Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Борисенко, Об изометрическом погружении нилм-ногообразий в евклидово пространство, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 1, 130–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4099>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:49:48

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Об изометрическом погружении нилмногообразий в евклидово пространство

А. А. Борисенко

В работе [1] Ривертц доказал, что не существует регулярного изометрического погружения трехмерной группы Гейзенберга с произвольной левоинвариантной метрикой в евклидово пространство E^4 . Масальцев обобщил этот результат на случай $(2n+1)$ -мерной группы Гейзенберга H_n с левоинвариантной метрикой и показал, что она не допускает C^3 -регулярного изометрического погружения в E^{2n+2} [2]. Однако этот результат можно усилить и, более того, рассматривать нилпотентные группы с шагом нилпотентности 2 и для них дать оценку снизу на коразмерность погружения, когда возможно их локально изометрическое погружение в евклидово пространство. Более того, можно рассмотреть римановы многообразия, кривизноподобные нилпотентным группам с шагом нилпотентности 2 с левоинвариантной метрикой.

Пусть $\mathcal{N}$ – конечномерная действительная алгебра Ли. Для каждого $i \geq 1$ мы определим

$$\mathcal{N}^i = [\mathcal{N}, \mathcal{N}^{i-1}], \quad \text{где } \mathcal{N}^0 = \mathcal{N}.$$

Ли алгебра $\mathcal{N}$ называется *нилпотентной*, если $\mathcal{N}^i = \{0\}$ для некоторого положительного i . Нилпотентная алгебра имеет нетривиальный центр $\mathcal{N}^{i-1}$, если $\mathcal{N}^i = \{0\}$. Нилпотентная алгебра имеет шаг нилпотентности 2, если $\mathcal{N}^2 = \{0\}$, но $\mathcal{N}^1 \neq 0$. Пусть N – единственная односвязная группа Ли с данной несингулярной алгеброй Ли с шагом нилпотентности 2. Возьмем на N левоинвариантную метрику. Пусть $\mathcal{Z}$ – центр алгебры $\mathcal{N}$, $\mathcal{V}$ – ортогональное дополнение к $\mathcal{Z}$ в скалярном произведении на $\mathcal{N}$, которое задает левоинвариантную метрику на N . Тогда секционная кривизна K на N вычисляется следующим способом:

а) если $X, Y \in \mathcal{V}$ – ортогональные единичные векторы, то

$$K(X, Y) = -\frac{3}{4}|[X, Y]|^2 < 0,$$

б) если $X \in \mathcal{V}$, $Z \in \mathcal{Z}$ – ортогональные единичные векторы, то

$$K(X, Z) = \frac{1}{4}|J(Z)X|^2,$$

где $J(Z): \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ – линейное отображение, которое определяется следующим способом:

$$\langle J(Z)X, Y \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle$$

для всех $X, Y \in \mathcal{V}$, для всех $Z \in \mathcal{Z}$;

(Если алгебра $\mathcal{N}$ несингулярна, то это эквивалентно тому, что отображение $J(Z)$ невырождено для любого $Z \in \mathcal{Z}$. И в этом случае $K(X, Z) > 0$. 2-Шаговая nilпотентная группа называется группой *типа Гейзенберга*, если $J(Z)^2 = -|Z|^2 \mathcal{I}d$ на подпространстве $\mathcal{V}$ при любом выборе $Z \in \mathcal{Z}$. Группа Гейзенберга H_n удовлетворяет этому условию. Для нее центр $\mathcal{Z}$ является одномерным и отображение $J(Z)$ является невырожденным.)

с) если $Z_1, Z_2 \subset \mathcal{Z}$ ортогональны, то

$$K(Z_1, Z_2) = 0.$$

(Эти ограничения на кривизну справедливы для любой левоинвариантной метрики на N [3].) Естественно ввести класс римановых многообразий, кривизноподобных 2-шаговым nilпотентным группам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть M^l – риманово многообразие, $Q \in M^l$, $T_Q M^l$ – касательное пространство в точке Q . Пусть

$$T_Q M^l = \mathcal{Z}_Q + \mathcal{V}_Q, \quad \dim \mathcal{Z}_Q = l_1, \quad \dim \mathcal{V}_Q = l_2, \quad l_1 + l_2 = l,$$

есть прямая сумма двух подпространств таких, что секционная кривизна обладает следующими свойствами:

- а) $K(X, Y) < 0$ для взаимно ортогональных единичных векторов $X, Y \in \mathcal{V}_Q$;
- б) $K(X, Z) > 0$ для единичных $X \in \mathcal{V}$, $Z \in \mathcal{Z}_Q$;
- в) $K(Z_1, Z_2) \leq 0$ для ортогональных единичных $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_Q$.

Если условия а), б), в) выполнены для любой точки $Q \in M^n$, то риманово многообразие называется *2-шаговым римановым nilмногообразием*.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M^l – 2-шаговое риманово nilмногообразие. Тогда оно не допускает регулярное класса C^2 изометрическое погружение в евклидово пространство E^{l+p} , где $p < \max(l_1, l_2)$.

Так как $\max(l_1, l_2) \geq l/2$, то невозможно изометрическое погружение при коразмерности вложения $p < l/2$.

Так как 2-шаговые несингулярные nilпотентные группы Ли с левоинвариантной метрикой удовлетворяют условиям теоремы 1, то верна

ТЕОРЕМА 2. 2-Шаговые несингулярные nilпотентные группы N^l с левоинвариантной метрикой не допускают регулярного изометрического погружения в евклидово пространство E^{l+p} , где $p < \max(l_1, l_2)$, l_1 – размерность центра, l_2 – размерность ортогонального дополнения.

Для $(2n+1)$ -мерной группы Гейзенберга H_n , $l = 2n+1$, размерность центра $l_1 = 1$, $l_2 = 2n$. И в этом частном случае верно

СЛЕДСТВИЕ. Группа Гейзенберга H_n с левоинвариантной метрикой не допускает регулярного изометрического погружения в евклидово пространство E^{2n+1+p} , где $p < 2n$.

Отсюда следует как результат Ривертца [1], так и результат Масальцева [2].

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае сингулярных 2-шаговых nilпотентных групп с левоинвариантной метрикой оценка на коразмерность погружения ухудшится, а именно, мы можем доказать невозможность изометрического погружения при $p < l_2 - 1$.

Пусть задана система квадратичных уравнений

$$A_{ij}^r x^i x^j = 0, \quad i, j = 1, \dots, l, \quad r = 1, \dots, p. \quad (1)$$

Обозначим через $A(X, X)$ вектор с компонентами $A_{ij}^r x^i x^j$, $A(X, Y)$ – вектор с компонентами $A_{ij}^r x^i y^j$, где X, Y суть l -мерные векторы с компонентами x^i, y^j .

ЛЕММА 1 [4], [5]. Если в системе уравнений (1) для любых линейно независимых векторов X, Y

$$\langle A(X, X), A(Y, Y) \rangle - \langle A(X, Y), A(X, Y) \rangle \leq 0,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве E^p , то система (1) имеет нетривиальное действительное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть F^l есть изометричное погружение 2-шагового риманового нилмногообразия в евклидово пространство E^{l+p} . Пусть $Q \in F^l$, A_{ij}^r – коэффициенты вторых квадратичных форм F^l относительно ортонормированного базиса нормалей n_r , $r = 1, \dots, p$, в точке Q . Пусть для определенности $\dim \mathcal{V}_Q = l_2 \geq \dim \mathcal{Z}_Q = l_1$. Возьмем ограничения этих квадратичных форм на подпространство $\mathcal{V}_Q$. Если $l_1 > l_2$, то вместо $\mathcal{V}_Q$ будем рассматривать подпространство $\mathcal{Z}_Q$.

Пусть $X, Y \in \mathcal{V}_Q$ – векторы с координатами x^i, y^i , $i = 1, \dots, l_2$. Рассмотрим систему уравнений

$$A_{ij}^r x^i x^j = 0, \quad r = 1, \dots, p.$$

Если $p < l_2$, то в силу условия а) система квадратных уравнений удовлетворяет условиям леммы 1 и существует вектор $X_0 \in \mathcal{V}_Q$ такой, что

$$A(X_0, X_0) = 0. \quad (2)$$

Пусть вектор $Y_0 \in \mathcal{Z}(Q)$. Тогда по формуле Гаусса секционная кривизна в направлении двумерной площадки, натянутой на векторы X_0, Y_0 ,

$$K(X_0, Y_0) = \langle A(X_0, X_0), A(Y_0, Y_0) \rangle - \langle A(X_0, Y_0), A(X_0, Y_0) \rangle.$$

Из (2) следует

$$K(X_0, Y_0) = -\langle A(X_0, Y_0), A(X_0, Y_0) \rangle \leq 0.$$

Но это противоречит условию б) определения 2-шагового риманового нилмногообразия. Если $l_1 > l_2$, то подпространство $\mathcal{V}_Q$ заменяется на $\mathcal{Z}_Q$ и вместо условия а) используем условие в).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. J. Rivertz, *An obstruction to isometric immersions of the three dimensional Heisenberg group into $\mathbb{R}^4$* , Preprint Ser. 1999. Pure Math., Preprint № 22, Oslo Univ., Oslo, 1999, 4 p. [2] Л. А. Масальцев, *Матем. заметки*, **76:6** (2004), 868–873. [3] P. Eberlein, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **27:5** (1994), 611–660. [4] Т. Osuki, *Proc. Japan. Acad.*, **29** (1953), 93–100. [5] А. А. Борисенко, *Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий*, Экзамен, М., 2003.

А. А. Борисенко

Харьковский национальный

университет им. В. Н. Каразина, Украина

E-mail: Alexander.A.Borisenko@univer.kharkov.ua

Поступило

18.08.2006

Исправленный вариант

03.10.2008