то в случае $H = A_n(q)$ имеем $n = 2$ и $q = 2$, противоречие с тем, что $|H|$ не делится на 5.

В случае $H = {}^2A_n(q)$ группа ${}^2A_3(2)$ изоморфна $B_2(3)$, поэтому $n = 2$ и $q = 4$, противоречие с тем, что $|H|$ не делится на 275.

В случае $H = B_2(q)$ имеем $q \geq 4$ и $|H|$ делится на $(q^2 - 1)^2$, противоречие. Порядок группы ${}^2B_2(q)$ не делится на 3. Группа $C_2(q)$ изоморфна $B_2(q)$ для четных q . Группы $D_3(q)$, ${}^2D_3(q)$ изоморфны $A_2(q)$ и ${}^2A_2(q)$ соответственно.

В случае $H = {}^2F_4(q)'$ и $q > 2$ нечетная часть порядка группы H больше $3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math. Soc. Stud. Texts, **45**, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999.
- [2] А. А. Махнев, Д. В. Падучих, “Об автоморфизмах графа Ашбахера”, *Алгебра и логика*, **40:2** (2001), 125–134.
- [3] А. А. Махнев, В. В. Носов, “Об автоморфизмах сильно регулярных графов с $\lambda = 0$, $\mu = 2$ ”, *Матем. сб.*, **195:3** (2004), 47–68.
- [4] А. А. Махнев, И. М. Минакова, “Об автоморфизмах графов с $\lambda = 1$, $\mu = 2$ ”, *Дискрет. матем.*, **16:1** (2004), 95–104.
- [5] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **18**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1989.
- [6] P. J. Cameron, J. van Lint, *Designs, Graphs, Codes and Their Links*, London Math. Soc. Stud. Texts, **22**, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1991.

И. Н. Белоусов

Институт математики и механики Уро РАН

E-mail: i_belousov@mail.ru

Поступило

20.04.2007

А. А. Махнев

Институт математики и механики Уро РАН

E-mail: makhnev@imm.uran.ru