Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Бандалиев, Об одном неравенстве в пространстве Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 3, 323–333

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4097>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 04:05:47

Об одном неравенстве в пространстве Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости

Р. А. Бандалиев

Основной целью представленной работы является получение аналога типа обобщенного неравенства Минковского и вложения между пространствами Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости.

Библиография: 14 названий.

В последнее время возрос интерес к пространствам Лебега с переменным показателем суммируемости. Эти пространства стали изучаться сравнительно недавно. Отметим работы [1], [2], а также работу [3]. А именно, в работе [1] при $n = 1$, а при $n > 1$ в работах [2], [3], изучены структурные свойства этих пространств. В работе [1] при $n = 1$ впервые была изучена топология этих пространств, в работе [2] при $n > 1$ было изучено также пространство Соболева с переменным показателем суммируемости и дано применение полученных результатов. В работе [3] при $n > 1$ исследована ограниченность некоторого интеграла типа свертки. В работе [4] было доказано, что если показатель суммируемости удовлетворяет условию Дини–Лишица, то система Хаара образует базис в пространстве $L^{p(x)}([0, 1])$. В работе [5] было доказано, что если показатель суммируемости удовлетворяет условию Дини–Лишица, то некоторые семейства операторов свертки равномерно ограничены в $L^{p(x)}([0, 2\pi])$. Отметим, что задача о базисности системы Хаара была поставлена Ульяновым (см. [4]). Исследование ограниченности интегральных и дифференциальных операторов в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости представляют интерес не только с теоретической точки зрения, но и при исследовании моделей конкретных физических процессов. Изучение этих пространств связано с задачами теории упругости, динамики жидкостей и вариационного исчисления. Математические постановки таких задач приводят к различным дифференциальным уравнениям с нестандартными условиями роста (см. работы [6], [7]). Поэтому возникает необходимость исследовать также пространства Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости, который введен автором в работе [8].

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, и пусть Ω – измеримое по Лебегу подмножество в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $\mathbf{p}(x) = (p_1(x_1, \dots, x_n), p_2(x_2, \dots, x_n), \dots, p_n(x_n))$ – вектор-функция, определенная в $\mathbb{R}^n$ с измеримыми по Лебегу компонентами, удовлетворяющими неравенствам $1 \leq p_i(x^{(i)}) < \infty$, где $x^{(i)} = (x_i, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$. Всюду далее будем учитывать, что $x^{(1)} = x$, $x^{(n)} = x_n$,

а также, что рассматриваемые множества и функции являются измеримыми по Лебегу. Жирными буквами будем обозначать некоторые векторы и вектор-функции.

Через $L_{p_1(x), x_1}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций f , для которых при фиксированной $x^{(2)} \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p_1(x)} dx_1 < \infty.$$

Одна из эквивалентных норм в $L_{p_1(x), x_1}(\mathbb{R}^n)$ определяется как (см. [1])

$$\|f\|_{L_{p_1(x), x_1}(\mathbb{R})} = \|f\|_{p_1, x_1} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p_1(x)} dx_1 \leq 1 \right\}.$$

Очевидно, что $\|f\|_{p_1, x_1} = \|f\|_{p_1, x_1}(x^{(2)})$.

Далее, через $L_{(p_1(x), p_2(x^2)), x_1, x_2}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций f , для которых при фиксированной $x^{(3)} \in \mathbb{R}^{n-2}$

$$\int_{\mathbb{R}} (\|f\|_{p_1, x_1}(x^{(2)}))^{p_2(x^{(2)})} dx_2 < \infty,$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{(p_1(x), p_2(x^2)), x_1, x_2}(\mathbb{R}^n)} &= \|\|f\|_{p_1, x_1}\|_{p_2, x_2} \\ &= \inf \left\{ \mu > 0 : \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\|f\|_{p_1, x_1}(x^{(2)})}{\mu} \right)^{p_2(x^{(2)})} dx_2 \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство $L_{\mathbf{p}(x)}(\mathbb{R}^n) = L_{(p_1(x), p_2(x^{(2)}), \dots, p_n(x_n))}(\mathbb{R}^n)$ определяется как пространство измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций f таких, что

$$\rho_{\mathbf{p}}(f) = \int_{\mathbb{R}} (\|\dots\| \|f\|_{p_1, x_1}\|_{p_2, x_2} \dots \|_{p_{n-1}, x_{n-1}}(x_n))^{p_n(x_n)} dx_n < \infty.$$

Величина

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{\mathbf{p}(x)}(\mathbb{R}^n)} &= \|f\|_{L_{(p_1(x), p_2(x^{(2)}), \dots, p_n(x_n))}(\mathbb{R}^n)} = \|\dots\| \|f\|_{p_1, x_1}\|_{p_2, x_2} \dots \|_{p_n, x_n} = \|f\|_{\mathbf{p}} \\ &= \inf \left\{ \nu > 0 : \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\|\dots\| \|f\|_{p_1, x_1}\|_{p_2, x_2} \dots \|_{p_{n-1}, x_{n-1}}(x_n)}{\nu} \right)^{p_n(x_n)} dx_n \leq 1 \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

называется *нормой элемента* $f \in L_{\mathbf{p}(x)}(\mathbb{R}^n)$.

В работе [9] доказано, что величина, определенная равенством (1), определяет одну из эквивалентных норм в пространстве $L_{\mathbf{p}(x)}(\mathbb{R}^n)$ и это пространство является полным пространством, т.е. рассмотренное пространство является банаховым пространством по отношению к введенной норме.

Если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное измеримое подмножество, а f – измеримая функция в Ω , то норма (1) в пространстве $L_{\mathbf{p}(x)}(\Omega)$ определяется как

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}(x)}(\Omega)} = \|f\chi_{\Omega}\|_{L_{\mathbf{p}(x)}(\mathbb{R}^n)},$$

где $\chi_{\Omega}(x)$ – характеристическая функция множества Ω .

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\mathbf{p}(x) = (p_1, \dots, p_n) = \mathbf{p}$, т.е. $p_i(x^{(i)}) = p_i = \text{const}$ для $i = 1, \dots, n$, то пространство $L_{\mathbf{p}(x)}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с обычным пространством $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$ со смешанной нормой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по определению при фиксированной $x^{(2)} \in \mathbb{R}^{n-1}$ имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{p_1, x_1} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p_1} dx_1 \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \lambda \geq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p_1} dx_1 \right)^{1/p_1} \right\} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p_1} dx_1 \right)^{1/p_1}. \end{aligned}$$

Далее, если точка $x^{(3)} \in \mathbb{R}^{n-2}$ фиксирована, то

$$\begin{aligned} \|\|f\|_{p_1, x_1}\|_{p_2, x_2} &= \inf \left\{ \mu > 0 : \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1}}{\mu^{p_2}} dx_2 \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \mu > 0 : \mu \geq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \right)^{1/p_2} \right\} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \right)^{1/p_2}. \end{aligned}$$

Наконец, получим, что

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathbf{p}} &= \|\dots\| \|f\|_{p_1, x_1} \|_{p_2, x_2} \dots \|_{p_n, x_n} \\ &= \inf \left\{ \nu > 0 : \int_{\mathbb{R}} \frac{\int_{\mathbb{R}} [\dots (\int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p_1} dx_1)^{p_2/p_1} dx_2)^{p_3/p_2} \dots dx_{n-1}]^{p_n/p_{n-1}}}{\nu^{p_n}} dx_n \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left[\dots \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \right)^{p_3/p_2} \dots \right]^{p_n/p_{n-1}} dx_n \right\}^{1/p_n}. \end{aligned}$$

Следствие 1 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что структурные свойства пространств

$$L_{\mathbf{p}(x)}(\mathbb{R}^n) = L_{(p_1(x), p_2(x^{(2)}), \dots, p_n(x_n))}(\mathbb{R}^n)$$

при $p_i(x^{(i)}) = p_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, n$, подробно изучены в работах [10] и [11] (см. с. 11–25), а также в работе [12].

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $p_1(x_1, \dots, x_n) = p_2(x_2, \dots, x_n) = \dots = p_n(x_n) = p(x_n)$, т.е., если $\mathbf{p}(x) = (p(x_n), \dots, p(x_n))$, то пространство $L_{\mathbf{p}(x)}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством $L_{p(x_n)}(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по определению

$$\|f\|_{p_1, x_1} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \lambda \geq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p(x_n)} dx_1 \right)^{1/p(x_n)} \right\} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p(x_n)} dx_1 \right)^{1/p(x_n)},$$

где точка $x^{(2)} \in \mathbb{R}^{n-1}$ фиксирована.

Аналогично, при фиксированной $x^{(3)} \in \mathbb{R}^{n-2}$ имеем

$$\begin{aligned} \| \|f\|_{p_1, x_1} \|_{p_2, x_2} &= \inf \left\{ \mu > 0 : \mu \geq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p(x_n)} dx_1 \right) dx_2 \right)^{1/p(x_n)} \right\} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^{p(x_n)} dx_1 dx_2 \right)^{1/p(x_n)}. \end{aligned}$$

Итак получим, что

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{\mathbf{p}}(x)(\mathbb{R}^n)} &= \|\cdots \| \|f\|_{p, x_1} \|_{p, x_2} \cdots \|_{p, x_n} \\ &= \inf \left\{ \nu > 0 : \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x)|^{p(x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}}{\nu^{p(x_n)}} \right) dx_n \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \nu > 0 : \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \frac{f(x)}{\nu} \right|^{p(x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \right) dx_n \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \nu > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x)}{\nu} \right|^{p(x_n)} dx \leq 1 \right\} = \|f\|_{L_{p(x_n)}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Следствие 2 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что основные свойства пространств

$$L_{\mathbf{p}(x)}(\mathbb{R}^n) = L_{(p(x_n), p(x_n), \dots, p(x_n))}(\mathbb{R}^n) = L_{p(x_n)}(\mathbb{R}^n)$$

при $n = 1$, $x \in [0, 1]$ исследованы в работе [1], а при $n > 1$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ в работе [2] (см. также [3]).

Пусть $\mathbf{p}(x) = (p_1(x), p_2(x^{(2)}), \dots, p_n(x_n))$ и $\mathbf{q}(x) = (q_1(x), q_2(x^{(2)}), \dots, q_n(x_n))$ – две вектор-функции, определенные в $\mathbb{R}^n$, с компонентами, удовлетворяющими неравенствам $1 \leq p_i(x^{(i)}), q_i(x^{(i)}) < \infty$, $i = 1, \dots, n$. Условимся в дальнейшем писать $\mathbf{p}(x) \geq \mathbf{q}(x)$ или $\mathbf{p}(x) > \mathbf{q}(x)$, если соответственно $p_i(x^{(i)}) \geq q_i(x^{(i)})$ или $p_i(x^{(i)}) > q_i(x^{(i)})$, $i = 1, \dots, n$. В частности, $\mathbf{1} \leq \mathbf{p}(x) < \infty$ означает, что $1 \leq p_i(x^{(i)}) < \infty$, $i = 1, \dots, n$, где $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, $\infty = (\infty, \dots, \infty)$. Далее, $\mathbf{1}/\mathbf{p}(x) = (1/p_1(x), \dots, 1/p_n(x_n))$, под суммой вектор-функций $\mathbf{p}(x)$ и $\mathbf{q}(x)$ понимается вектор-функция $\mathbf{p}(x) + \mathbf{q}(x) = (p_1(x) + q_1(x), \dots, p_n(x_n) + q_n(x_n))$, и пишем $\underline{\mathbf{p}} = (\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n)$, $\bar{\mathbf{p}} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$, где $\underline{p}_i = \inf_{x \in \mathbb{R}^{n-i+1}} p_i(x^{(i)})$, $\bar{p}_i = \sup_{x \in \mathbb{R}^{n-i+1}} p_i(x^{(i)}) < \infty$, $i = 1, \dots, n$.

Отметим два свойства функционала $\rho_{\mathbf{p}}(f)$.

ЛЕММА 1. Если $0 < \rho_{\mathbf{p}}(f) < \infty$ и $\bar{p}_n = \sup_{x_n \in \mathbb{R}} p_n(x_n) < \infty$, то функция $g: \nu \mapsto \rho_{\mathbf{p}}(f/\nu)$ является непрерывной и невозрастающей на $(0, \infty)$.

Действительно, при $0 < \nu_0 < \nu \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \rho_{\mathbf{p}}\left(\frac{f}{\nu}\right) - \rho_{\mathbf{p}}\left(\frac{f}{\nu_0}\right) \right| &\leq \frac{1}{(\nu\nu_0)^{\bar{p}_n}} \int_{\mathbb{R}} \left(\|\cdots \| \|f\|_{p_1, x_1} \|_{p_2, x_2} \cdots \|_{p_{n-1}, x_{n-1}}(x_n) \right)^{p_n(x_n)} |\nu^{p_n(x_n)} - \nu_0^{p_n(x_n)}| dx_n \\ &\leq \frac{\rho_{\mathbf{p}}(f)}{(\nu\nu_0)^{\bar{p}_n}} \sup_{x_n \in \mathbb{R}} |\nu^{p_n(x_n)} - \nu_0^{p_n(x_n)}| \rightarrow 0 \quad \text{при } \nu \rightarrow \nu_0. \end{aligned}$$

При $\nu_0 \geq 1$ доказательство аналогично. Таким образом,

$$\lim_{\nu \rightarrow \nu_0} g(\nu) = g(\nu_0).$$

Очевидно, что при $0 < \nu_1 \leq \nu_2 < \infty$ $\rho_{\mathbf{p}}(f/\nu_1) \geq \rho_{\mathbf{p}}(f/\nu_2)$. Поэтому функция $g(\nu)$ является невозрастающей на $(0, \infty)$.

ЛЕММА 2. Если $\bar{p}_n < \infty$, то для любого $0 < \|f\|_{\mathbf{p}} < \infty$, $\rho_{\mathbf{p}}(f/\|f\|_{\mathbf{p}}) = 1$.

Так как при $\nu \geq \|f\|_{\mathbf{p}}$, $\rho_{\mathbf{p}}(f/\nu) \leq \rho_{\mathbf{p}}(f/\|f\|_{\mathbf{p}})$, то $\rho_{\mathbf{p}}(f/\|f\|_{\mathbf{p}}) = 1$.

Если $0 < \nu \leq \|f\|_{\mathbf{p}}$, то $\rho_{\mathbf{p}}(f/\nu) \leq (\|f\|_{\mathbf{p}}/\nu)^{\bar{p}_n} \rho_{\mathbf{p}}(f/\|f\|_{\mathbf{p}})$. Пусть теперь выполнено $\rho_{\mathbf{p}}(f/\|f\|_{\mathbf{p}}) < 1$. Тогда по определению имеется $\nu_1 < \|f\|_{\mathbf{p}}$ такое, что $\rho_{\mathbf{p}}(f/\nu_1) \leq 1$. Действительно, положив $\nu_1 = \|f\|_{\mathbf{p}}[\rho_{\mathbf{p}}(f/\|f\|_{\mathbf{p}})]^{1/\bar{p}_n}$ и используя лемму 1, получим, что $\nu_1 < \|f\|_{\mathbf{p}}$ и

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{p}}\left(\frac{f}{\|f\|_{\mathbf{p}}}\right) &\leq \rho_{\mathbf{p}}\left(\frac{f}{\nu_1}\right) = \rho_{\mathbf{p}}\left(\left[\rho_{\mathbf{p}}\left(\frac{f}{\|f\|_{\mathbf{p}}}\right)\right]^{-1/\bar{p}_n} \frac{f}{\|f\|_{\mathbf{p}}}\right) \\ &\leq \left[\rho_{\mathbf{p}}\left(\frac{f}{\|f\|_{\mathbf{p}}}\right)\right]^{-1} \rho_{\mathbf{p}}\left(\frac{f}{\|f\|_{\mathbf{p}}}\right) = 1. \end{aligned}$$

А это противоречит равенству (1).

Отметим, что при $\mathbf{p}(x) = (p(x_1), \dots, p(x_n))$ для пространств $L_{\mathbf{p}(x_n)}(\Omega)$ лемма 1 доказана в работе [2].

ТЕОРЕМА 1 (Неравенство типа Гёльдера). Пусть $\mathbf{1} \leq \mathbf{p}(x) < \infty$. Обозначим $\mathbf{p}'(x) = (p'_1(x), p'_2(x), \dots, p'_n(x))$, и пусть $f_1 \in L_{\mathbf{p}(x)}(\mathbb{R}^n)$, $f_2 \in L_{\mathbf{p}'(x)}(\mathbb{R}^n)$, $1/\mathbf{p}(x) + 1/\mathbf{p}'(x) = 1$, т.е., $1/p_i(x) + 1/p'_i(x) = 1$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $f_1 f_2 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x) f_2(x)| dx \leq \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p'_i} \right) \|f_1\|_{\mathbf{p}} \|f_2\|_{\mathbf{p}'}. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, можно предположить, что $\|f_i\|_{p_i} \neq 0$, $i = 1, 2$. Иначе неравенство (2) тривиально. Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p}(x) < \infty$. Известно, что для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$ab \leq \frac{a^{p_1(x)}}{p_1(x)} + \frac{b^{p'_1(x)}}{p'_1(x)}, \quad a, b \geq 0.$$

Взяв в последнем неравенстве $a = |f_1(x)|/\|f_1\|_{p_1, x_1}$, $b = |f_2(x)|/\|f_2\|_{p'_1, x_1}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{|f_1(x) f_2(x)|}{\|f_1\|_{p_1, x_1} \|f_2\|_{p'_1, x_1}} &\leq \frac{1}{p_1(x)} \left| \frac{f_1(x)}{\|f_1\|_{p_1, x_1}} \right|^{p_1(x)} + \frac{1}{p'_1(x)} \left| \frac{f_2(x)}{\|f_2\|_{p'_1, x_1}} \right|^{p'_1(x)} \\ &\leq \frac{1}{\underline{p}_1} \left| \frac{f_1(x)}{\|f_1\|_{p_1, x_1}} \right|^{p_1(x)} + \frac{1}{\underline{p}'_1} \left| \frac{f_2(x)}{\|f_2\|_{p'_1, x_1}} \right|^{p'_1(x)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрируя обе части неравенства (3) по переменной x_1 и используя лемму 2 при фиксированном $x^{(2)} \in \mathbb{R}^{n-1}$, получим

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1(x) f_2(x)| dx_1 \leq \left(\frac{1}{\underline{p}_1} + \frac{1}{\underline{p}'_1} \right) \|f_1\|_{p_1, x_1} \|f_2\|_{p'_1, x_1}. \quad (4)$$

Так как

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)f_2(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x)f_2(x)| dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n,$$

применяя неравенство (4) по каждой переменной в отдельности получим неравенство (2).

Отметим, что при $\mathbf{p}(x) = \mathbf{1}$, $\mathbf{p}'(x) = \infty$ неравенство (2) тривиально.

Если $p_i(x^{(i)}) = p_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, n$, то получается классическое неравенство Гёльдера.

Теорема 1 доказана.

В случае, когда $\mathbf{p}(x) = (p(x_n), \dots, p(x_n))$, теорема 1 доказана в работе [2].

Для измеримой функции $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ положим

$$\|f\|_{\mathbf{p}} = \sup_{\|g\|_{\mathbf{p}'} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx, \quad (5)$$

где $\mathbf{1}/\mathbf{p}(x) + \mathbf{1}/\mathbf{p}'(x) = \mathbf{1}$. Очевидно, что функционал (5) определяет норму в пространстве функций, для которых $\|f\|_{\mathbf{p}} < \infty$.

ТЕОРЕМА 2 (об эквивалентности норм). Пусть $\mathbf{1} \leq \mathbf{p}(x) < \infty$ и $f \in L_{\mathbf{p}(x)}(\mathbb{R}^n)$. Тогда имеет место неравенство

$$c_{\mathbf{p}}^{-1} \|f\|_{\mathbf{p}} \leq \|f\|_{\mathbf{p}} \leq c_{\mathbf{p}} \|f\|_{\mathbf{p}}, \quad (6)$$

где $c_{\mathbf{p}} = \prod_{i=1}^n (1/p_i + 1/p'_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L_{\mathbf{p}(x)}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_{\mathbf{p}'(x)}(\mathbb{R}^n)$ и $\|g\|_{\mathbf{p}'} \leq 1$. Применяя неравенство (2), получим

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq c_{\mathbf{p}} \|f\|_{\mathbf{p}} \|g\|_{\mathbf{p}'} \leq c_{\mathbf{p}} \|f\|_{\mathbf{p}},$$

т.е. $\|f\|_{\mathbf{p}} < \infty$. Полученное неравенство доказывает правую часть неравенства (6).

С другой стороны, имеем $0 < \|f\|_{\mathbf{p}} < \infty$. Докажем, что если $\|f\|_{\mathbf{p}} \leq 1$, то $\rho_{\mathbf{p}}(f) \leq 1$.

Действительно, предположим, что $\rho_{\mathbf{p}}(f) > 1$. В силу леммы 1 существует $\lambda > 1$ такое, что $\rho_{\mathbf{p}}(f/\lambda) = 1$. Положим

$$g(x_n) = \left(\frac{\|\dots\| \|f\|_{p_1, x_1} \|p_2, x_2\| \dots \|p_{n-1}, x_{n-1}\|}{\lambda} \right)^{p_n(x_n)-1}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда $\rho_{\mathbf{p}'}(g) = \rho_{\mathbf{p}}(f/\lambda) = 1$ и $\|f\|_{\mathbf{p}} \geq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx = \lambda \rho_{\mathbf{p}}(f/\lambda) = \lambda > 1$. Из полученного противоречия следует, что $\rho_{\mathbf{p}}(f) \leq 1$.

Теперь докажем левую часть неравенства (6). Так как $\|f/(c_{\mathbf{p}} \|f\|_{\mathbf{p}})\|_{\mathbf{p}} = c_{\mathbf{p}}^{-1} \leq 1$, то $\rho_{\mathbf{p}}(f/[c_{\mathbf{p}} \|f\|_{\mathbf{p}}]) \leq 1$. Тогда по определению $\|f\|_{\mathbf{p}} \leq c_{\mathbf{p}} \|f\|_{\mathbf{p}}$.

Теорема 2 доказана.

В случае, когда $\mathbf{p}(x) = (p(x_n), \dots, p(x_n))$, теорема 2 доказана в работе [2].

Основные результаты. Теперь рассмотрим случай, когда $\mathbf{p}(x, y) = (p(x), q(y))$, где $x \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $y \in \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$, Ω_i -измеримые по Лебегу множества, $i = 1, 2$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq \underline{p} \leq p(x) \leq \underline{q} \leq q(y) \leq \bar{q} < \infty$, $p(x) \in C(\Omega_1)$. Тогда имеет место неравенство

$$\| \|f\|_{p, \Omega_1} \|_{q, \Omega_2} \leq \left(\frac{\bar{p}}{\underline{q}} + \frac{\bar{q} - \underline{p}}{\bar{q}} \right)^{2/\underline{p}} \| \|f\|_{q, \Omega_2} \|_{p, \Omega_1},$$

где $\underline{p} = \inf_{\Omega_1} p(x)$, $\bar{p} = \sup_{\Omega_1} p(x)$, $\underline{q} = \inf_{\Omega_2} q(y)$, $\bar{q} = \sup_{\Omega_2} q(y)$, $f: \omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная измеримая функция и $C(\Omega_1)$ – пространство непрерывных функций на Ω_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [3] доказано, что если $1 \leq r(y) \leq \bar{r} < \infty$, $y \in \mathbb{R}^m$, то для любой измеримой функции $g: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$\left\| \int_{\Omega_1} g(x, \cdot) dx \right\|_{r(\cdot), \Omega_2} \leq \left(\frac{1}{\underline{r}} + \frac{1}{\underline{r}'} \right)^2 \int_{\Omega_1} \|g(x, \cdot)\|_{r(\cdot), \Omega_2} dx. \quad (7)$$

Если заменить в неравенстве (7) $g(x, y)$ на $|f(x, y)|^{p(x)}$ и взяв норму относительно переменной y от функции $r(x, y) = q(y)/p(x)$ (при фиксированном x), получим

$$\left\| \int_{\Omega_1} |f(x, \cdot)|^{p(x)} dx \right\|_{q(\cdot)/p(x), \Omega_2} \leq \left(\frac{\bar{p}}{\underline{q}} + \frac{\bar{q} - \underline{p}}{\bar{q}} \right)^2 \int_{\Omega_1} \| [f(x, \cdot)]^{p(x)} \|_{q(\cdot)/p(x), \Omega_2} dx.$$

По определению имеем

$$\begin{aligned} \| [f(x, \cdot)]^{p(x)} \|_{q(\cdot)/p(x), \Omega_2} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega_2} \left| \frac{[f(x, y)]^{p(x)}}{\lambda} \right|^{q(y)/p(x)} dy \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega_2} \left| \frac{f(x, y)}{\lambda^{1/p(x)}} \right|^{q(y)} dy \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Положим $\mu = \lambda^{1/p(x)}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} &\inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega_2} \left| \frac{f(x, y)}{\lambda^{1/p(x)}} \right|^{q(y)} dy \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \mu^{p(x)} > 0 : \int_{\Omega_2} \left| \frac{f(x, y)}{\mu} \right|^{q(y)} dy \leq 1 \right\} = \|f(x, \cdot)\|_{q(\cdot), \Omega_2}^{p(x)}. \end{aligned}$$

Итак

$$\| [f(x, \cdot)]^{p(x)} \|_{q(\cdot)/p(x), \Omega_2} = \|f(x, \cdot)\|_{q(\cdot), \Omega_2}^{p(x)}. \quad (8)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{\Omega_1} |f(x, \cdot)|^{p(x)} dx \right\|_{q(\cdot)/p(x), \Omega_2} \\ &= \inf \left\{ \nu > 0 : \int_{\Omega_2} \left(\frac{\int_{\Omega_1} |f(x, y)|^{p(x)} dx}{\nu} \right)^{q(y)/p(x)} dy \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \nu > 0 : \int_{\Omega_2} \left(\frac{(\int_{\Omega_1} |f(x, y)|^{p(x)} dx)^{1/p(x)}}{\nu^{1/p(x)}} \right)^{q(y)} dy \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Положим $\delta = \nu^{1/p(x)}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ \nu > 0 : \int_{\Omega_2} \left(\frac{(\int_{\Omega_1} |f(x, y)|^{p(x)} dx)^{1/p(x)}}{\nu^{1/p(x)}} \right)^{q(y)} dy \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \delta^{p(x)} > 0 : \int_{\Omega_2} \left(\frac{(\int_{\Omega_1} |f(x, y)|^{p(x)} dx)^{1/p(x)}}{\delta} \right)^{q(y)} dy \leq 1 \right\} \\ &= \left\| \left(\int_{\Omega_1} |f(x, \cdot)|^{p(x)} dx \right)^{1/p(x)} \right\|_{q(\cdot), \Omega_2}^{p(x)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left\| \int_{\Omega_1} |f(x, \cdot)|^{p(x)} dx \right\|_{q(\cdot)/p(x), \Omega_2}^{p(x)} = \left\| \left(\int_{\Omega_1} |f(x, \cdot)|^{p(x)} dx \right)^{1/p(x)} \right\|_{q(\cdot), \Omega_2}^{p(x)}. \quad (9)$$

В силу равенств (8) и (9) неравенство (7) принимает вид

$$\left\| \left(\int_{\Omega_1} |f(x, \cdot)|^{p(x)} dx \right)^{1/p(x)} \right\|_{q(\cdot), \Omega_2}^{p(x)} \leq \left(\frac{\bar{p}}{\underline{q}} + \frac{\bar{q} - p}{\bar{q}} \right)^2 \int_{\Omega_1} \|f(x, \cdot)\|_{q(\cdot), \Omega_2}^{p(x)} dx. \quad (10)$$

В работе [13] доказано, что если $p(x) \in C(\Omega_1)$, то существуют точки $x_1, x_2 \in \Omega_1$ такие, что

$$\begin{aligned} \|f(\cdot, y)\|_{p(\cdot), \Omega_1} &= \left(\int_{\Omega_1} |f(x, y)|^{p(x)} dx \right)^{1/p(x_1)}, \\ \| \|f\|_{q, \Omega_2} \|_{p, \Omega_1} &= \left(\int_{\Omega_1} \|f(x, \cdot)\|_{q(\cdot), \Omega_2}^{p(x)} dx \right)^{1/p(x_2)}, \end{aligned}$$

где точки $x_1, x_2 \in \Omega_1$ зависят от функций f и $\|f\|_{q, \Omega_2}$, соответственно. Учитывая последние полученные равенства в неравенстве (10), получим

$$\| \|f\|_{p, \Omega_1} \|_{q(\cdot), \Omega_2}^{p(x_1)} \leq \left(\frac{\bar{p}}{\underline{q}} + \frac{\bar{q} - p}{\bar{q}} \right)^2 \| \|f\|_{q, \Omega_2} \|_{p, \Omega_1}^{p(x_2)}.$$

Окончательно получим

$$\| \|f\|_{p, \Omega_1} \|_{q, \Omega_2} \leq \left(\frac{\bar{p}}{\underline{q}} + \frac{\bar{q} - p}{\bar{q}} \right)^{2/p} \| \|f\|_{q, \Omega_2} \|_{p, \Omega_1}^{p(x_2)/p(x_1)}. \quad (11)$$

Положим $h(x, y) \neq 0$, для п.в. $(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, $h \in L_{(q(y), p(x))}(\Omega_2 \times \Omega_1)$ – произвольная функция, и пусть $f(x, y) = h(x, y) / \| \|h\|_{q, \Omega_2} \|_{p, \Omega_1}$. Очевидно, что $\| \|f\|_{q, \Omega_2} \|_{p, \Omega_1} = 1$. Подставляя это в неравенство (11), имеем

$$\| \|h\|_{p, \Omega_1} \|_{q, \Omega_2} \leq \left(\frac{\bar{p}}{\underline{q}} + \frac{\bar{q} - p}{\bar{q}} \right)^{2/p} \| \|h\|_{q, \Omega_2} \|_{p, \Omega_1}.$$

В случаях, когда $f(x, y) \notin L_{(q(y), p(x))}(\Omega_2 \times \Omega_1)$, требуемое неравенство является тривиальным.

Теорема 3 доказана.

Отметим, что при $p(x) = 1$ теорема 3 доказана в работе [3].

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что $\mathbf{p}(x) = (p_1(x), p_2(x^{(2)}), \dots, p_n(x_n))$, $\mathbf{q}(x) = (q_1(x), q_2(x^{(2)}), \dots, q_n(x_n))$ – две вектор-функции такие, что $\mathbf{1} \leq \mathbf{p}(x) \leq \mathbf{q}(x) \leq \bar{\mathbf{q}} < \infty$, $x \in I = \{x \in \mathbb{R}^n : -\infty \leq a_i < x_i < b_i \leq +\infty, i = 1, \dots, n\}$, $i = 1, \dots, n$, и пусть выполняются следующие условия:*

$$\begin{aligned} A_i &= \sup_{(x_{i+1}, \dots, x_n)} \int_{a_i}^{b_i} [q_i(x^{(i)}) - p_i(x^{(i)})] dx_i < \infty, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ A_n &= \int_{a_n}^{b_n} [q(x_n) - p(x_n)] dx_n < \infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда имеет место непрерывное вложение $L_{\mathbf{q}(x)}(I) \hookrightarrow L_{\mathbf{p}(x)}(I)$ и

$$\|f\|_{L_{\mathbf{q}(x)}(I)} \leq \prod_{i=1}^n [B_i(p_i, q_i)]^{\gamma_i} \|f\|_{L_{\mathbf{p}(x)}(I)}, \quad (13)$$

где $B_i(p_i, q_i) = 1/r_{-i} + A_i/q_{-i}$, $r_{-i} = \inf_{x \in \mathbb{R}^{n-i+1}} q_i(x^{(i)})/p_i(x^{(i)})$,

$$\gamma_i = \begin{cases} 1/\underline{p}_i, & \text{при } B_i(p_i, q_i) \geq 1, \\ 1/\bar{p}_i, & \text{при } B_i(p_i, q_i) \leq 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что для любого фиксированного $x \in I$ справедливо неравенство

$$ab \leq \frac{a^{r_1(x)}}{r_1(x)} + \frac{b^{r'_1(x)}}{r'_1(x)},$$

где $r_1: I \rightarrow [1, \infty)$, $r'_1(x) = r_1(x)/(r_1(x) - 1)$, $a, b > 0$; при $r_1(x) = 1$ предполагается, что $r'_1(x) = \infty$.

Взяв в последнем неравенстве $r_1(x) = q_1(x)/p_1(x)$,

$$a = \left| \frac{f(x)}{(B_1(p_1, q_1) \|f\|_{q_1, x_1, [a_1, b_1]})} \right|^{p_1(x)}$$

и $b = 1$, получим

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{B_1(p_1, q_1) \|f\|_{q_1, x_1, [a_1, b_1]}} \right|^{p_1(x)} \\ &= \frac{1}{[B_1(p_1, q_1)]^{p_1(x)}} \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{q_1, x_1, [a_1, b_1]}} \right|^{p_1(x)} \\ &\leq \frac{1}{[B_1(p_1, q_1)]^{p_1(x)}} \left(\frac{1}{r_1(x)} \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{q_1, x_1, [a_1, b_1]}} \right|^{q_1(x)} + \frac{q_1(x) - p_1(x)}{q_1(x)} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\|f\|_{q_1, x_1, [a_1, b_1]} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p_1(x)} dx_1 \leq 1 \right\}.$$

Сначала предположим, что $B_1(p_1, q_1) \leq 1$. Тогда интегрируя обе части неравенства (14) по переменной $x_1 \in [a_1, b_1]$, используя определение пространства $L_{\mathbf{p}(x)}(I)$ и условие (12) при $i = 1$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{f(x)}{B_1(p_1, q_1) \|f\|_{q_1, x_1, [a_1, b_1]}} \right|^{p_1(x)} dx_1 \\ & \leq \frac{1}{[B_1(p_1, q_1)]^{\bar{p}_1}} \left(\frac{1}{r_1} \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{q_1, x_1, [a_1, b_1]}} \right|^{q_1(x)} dx_1 + \frac{1}{\underline{q}_1} \int_{a_1}^{b_1} [q_1(x) - p_1(x)] dx_1 \right) \\ & \leq \frac{1}{[B_1(p_1, q_1)]^{\bar{p}_1}} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{A_1}{\underline{q}_1} \right). \end{aligned}$$

Постоянную $B_1(p_1, q_1)$ определим из условия $1/r_1 + A_1/\underline{q}_1 \leq [B_1(p_1, q_1)]^{\bar{p}_1}$. Очевидно, что $1/r_1 + A_1/\underline{q}_1 \leq 1$. Тогда $B_1(p_1, q_1) \geq [1/r_1 + A_1/\underline{q}_1]^{1/\bar{p}_1}$ и поэтому постоянную $B_1(p_1, q_1)$ можно взять равной $[1/r_1 + A_1/\underline{q}_1]^{1/\bar{p}_1}$.

Если $B_1(p_1, q_1) \geq 1$, то снова интегрируя обе части неравенства (14) по переменной $x_1 \in [a_1, b_1]$, имеем

$$\int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{f(x)}{B_1(p_1, q_1) \|f\|_{q_1, x_1, [a_1, b_1]}} \right|^{p_1(x)} dx_1 \leq \frac{1}{[B_1(p_1, q_1)]^{\underline{p}_1}} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{A_1}{\underline{q}_1} \right).$$

Тогда при $1/r_1 + A_1/\underline{q}_1 \geq 1$ постоянную $B_1(p_1, q_1)$ можно взять равной $[1/r_1 + A_1/\underline{q}_1]^{1/\underline{p}_1}$.

Итак получили, что

$$\|f\|_{q_1, x_1, [a_1, b_1]} \leq B_1(p_1, q_1) \|f\|_{p_1, x_1, [a_1, b_1]}. \quad (15)$$

Так как

$$\|f\|_{L_{q(x)}(I)} = \|\dots \| \|f\|_{q_1, x_1, [a_1, b_1]} \|_{q_2, x_2, [a_2, b_2]} \dots \|_{q_n, x_n, [a_n, b_n]},$$

последовательным применением неравенства (15) по каждой переменной в отдельности получим неравенство (13).

Теорема 4 доказана.

Отметим, что теорема 4 является новой в случаях, когда $\mathbf{p}(x) = (p(x_n), \dots, p(x_n))$, $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что при $0 \leq b_i - a_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$ интегралы в условиях (12) сходятся.

Действительно,

$$\int_{a_i}^{b_i} [q_i(x^{(i)}) - p_i(x^{(i)})] dx_i \leq (\bar{q}_i - \underline{p}_i)(b_i - a_i) < \infty, \quad i = 1, \dots, n.$$

В случае, когда $n = 1$, $x \in [0, 1]$, теорема 4 доказана в работе [4], и при $n > 1$, $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i) < \infty$, $\mathbf{p}(x) = (p(x_n), \dots, p(x_n))$ теорема 4 доказана в работе [3] (см. также [2]).

Недавно, в случае $p(x) = \text{const}$ для сверточных операторов, удовлетворяющих некоторому условию типа Хермандера, было доказано двухвесовые оценки в пространстве Лебега (см. [14]).

В заключение автор выражает глубокую благодарность академику А. Дж. Гаджиеву, профессорам А. Дж. Джабраилова, В. С. Гулиева и Р. М. Рзаева за обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. И. Шарапудинов, “О топологии пространства $\mathcal{L}^{p(t)}([0, 1])$ ”, *Матем. заметки*, **26**:4 (1979), 613–632.
- [2] O. Kováčik, J. Rákosník, “On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ ”, *Czechoslovak Math. J.*, **41**:4 (1991), 592–618.
- [3] S. G. Samko, “Convolution type operators in $L^{p(x)}$ ”, *Integral Transform. Spec. Funct.*, **7**:1–2 (1998), 123–144.
- [4] И. И. Шарапудинов, “О базисности системы Хаара в пространстве $\mathcal{L}^{p(t)}([0, 1])$ и принципе локализации в среднем”, *Матем. сб.*, **130**:2 (1986), 275–283.
- [5] И. И. Шарапудинов, “О равномерной ограниченности в L^p ($p = p(x)$) некоторых семейств операторов свертки”, *Матем. заметки*, **59**:2 (1996), 291–302.
- [6] В. В. Жиков, “Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:4 (1986), 675–710.
- [7] M. Ružička, *Lecture Notes in Math.*, **1748** (2000).
- [8] Р. А. Бандалиев, “О пространстве $L_{(p_1(x), p_2(x^2), \dots, p_n(x_n))}(R^n)$ со смешанной нормой”, *Тез. X междунар. конф. в области матем. и мех., посвящ. 45-летию Ин-та матем. и мех. НАН Азербайджана*, Баку, 2004, 38.
- [9] R. A. Bandaliyev, “On an inequality in the variable Lebesgue space with mixed norm”, *Trans. Acad. Sci. Azerbaijan. Math. and Mech.*, **26**:7 (2006), 133–145.
- [10] A. Benedek, R. Panzone, “The spaces L_p , with mixed norm”, *Duke Math. J.*, **28**:3 (1961), 302–324.
- [11] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.
- [12] С. М. Никольский, “Об одной задаче С. Л. Соболева”, *Сиб. матем. журн.*, **3**:6 (1962), 845–851.
- [13] S. G. Samko, “Differentiation and integration of variable order and the spaces $L^{p(x)}$ ”, *Operator Theory for Complex and Hypercomplex Analysis*, Proc. of a conf. (Mexico City, 1994), *Contemp. Math.*, **212**, 1998, 203–219.
- [14] Р. А. Бандалиев, “Двухвесовые неравенства для сверточных операторов в пространстве Лебега”, *Матем. заметки*, **80**:1 (2006), 3–10.

Р. А. Бандалиев

Институт математики и механики НАН Азербайджана

E-mail: bandaliev@rambler.ru

Поступило

25.04.2007