Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Борисенко, Об однозначной проектируемости замкнутых поверхностей в сферическом пространстве, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 1, 120–121

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4098>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:23:13

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Об однозначной проектируемости замкнутых поверхностей в сферическом пространстве

А. А. Борисенко

Имеется гипотеза, что компактная регулярная поверхность F гауссовой кривизны $K > 0$ в сферическом пространстве S^3 однозначно проектируется на большую вполне геодезическую сферу S_0^2 [1].

Это эквивалентно тому, что касательные вполне геодезические сферы S^2 к поверхности F не проходят через точки P_1, P_2 , полярные к S_0^2 .

Возьмем единичную нормаль n к F и рассмотрим сферическое изображение $n: F \rightarrow S^3$, где точке $Q \in F$ ставится в соответствие точка $n \in S^3$. Множество $\tilde{F} = n(F)$ называется *полярным образом* поверхности F . Однозначная проектируемость F эквивалентна тому, что множество $\tilde{F}$ лежит в открытой полусфере сферического пространства S^3 .

Мы можем доказать гипотезу при некоторых ограничениях на нормальную кривизну поверхности F .

ТЕОРЕМА 1. Пусть F – компактная класса C^2 поверхность в сферическом пространстве S^3 . Если нормальная кривизна поверхности в каждой точке удовлетворяет неравенству

$$|k_n| < c,$$

где $c = 2l_3^*/\sqrt{1+(l_3^*)^2}$, $l_3^* = 2 \arcsin \sqrt{2/3}$, то поверхность F однозначно проектируется на большую сферу.

Известно, что имеет место

ТЕОРЕМА 2 [1], [2]. Пусть F – компактная поверхность в S^3 , которая однозначно проектируется на вполне геодезическую большую сферу. Если гауссова кривизна $K \leq 1$, то поверхность F является вполне геодезической большой сферой.

Как следствие теорем 1 и 2 верна

ТЕОРЕМА 3. Если поверхность удовлетворяет условиям теоремы 1 и гауссова кривизна поверхности $K \leq 1$, то поверхность является большой вполне геодезической сферой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как для нормальной кривизны поверхности F выполнено $|k_n| < c$, то гауссова кривизна $K > 1 - c^2 > 0$. По теореме Бонне внутренний диаметр поверхности F

$$d < \frac{\pi}{\sqrt{1-c^2}}.$$

Пусть γ – произвольная кратчайшая кривая на F . Оценим длину ее сферического изображения $\tilde{\gamma}$. Для простоты вычислений будем считать, что вдоль γ координатные линии являются линиями кривизны, s – параметр длины на γ .

Тогда $n = n(u_1(s), u_2(s))$ – параметризация кривой $\tilde{\gamma}$. Дифференциал длины кривой $\tilde{\gamma}$

$$d\sigma = |n'_s| ds, \\ n'_s = n_{u_1} \frac{du^1}{ds} + n_{u_2} \frac{du^2}{ds} = k_1 r_{u_1} \frac{du^1}{ds} + k_2 r_{u_2} \frac{du^2}{ds},$$

где k_1, k_2 – главные кривизны поверхности F . Тогда третья и первая квадратичные формы имеют вид

$$dn^2 = g_{11} k_1^2 (du_1)^2 + g_{22} k_2^2 (du_2)^2, \\ ds^2 = g_{11} (du_1)^2 + g_{22} (du_2)^2.$$

В силу условия на нормальные кривизны $|k_i| < c, i = 1, 2$. Тогда $dn^2 < c^2 ds^2$ и длина кривой $\tilde{\gamma}$ меньше $\pi c / \sqrt{1 - c^2}$. Эта оценка верна в любой системе координат на поверхности. Отсюда следует, что внутренний диаметр сферического изображения $\tilde{F}$ меньше $\pi c / \sqrt{1 - c^2}$, а значит и расстояние между этими точками на сфере S^3 удовлетворяет этому неравенству. Заметим, что $\tilde{F}$ есть связное множество.

Известно следующее обобщение теоремы Юнга на сферическое пространство: если множество $\tilde{F}$ связно в S^n и его внешний диаметр $D < l_n^*$, где $l_n^* = 2 \arcsin \sqrt{(n+1)/(2n)}$, то множество $\tilde{F}$ лежит в открытой полусфере S^n [3].

Если потребуем

$$\frac{\pi c}{\sqrt{1 - c^2}} \leq l_n^*,$$

то

$$c \leq \frac{l_n^*}{\pi \sqrt{1 + (l_n^*)^2}}.$$

Тогда множество $\tilde{F}$ лежит в открытой полусфере и поверхность однозначно проектируется на вполне геодезическую большую сферу S_0^2 , которая ограничивает открытую полусферу, содержащую $\tilde{F}$.

Последовательность l_n^* изменяется следующим образом: $l_2^* = 2\pi/3, l_{n+1}^* < l_n^*, l_n^* \rightarrow \pi/2$ при $n \rightarrow \infty$ [4]. В случае двумерных поверхностей в S^3 мы должны взять l_3^* .

Аналог теоремы 1 можно сформулировать для гиперповерхностей в сферическом пространстве S^n . В этом случае

$$c = \frac{l_n^*}{\pi \sqrt{1 + (l_n^*)^2}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Борисенко, *УМН*, **54:5** (1999), 151–152. [2] А. А. Борисенко, *Матем. сб.*, **104(146):4(12)** (1977), 559–576. [3] B. Grünbaum, *An. Acad. Brasil. Ci.*, **32** (1960), 323–328. [4] B. V. Dekster, *Acta Math. Hungar.*, **67:4** (1995), 315–331.

А. А. Борисенко

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина

E-mail: Andrus@univer.kharkov.ua

Поступило

28.10.2008

Исправленный вариант

19.02.2010